Andreas Gathmann und Marco Albert Wintersemester 2026/27

# *Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 3*

*Abgabe: Donnerstag, 12. November bis 16:00 Uhr*

(1) Bestimme Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (sofern sie existieren) der Menge

$$M = \left\{ \frac{m+n}{mn} : m,n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

(2) Für gegebene $m,n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ sei

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x^{m+1} + x^m.$$

Bestimme in Abhängigkeit von $m$ und $n$ alle Nullstellen von $f$ sowie ihre Vielfachheiten.

(3) Für zwei Mengen $A,B \subset \mathbb{R}$ setzen wir

$$A+B := \{x+y : x \in A, y \in B\} \quad \text{und} \quad A \cdot B := \{xy : x \in A, y \in B\}.$$

Man beweise:

(a) Sind $A$ und $B$ nicht leer und nach oben beschränkt, so gilt $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

(b) Sind $A,B \subset \mathbb{R}_{>0}$ nicht leer und nach oben beschränkt, so gilt $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$.

Gib ferner ein Beispiel dafür an, dass die Aussage (b) ohne die Voraussetzung $A,B \subset \mathbb{R}_{>0}$ im Allgemeinen falsch ist.

(4) Zeige die folgenden Ungleichungen für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$:

(a) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$; (b) $\left(\frac{n}{3}\right)^n \leq n!$.