Andreas Gathmann und Marco Albert Wintersemester 2026/27

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 2

Abgabe: Donnerstag, 5. November bis 16:00 Uhr

(1) Zeige mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

(b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = \frac{2n+1}{n+1}$.

(2) Zu einer Menge M mit $|M| \geq 2$ sei

$$V = \{f \colon f \text{ ist eine Abbildung von } M \text{ nach } \mathbb{R}\}$$

die Menge aller reellwertigen Funktionen auf M. Für $f, g \in V$ definieren wir die Addition $f+g$ und Multiplikation $f \cdot g$ dieser Funktionen punktweise durch

$$f+g \colon M \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)+g(x) \qquad \text{und} \qquad f \cdot g \colon M \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \cdot g(x).$$

(a) Zeige, dass V mit dieser Addition eine abelsche Gruppe ist.

(b) Ist V mit dieser Addition und Multiplikation ein Körper?

(3) Es sei M die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Wir definieren die folgende Relation auf M: Es sei

$$f \sim g \ \Leftrightarrow\ \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ gibt es ein } c \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \text{ mit } g(x) = c \cdot f(x).$$

Man zeige:

(a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Die Relation $\sim$ besitzt unendlich viele Äquivalenzklassen.

(4) (a) Bestimme alle reellen Polynome f mit $x f(x+1) = (x-1) f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimme alle reellen Polynome f mit $x f(x-1) = (x-1) f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(Hinweis: Untersuche die Nullstellen von f.)