Andreas Gathmann und Marco Albert Wintersemester 2026/27

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 4

Abgabe: Donnerstag, 19. November bis 16:00 Uhr

(1) Bestimme die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\binom{n}{3}}, \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}, \qquad \text{(c)} \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2-n}.$$

Beweise dabei den Grenzwert (c) direkt mit der Grenzwertdefinition, also gib für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ an, so dass das n-te Folgenglied für alle $n \geq n_0$ in der ε-Umgebung des Grenzwerts liegt.

(2) Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei reelle Folgen. Zeige direkt mit der Grenzwertdefinition (also ohne z. B. die Verwendung von Grenzwertsätzen):

(a) Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n + 3b_n) = 12$.

(b) Konvergieren die Folgen $(a_{2n})_n$ und $(a_{2n+1})_n$ beide gegen denselben Wert $a \in \mathbb{R}$, so konvergiert auch $(a_n)_n$ gegen a.

(3) Es sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Zeige, dass für $s \in \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $s = \sup A$.

(b) s ist eine obere Schranke für A, und es gibt eine Folge $(a_n)_n$ von Elementen aus A mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s$.

(4) Zu einer gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ definieren wir die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ ihrer Mittelwerte durch

$$b_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Man zeige: Ist $(a_n)_n$ konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, so ist auch $(b_n)_n$ konvergent mit demselben Grenzwert a.

(Hinweis: Zur Vereinfachung der Rechnung ist es nützlich, die Aussage zunächst für eine Nullfolge $(a_n)_n$ zu beweisen, und den allgemeinen Fall dann darauf zurückzuführen.)