Andreas Gathmann und Marco Albert Wintersemester 2026/27

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 5

Abgabe: Donnerstag, 26. November bis 16:00 Uhr

(1) (a) Zeige, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_n$ mit

$$a_0 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

konvergiert, und berechne ihren Grenzwert.

(b) Zeige mit dem Monotoniekriterium, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$ konvergiert.

(Der Grenzwert der Folge muss nicht bestimmt werden.)

(2) (a) Bestimme (sofern sie existieren) die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - n \right) \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}.$$

(b) Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei Folgen in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a_n \to a$ und $b_n \to \infty$ für ein $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige durch direkten Rückgang auf die Definitionen, dass dann $\frac{a_n}{b_n} \to 0$. (Dies ist also der Grenzwertsatz „$\frac{a}{\infty} = 0$“ für uneigentliche Grenzwerte, der in der Vorlesung nur angegeben, aber nicht bewiesen wurde.)

(3) (a) Berechne alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = \dfrac{(-5)^n + 3^n}{5^n + 7}$.

(b) Man sagt, dass eine Folge $(a_n)_n$ den (uneigentlichen) Häufungspunkt ∞ hat, wenn es eine Teilfolge von $(a_n)_n$ mit uneigentlichem Grenzwert ∞ gibt.

Zeige, dass $(a_n)_n$ genau dann den Häufungspunkt ∞ hat, wenn $(a_n)_n$ nach oben unbeschränkt ist, und schließe daraus, dass jede reelle Folge einen evtl. uneigentlichen Häufungspunkt besitzt.

(4) (a) Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei beschränkte Folgen positiver Zahlen. Zeige, dass

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n,$$

und gib ein Beispiel dafür an, dass hier im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

(b) Beweise, dass in (a) jedoch stets die Gleichheit gilt, wenn $(a_n)_n$ oder $(b_n)_n$ konvergent ist.