Andreas Gathmann und Julia Amann Sommersemester 2022

Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 2

Abgabe: Mittwoch, 25. Mai bis 12:00

(1) Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume von $\mathbb{R}^3$?

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a-5 \\ b-5 \\ a-b \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a-5 \\ b-5 \\ a-b \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}.$$

(2) (a) Für welche $a,b,c \in \mathbb{R}$ ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^2 x_1 \\ x_1 + b \\ c x_1 x_2 \end{pmatrix}$ eine lineare Abbildung?

(b) Es sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Ferner sei U ein Unterraum von V mit $U \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ und $U + \operatorname{Ker} f = V$.
Zeige, dass die Abbildung $f|_U\colon U \to \operatorname{Im} f$ bijektiv ist.

(3) Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $V \leq \operatorname{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der Unterraum aller Polynomfunktionen vom Grad kleiner als n. Zeige, dass die Abbildung

$$f\colon V \to \mathbb{R}^n,\ \varphi \mapsto (\varphi(1), \dots, \varphi(n))$$

linear ist, und bestimme Kern und Bild von f.

(4) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$ heißt *Projektion*, wenn $f \circ f = f$.

(a) Gib ein Beispiel für einen Vektorraum V und eine Projektion $f\colon V \to V$ an, bei der sowohl $\operatorname{Ker} f$ als auch $\operatorname{Im} f$ nicht-triviale Unterräume (also weder gleich $\{0\}$ noch gleich V) sind.

(b) Es seien $f,g\colon V \to V$ zwei Projektionen. Beweise, dass $f+g$ genau dann ebenfalls eine Projektion ist, wenn $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ und $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$.
Gilt diese Aussage auch für Vektorräume über einem beliebigen Körper (Beweis oder Gegenbeispiel)?

How to Prove It
am Samstag, den 21. Mai