5. Folgen und Grenzwerte

Nachdem wir die reellen Zahlen vollständig charakterisiert haben, wollen wir jetzt zur eigentlichen Analysis kommen. Der zentrale Begriff ist dabei der des Grenzwerts, den ihr ja sicher in der Schule schon in der einen oder anderen Form kennengelernt habt und den wir jetzt exakt einführen wollen. Wir beginnen dabei mit Grenzwerten von Folgen, da sie für den Anfang einfacher sind als die später auch noch wichtigen Grenzwerte von Funktionen.

5.A Grenzwerte von Folgen

Zur Untersuchung des Grenzwertbegriffs müssen wir als Erstes exakt definieren, was wir damit meinen, dass sich eine (unendlich lange) Folge reeller Zahlen einem Wert beliebig genau annähert.

Definition 5.1 (Folgen und Grenzwerte)**.**

(a) Eine **Folge** in einer Menge M ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \to M,\ \ n \mapsto a_n.$$

Man schreibt eine solche Folge als $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, einfach nur als $(a_n)_n$, oder durch Aufzählen der Folgenglieder als $(a_0, a_1, a_2, \dots)$. Hin und wieder ist in der Literatur auch die noch weiter verkürzte Schreibweise (a_n) zu finden, die wir hier allerdings nicht verwenden wollen, um Verwechslungen der Folge $(a_n)_n$ mit einem zufällig eingeklammerten Folgenglied a_n zu vermeiden.

Manchmal ist es bequem, Folgen nicht beim Index 0, sondern bei einem anderen Startindex $n_0 \in \mathbb{Z}$ beginnen zu lassen – wenn man dies in der Notation deutlich machen möchte, schreibt man derartige Folgen als $(a_n)_{n\geq n_0}$.

In diesem Kapitel werden wir nur den Fall $M = \mathbb{R}$, also sogenannte *reelle Folgen* betrachten. Wir werden daher oft nur von einer Folge sprechen und damit dann immer eine reelle Folge meinen. Später werden wir auch noch andere Folgen kennenlernen, z. B. Folgen komplexer Zahlen in Abschnitt **??** oder Folgen von Funktionen in Abschnitt **??**.

(b) Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Grenzwert** einer (reellen) Folge $(a_n)_n$, wenn

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

Wir werden gleich in Lemma 5.5 sehen, dass eine Folge höchstens einen solchen Grenzwert besitzen kann. Wenn ein solches a existiert, können wir also sagen, dass *a der* Grenzwert der Folge $(a_n)_n$ ist. Man nennt die Folge in diesem Fall **konvergent** (gegen a) und schreibt dies als

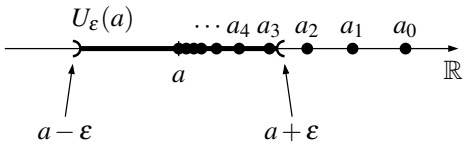
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

(die Bezeichnung kommt vom englischen Wort „limit“ bzw. dem lateinischen „limes“), oder manchmal auch als $a_n \to a$ (für $n \to \infty$). Existiert ein solcher Grenzwert nicht, so heißt die Folge **divergent**.

Bemerkung 5.2 (Anschauliche Deutung des Grenzwertbegriffs)**.** Um die Definition des Grenzwertes in leicht verständliche Worte zu fassen, führen wir ein paar intuitive Notationen ein. Für $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ heißt das offene Intervall

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

die **ε-Umgebung** von a. Die Grenzwertbedingung besagt nun genau, dass in jeder solchen ε-Umgebung von a – egal wie klein das ε gewählt ist – alle Folgenglieder ab einem gewissen n_0 liegen, wobei dieses n_0 natürlich von dem gewählten ε abhängen darf. Im Beispielbild unten wäre das z. B. für $n_0 = 3$ der Fall, denn $a_3, a_4, a_5, \dots$ liegen alle in $U_\varepsilon(a)$.



Man kann diese Tatsache auch so ausdrücken, dass in jeder ε-Umgebung *alle bis auf endlich viele* Folgenglieder liegen müssen (nämlich alle bis auf evtl. $a_0, \dots, a_{n_0-1}$). In der Analysis verwendet man gerne die Sprechweise „**fast alle**“ für „alle bis auf endlich viele“, und kann damit die Grenzwertbedingung auch in Worten formulieren:

Eine Zahl a ist genau dann Grenzwert einer Folge, wenn in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder liegen.

Anschaulich bedeutet das natürlich einfach, dass sich die Folgenglieder beliebig dicht dem Grenzwert annähern. Beachte auch, dass dies insbesondere bedeutet, dass das Abändern oder Weglassen endlich vieler Folgenglieder nichts daran ändert, ob und gegen welchen Grenzwert eine Folge konvergiert. Der Startindex einer Folge wie in Definition 5.1 (a) ist für ihre Konvergenz also irrelevant.

Beispiel 5.3. Hier sind ein paar sehr wichtige Beispiele von Grenzwerten:

(a) Es ist offensichtlich, dass eine konstante Folge, in der alle Folgenglieder den gleichen Wert $a \in \mathbb{R}$ haben, gegen eben dieses a konvergiert, d. h. dass $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$ gilt: Hier liegen ja sogar *alle* Folgenglieder in jeder beliebigen ε-Umgebung von a.

(b) Wir behaupten, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ gilt.

Um dies mit Hilfe der Definition 5.1 (b) zu beweisen, sei zunächst ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig vorgegeben; wir müssen zeigen, dass fast alle Glieder der Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ in der ε-Umgebung von 0 liegen. Dies ist aber sehr einfach: Nach der archimedischen Ordnung von $\mathbb{R}$ wie in Bemerkung 4.31 (a) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Mit einem solchen n_0 gilt dann für alle $n \geq n_0$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

wobei wir die Rechenregeln für Ungleichungen aus Lemma 4.16 verwendet haben. Fast alle Folgenglieder, nämlich alle $\frac{1}{n}$ für $n \geq n_0$, liegen also in der ε-Umgebung von 0. Damit gilt nach Definition $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Beachte, dass wir hierbei zu unserem ε gar kein *konkretes* n_0 angegeben haben, das die Grenzwertbedingung erfüllt. Wir hätten dies hier leicht tun können, z. B.

$$n_0 := \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right\rfloor$$

mit der Gaußklammer aus Bemerkung 4.34, denn dann ist n_0 eine natürliche Zahl größer als $\frac{1}{\varepsilon}$, und damit wie oben $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Aber zur Überprüfung der Grenzwertbedingung ist es nicht nötig, ein konkretes n_0 anzugeben – erst recht nicht das *kleinste* (also „beste“) mögliche n_0. In der Tat wäre eine solche Bestimmung des kleinstmöglichen n_0 für die allermeisten Folgen auch sehr aufwendig oder sogar gar nicht praktisch durchführbar.

(c) (**Geometrische Folge**) Es sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$; wir behaupten, dass dann $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ gilt.

Für $q = 0$ ist dies natürlich klar, da wir dann eine ab dem ersten Glied konstante Folge haben. Ansonsten sei wie in (b) wieder $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig vorgegeben. Wir setzen $x := \frac{1}{|q|} - 1$, also $|q| = \frac{1}{1+x}$; wegen $|q| < 1$ ist natürlich $x > 0$. Nach Bemerkung 4.31 (a) gibt es nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$

mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon x$. Es gilt dann für alle $n \geq n_0$

$$
\begin{aligned}
|q^n - 0| = |q|^n &\overset{(1)}{=} \frac{1}{(1+x)^n} \\
&\overset{(2)}{\leq} \frac{1}{1+nx} && \text{(mit } x > 0 \text{ nach der Bernoulli-Ungleichung aus Satz 4.20)} \\
&\overset{(3)}{<} \frac{1}{nx} && \text{(wegen } 1 > 0\text{)} \\
&\overset{(4)}{\leq} \frac{1}{n_0 x} && \text{(wegen } n \geq n_0\text{)} \\
&\overset{(5)}{<} \varepsilon, && \left(\text{wegen } \frac{1}{n_0} < \varepsilon x\right)
\end{aligned}
$$

woraus die Behauptung folgt.

Bemerkung 5.4 (Rückwärtsrechnen)**.** Wenn ihr euch die Rechnung in Beispiel 5.3 (c) angeschaut habt, werdet ihr vermutlich keine Probleme haben, sie nachzuvollziehen – aber euch sicher auch fragen, wie ihr darauf jemals selbst hättet kommen sollen. Insbesondere die Festlegungen von x und n_0 vor Beginn der Rechnung fallen ja doch sehr vom Himmel.

Die Antwort hierauf ist einfach, dass ich den Beweis zunächst „rückwärts“ durchgeführt habe, bevor ich angefangen habe, ihn aufzuschreiben. Ich habe also mit der Rechnung oben begonnen, bevor ich wusste, was z. B. n_0 später einmal sein würde, und mir etwa folgendes gedacht:

> *Okay, wir müssen sehen, dass $|q^n|$ für $n \to \infty$ kleiner als das gegebene ε wird. Nehmen wir der Einfachheit halber erst einmal $q > 0$ an, dann müssen wir also eine Ungleichungskette $q^n < \cdots < \varepsilon$ finden. Bisher wissen wir nichts darüber, wie sich Potenzen mit wachsendem Exponenten verhalten … aber wir hatten die Bernoulli-Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx$ gezeigt, die Potenzen durch lineare Funktionen abschätzen kann. Um die anwenden zu können, könnten wir vielleicht $q = 1+x$ setzen? Nein, das hilft nicht, denn dann würde die Ungleichung $q^n = (1+x)^n \geq 1+nx$ ja in die falsche Richtung gehen. Also versuchen wir lieber $q = \frac{1}{1+x}$, das dreht „$\geq$“ zu „$\leq$“ um. Moment, gibt es so ein x überhaupt und erfüllt das die Voraussetzungen der Bernoulli-Ungleichung? Ja, die Gleichung ist ja äquivalent zu $x = \frac{1}{q} - 1$, und es ist $q < 1$, also $x > 0$, das passt. Damit haben wir die Schritte (1) und (2) oben.*
>
> *Jetzt müssen wir also $\frac{1}{1+nx}$ weiter abschätzen und sehen, warum dieser Term gegen 0 geht. Die 1 im Nenner stört. Wir könnten sicher auch mit ihr weiter rechnen, aber einfacher wäre der Ausdruck ohne sie. Es ist ja auch $\frac{1}{1+nx} < \frac{1}{nx}$, d. h. die Abschätzung geht in die richtige Richtung, und der neue Ausdruck $\frac{1}{nx}$ geht immer noch gegen 0. Also lassen wir die 1 in (3) einfach weg. Wie wir jetzt weiter machen können, wissen wir aus Beispiel 5.3 (b): Ist nun $n \geq n_0$ und $\frac{1}{n_0} < \varepsilon x$, so erhalten wir in (4) und (5) die gewünschte Abschätzung.*

Nachdem wir diese Überlegungen durchgeführt haben, können wir schließlich noch die Beträge wieder einarbeiten und den Beweis dann so aufschreiben wie oben.

Beachte, dass es natürlich viele verschiedene Arten gibt, derartige Abschätzungen durchzuführen. Aber nicht jede Abschätzung, die richtig ist, ist auch zielführend: So hätten wir z. B. in (3) oben auch versuchen können, den Term nx wegzulassen und die Abschätzung mit $\frac{1}{1+nx} < \frac{1}{1}$ fortzusetzen. Diese Ungleichung ist genauso richtig wie (3), aber der neue Ausdruck $\frac{1}{1} = 1$ geht offensichtlich mit $n \to \infty$ nicht mehr gegen 0, so dass wir die gewünschte Folgerung $\cdots < \varepsilon$ jetzt nicht mehr erreichen können. Man muss beim Abschätzen also stets einen geeigneten Mittelweg finden und aufpassen, dass man weder zu wenig noch zu viel abschätzt. Dadurch erfordern derartige Rechnungen oft eine geschickte und vielleicht nicht ganz offensichtliche Idee. Am Anfang ist das sicher ungewohnt, aber im Laufe der Zeit werdet ihr ein gewisses Gefühl dafür entwickeln, welche Art von Abschätzung in welchen Fällen sinnvoll sein könnte. Aber so oder so – für das reine *Nachvollziehen* einer Abschätzung, die jemand anders gefunden hat (wie z. B. wenn ihr den Beweis in Beispiel 5.3 (c) lest und verstehen wollt), sind solche Ideen natürlich nicht notwendig.

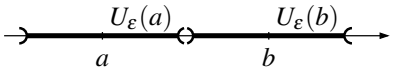
08

Wir wollen nun die bereits in Definition 5.1 versprochene Aussage beweisen, dass der Grenzwert einer Folge (sofern er existiert) immer eindeutig ist. Anschaulich ist diese Aussage natürlich sofort einleuchtend: Es können nicht fast alle Folgenglieder beliebig nahe an zwei verschiedenen Zahlen liegen. Denn wenn wir disjunkte ε-Umgebungen der beiden Grenzwerte wählen, kann jedes Folgenglied natürlich immer nur in einer der beiden Umgebungen liegen – und somit können nicht fast alle in *beiden* Umgebungen liegen. Formal aufgeschrieben sieht diese Beweisidee so aus:

Lemma 5.5 (Eindeutigkeit des Grenzwerts)**.** *Jede Folge hat höchstens einen Grenzwert.*

Beweis. Angenommen, die Aussage wäre falsch, d. h. es gäbe eine Folge $(a_n)_n$ mit $a_n \to a$ und $a_n \to b$ für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$.

Wählen wir dann $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2}$ als den halben Abstand zwischen a und b, so gilt wie im Bild rechts $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$, denn aus $x \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)$ würde mit der Dreiecksungleichung der Widerspruch



$$|a-b| = |a-x+x-b| \leq |a-x| + |x-b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a-b|$$

folgen.

Aber wegen $a_n \to a$ gilt $a_n \in U_\varepsilon(a)$ für fast alle n (also für alle $n \geq n_1$ mit einem gewissen $n_1 \in \mathbb{N}$), und wegen $a_n \to b$ genauso $a_n \in U_\varepsilon(b)$ für fast alle n (also für alle $n \geq n_2$ mit einem gewissen $n_2 \in \mathbb{N}$). Damit folgt auch $a_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)$ für fast alle n (nämlich für alle n, bei denen beide Aussagen gelten, also für $n \geq \max(n_1, n_2)$), was ein Widerspruch zu $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ ist und somit das Lemma beweist. □

Bemerkung 5.6. Wir sehen im Beweis von Lemma 5.5, dass die „fast alle"-Notation den Vorteil hat, dass wir uns oft das explizite Arbeiten mit dem n_0 aus Definition 5.1 (b) (von dem wir ja meistens ohnehin nicht wirklich wissen müssen, welchen Wert es genau hat) sparen können. Die einzige Eigenschaft, die wir hier wirklich gebraucht haben, ist die: Wenn eine Aussage $A(n)$ für fast alle n gilt, und eine weitere Aussage $B(n)$ ebenfalls für fast alle (aber nicht notwendig für die gleichen), dann gelten auch $A(n)$ und $B(n)$ zusammen für fast alle n – nämlich für alle bis auf die endlich vielen Ausnahmen für $A(n)$ und $B(n)$.

Natürlich gibt es auch Folgen ohne Grenzwert. Die einfachste Möglichkeit dafür ist, dass ihre Glieder unbeschränkt wachsen und sich somit keiner Zahl annähern können. Dies wollen wir jetzt formal untersuchen.

Definition 5.7 (Beschränkte Folgen)**.** Eine Folge $(a_n)_n$ heißt **beschränkt**, wenn die Menge ihrer Folgenglieder beschränkt ist, also wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit $|a_n| \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 5.8. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Es sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein n_0, so dass $|a_n - a| < \varepsilon = 1$ und damit nach der Dreiecksungleichung auch

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

für alle $n \geq n_0$ gilt. Damit ist dann aber $|a_n| \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn wir

$$s := \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a|)$$

setzen. Also ist $(a_n)_n$ beschränkt. □

Beispiel 5.9.

(a) Die Folge

$$(a_n)_n = (1, 0, 2, 0, 3, 0, \dots)$$

ist unbeschränkt (da die Menge $\mathbb{N}$ ihrer Folgenglieder nach Satz 4.30 unbeschränkt ist) und damit nach Lemma 5.8 divergent.

(b) Auch die geometrische Folge $(q^n)_n$ aus Beispiel 5.3 (c) ist für $|q| > 1$ unbeschränkt und damit divergent: Ist nämlich $s \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig, so können wir nach der archimedischen Ordnung von $\mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ wählen mit $n > \frac{s}{|q|-1}$, und erhalten mit der Bernoulli-Ungleichung

$$|q|^n = (1+|q|-1)^n \overset{4.20}{\geq} 1+n(|q|-1) > n(|q|-1) > s.$$

Wie rechnet man nun aber Grenzwerte konkret aus, wenn man nicht jedes Mal wieder auf die Definition zurückgehen möchte? Glücklicherweise gibt es dafür die Grenzwertsätze, die besagen, dass man Grenzwerte mit Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten vertauschen kann, und die damit oft eine konkrete Berechnung ermöglichen. Zum Beweis dieser Aussage benötigen wir zunächst ein Lemma.

Definition 5.10 (Nullfolgen)**.** Eine Folge heißt **Nullfolge**, wenn sie gegen 0 konvergiert. Offensichtlich konvergiert eine Folge $(a_n)_n$ damit nach Definition genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn $(a_n - a)_n$ eine Nullfolge ist.

Lemma 5.11. *Ist $(a_n)_n$ eine beschränkte Folge und $(b_n)_n$ eine Nullfolge, so ist auch $(a_n b_n)_n$ eine Nullfolge.*

Beweis. Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Da $(a_n)_n$ beschränkt ist, gilt $|a_n| \leq s$ für ein $s \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Da $(b_n)_n$ eine Nullfolge ist, ist weiterhin $|b_n| < \frac{\varepsilon}{s}$ für fast alle n. Also gilt für fast alle n auch die Abschätzung $|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < s \cdot \frac{\varepsilon}{s} = \varepsilon$, d. h. $(a_n b_n)_n$ ist eine Nullfolge. □

Bemerkung 5.12 (Folgen mit Grenzwert ungleich 0)**.** Es sei $(a_n)_n$ eine Folge, die gegen einen Grenzwert $a \neq 0$ konvergiert. Eine unmittelbare, aber dennoch oft nützliche Folgerung aus der Grenzwertdefinition 5.1 ergibt sich, wenn wir dort $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$ setzen: Für fast alle n ist dann $a_n \in U_\varepsilon(a)$, mit der Dreiecksungleichung nach unten aus Bemerkung 4.19 also

$$|a_n| = |a-(a-a_n)| \geq |a| - |a-a_n| > |a| - \varepsilon = \frac{|a|}{2}.$$

Hat eine Folge also einen Grenzwert $a \neq 0$, so sind insbesondere auch fast alle Folgenglieder ungleich 0 (und betragsmäßig sogar größer als $\frac{|a|}{2}$).

Satz 5.13 (**Grenzwertsätze** für Folgen)**.** *Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei konvergente Folgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann gilt:*

(a) *$a_n + b_n \to a + b$ und $a_n - b_n \to a - b$.*

(b) *$a_n b_n \to a b$.*

(c) *Ist $b \neq 0$, so sind auch fast alle $b_n \neq 0$, und es gilt $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.*

Beweis.

(a) Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Wegen $a_n \to a$ und $b_n \to b$ gilt $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für fast alle n. Damit folgt für fast alle n (siehe Bemerkung 5.6) mit der Dreiecksungleichung

$$|a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also wie behauptet $a_n + b_n \to a + b$. Die Aussage über die Differenz der Grenzwerte folgt natürlich genauso.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt zunächst

$$a_n b_n - ab = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n(b_n - b) + b(a_n - a). \tag{1}$$

Die Folge $(a_n)_n$ ist nach Voraussetzung konvergent und damit beschränkt nach Lemma 5.8. Weiterhin ist $(b_n - b)_n$ eine Nullfolge wegen $b_n \to b$. Also ist auch $(a_n(b_n - b))_n$, d. h. der erste Summand rechts in (1), nach Lemma 5.11 eine Nullfolge. Genauso ergibt sich, dass auch der zweite Summand $(b(a_n - a))_n$ eine Nullfolge ist. Damit ist (1) die Summe zweier Nullfolgen, nach (a) also ebenfalls eine Nullfolge. Dies zeigt $a_n b_n - ab \to 0$ und damit $a_n b_n \to ab$.

(c) Nach Bemerkung 5.12 sind mit $b \neq 0$ auch fast alle b_n ungleich 0, so dass wir (nach evtl. Weglassen endlich vieler Glieder) die Quotientenfolge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$ betrachten können. Dabei genügt es, den Grenzwert $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ mit konstantem Zähler 1 zu zeigen, da wir diese Aussage dann nach (b) mit $a_n \to a$ multiplizieren können. Wir rechnen nun analog zu (b)

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b_n b}(b - b_n). \tag{2}$$

Dabei ist $\left(\frac{1}{b_n b}\right)_n$ beschränkt, denn nach Bemerkung 5.12 ist $\left|\frac{1}{b_n b}\right| \leq \frac{2}{|b|} \cdot \frac{1}{|b|}$. Mit $(b - b_n)_n$ ist also nach Lemma 5.11 auch (2) eine Nullfolge, d. h. es gilt wie behauptet $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$. □

Beispiel 5.14 (Grenzwerte von Quotienten von Polynomen)**.** Wollen wir den Grenzwert der Folge $\left(\frac{2n^2}{n^2+1}\right)_n$ bestimmen, so können wir nicht direkt die Grenzwertsätze anwenden, da Zähler und Nenner natürlich unbeschränkt sind und damit nach Lemma 5.8 divergieren. Durch Kürzen mit n^2 können wir die Folgenglieder aber umschreiben, so dass wir den Grenzwert dann mit Satz 5.13 in den Quotienten, die Summe und das Produkt hineinziehen können und (mit Beispiel 5.3)

$$\frac{2n^2}{n^2+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}} \to \frac{2}{1+0\cdot 0} = 2 \quad \text{für } n \to \infty$$

erhalten. Auf die gleiche Art kann man offensichtlich den Grenzwert jeder Folge berechnen, die ein Quotient von zwei Polynomfunktionen in n ist, indem man zuerst mit der höchsten auftretenden Potenz von n kürzt.

Bemerkung 5.15. Beachte, dass Satz 5.13 nur angewendet werden kann, wenn beide Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ existieren – ansonsten macht der Satz keine Aussage. Eine Rechnung hinzuschreiben wie z. B.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+3} \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}} = 1 \cdot 1 = 1$$

(mit Verweis an der Stelle $(*)$ auf den Grenzwertsatz 5.13 (b)) ist daher eigentlich *nicht korrekt*, da wir bei $(*)$ ja noch nicht überprüft haben, ob die Grenzwerte der beiden einzelnen Brüche auch wirklich existieren. Man müsste also theoretisch zuerst die Grenzwerte von $\frac{n}{n+1}$ und $\frac{n+2}{n+3}$ separat berechnen (bzw. ihre Existenz zeigen), und könnte dann erst die obige Rechnung $(*)$ hinschreiben. Da dies aber deutlich mehr Schreibaufwand wäre und die Darstellung auch unübersichtlicher machen würde, wollen wir vereinbaren, dass wir die Grenzwertsätze in einer Rechnung wie oben auch schon benutzen dürfen, wenn wir erst *nachträglich* überprüfen, dass die Einzelgrenzwerte existieren.

Aufgabe 5.16. Bestimme die Grenzwerte (sofern sie existieren)

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n^2+n}, \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\binom{n}{3}}, \qquad \text{(c)} \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^3}.$$

Für (a) beweise man diesen Grenzwert zusätzlich direkt nach Definition, d. h. man gebe zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ an, so dass die Grenzwertbedingung aus Definition 5.1 (b) gilt.

Aufgabe 5.17. Zu einer gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ definieren wir die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ ihrer Mittelwerte durch

$$b_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Man zeige: Ist $(a_n)_n$ konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, so ist auch $(b_n)_n$ konvergent mit demselben Grenzwert a. (Hinweis: Zur Vereinfachung der Rechnung ist es nützlich, die Aussage zunächst für eine Nullfolge $(a_n)_n$ zu beweisen, und den allgemeinen Fall dann darauf zurückzuführen.)

Als Beispiele für divergente Folgen haben wir bisher nur unbeschränkte Folgen gesehen. Aber auch beschränkte Folgen können natürlich divergent sein, wie z. B. die Folge

$$\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, \ldots),$$

in der alle geraden Folgenglieder gleich 1 und alle ungeraden gleich -1 sind, so dass für die gesamte Folge kein Grenzwert existieren kann. Formal können wir dies mit dem Begriff der Teilfolgen und Häufungspunkte ausdrücken.

Definition 5.18 (Umordnungen, Teilfolgen und Häufungspunkte)**.** Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

(a) Eine **Umordnung** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge der Form $(a_{\sigma(0)}, a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots) = (a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ für eine bijektive Abbildung $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Sie entsteht also einfach durch eine beliebige Permutation aller Folgenglieder.

(b) Eine **Teilfolge** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge der Form $(a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots) = (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ für gewisse $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$, also eine Folge, die aus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch Auswählen bestimmter Folgenglieder unter Beibehaltung ihrer Reihenfolge entsteht.

(c) Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen a konvergiert.

Lemma 5.19 (Grenzwerte von Umordnungen und Teilfolgen)**.** *Konvergiert eine Folge $(a_n)_n$ gegen einen Grenzwert a, so konvergiert auch jede Umordnung und jede Teilfolge von $(a_n)_n$ gegen a.*

Insbesondere hat eine konvergente Folge also genau einen Häufungspunkt, nämlich ihren Grenzwert.

Beweis. Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Da die Folge $(a_n)_n$ gegen a konvergiert, hat sie nur endlich viele Glieder, die außerhalb von $U_\varepsilon(a)$ liegen. Jede Umordnung oder Teilfolge von $(a_n)_n$ hat damit aber ebenfalls nur endlich viele Glieder außerhalb von $U_\varepsilon(a)$, und somit konvergiert eine solche Umordnung oder Teilfolge ebenfalls gegen a. □

09

Beispiel 5.20.

(a) Die oben betrachtete Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, \dots)$ besitzt die beiden konstanten Teilfolgen

$$(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 1, \dots)$$
$$\text{und} \qquad (a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (-1, -1, -1, \dots)$$

und damit die beiden Häufungspunkte 1 und -1. Sie ist also nach Lemma 5.19 divergent. In der Tat werden wir in Beispiel 5.23 (a) sehen, dass 1 und -1 auch die einzigen Häufungspunkte von $(a_n)_n$ sind.

(b) Für die Folge $(a_n)_n = (n+1)_n = (1, 2, 3, \dots)$ ist jede ihrer Teilfolgen unbeschränkt und damit nach Lemma 5.8 divergent. Also besitzt $(a_n)_n$ keine Häufungspunkte.

Zur konkreten Berechnung von Häufungspunkten sind oft die folgenden beiden Lemmata nützlich.

Lemma 5.21 (Äquivalente Charakterisierung von Häufungspunkten)**.** *Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_n$, wenn in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder a_n liegen.*

Beweis.

„⇒“: Konvergiert eine Teilfolge von $(a_n)_n$ gegen a, so liegen in jeder ε-Umgebung von a fast alle Glieder der Teilfolge und somit insbesondere auch unendlich viele Glieder von $(a_n)_n$.

„⇐“: Wir konstruieren eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ der gewünschten Art wie folgt: Als Startindex nehmen wir $n_0 = 0$. Ist nun für ein $k \in \mathbb{N}_{>0}$ der Index n_{k-1} bereits konstruiert, so wählen wir für das nächste Folgenglied ein $n_k > n_{k-1}$ mit $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$ (dies ist möglich, da in der $\frac{1}{k}$-Umgebung von a nach Voraussetzung unendlich viele Folgenglieder liegen, also auch eines hinter $a_{n_{k-1}}$).

Die so konstruierte Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert dann gegen a: Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben und $k_0 \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$, so ist $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k_0} < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$. □

Lemma 5.22 (Mischfolgen)**.** *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge sowie $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ zwei Teilfolgen, die zusammen die gesamte Folge ergeben, also so dass $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{m_k : k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ gilt. Man sagt in diesem Fall auch, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine **Mischfolge** von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist.*

Dann ist eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ genau dann ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn a ein Häufungspunkt von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ oder $(a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist.

Beweis. Eine Zahl a ist nach Lemma 5.21 genau dann ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$, wenn in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_n$ liegen. Da $(a_n)_n$ eine Mischfolge von $(a_{n_k})_k$ und $(a_{m_k})_k$ ist, ist dies natürlich äquivalent dazu, dass in jeder solchen ε-Umgebung unendlich viele Folgenglieder von $(a_{n_k})_k$ oder $(a_{m_k})_k$ liegen, also dass a ein Häufungspunkt (mindestens) einer dieser beiden Teilfolgen ist. □

Beispiel 5.23.

(a) Die Folge $(a_n)_n = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Beispiel 5.20 (a) ist eine Mischfolge ihrer positiven und negativen Glieder, die konstant gleich 1 bzw. -1 sind. Aus Lemma 5.22 folgt also, dass $(a_n)_n$ genau die beiden Häufungspunkte 1 und -1 hat.

(b) Die divergente Folge $(a_n)_n = (1,0,2,0,3,0,\dots)$ aus Beispiel 5.9 (a) ist eine Mischfolge der Folge $(1,2,3,\dots)$ (die nach Beispiel 5.20 (b) keine Häufungspunkte hat) und der konstanten Folge 0 (die natürlich 0 als einzigen Häufungspunkt hat). Damit hat $(a_n)_n$ nach Lemma 5.22 den einzigen Häufungspunkt 0. Wir sehen also (im Gegensatz zu Lemma 5.19), dass eine Folge mit genau einem Häufungspunkt nicht notwendig konvergiert.

5.B Konvergenzkriterien für Folgen

Nicht in allen Fällen lässt sich die Berechnung von Grenzwerten mit Hilfe der Grenzwertsätze auf bereits bekannte zurückführen. Wir benötigen daher noch weitere Techniken zur Grenzwertbestimmung und beginnen mit einem einfachen Vergleichskriterium.

Satz 5.24 (Verträglichkeit des Grenzwerts mit Ungleichungen)**.** *Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente Folgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann gilt:*

(a) *Ist $a_n \leq b_n$ für fast alle n, so auch $a \leq b$.*

(b) *(**Einschachtelungssatz**) Ist $a = b$, konvergieren also beide Folgen gegen denselben Grenzwert, und ist $(c_n)_n$ eine weitere reelle Folge mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle n, so konvergiert auch $(c_n)_n$ gegen diesen Grenzwert a.*

Beweis.

(a) Angenommen, es wäre $a > b$. Wir setzen $\varepsilon := \frac{a-b}{2}$. Wegen $a_n \to a$ und $b_n \to b$ wäre dann (nach Bemerkung 5.6) für fast alle n

$$a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \quad \text{und} \quad b_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon).$$

Zusammensetzen liefert $a-\varepsilon < a_n \leq b_n < b+\varepsilon$ für fast alle n, und damit $a-b < 2\varepsilon$ im Widerspruch zu $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$.

(b) Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Diesmal gilt wegen $a_n \to a$ und $b_n \to a$ für fast alle n

$$a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \quad \text{und} \quad b_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon),$$

und damit $a-\varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a+\varepsilon$, also $c_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt daraus wie behauptet $c_n \to a$. □

Bemerkung 5.25. Beachte, dass Satz 5.24 (a) *nicht* auch analog für die echte Ungleichung „$<$“ gilt: Ist z. B. $a_n = 0$ und $b_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$, so gilt zwar $a_n < b_n$ für alle n, aber die Grenzwerte beider Folgen sind natürlich gleich 0, d. h. es gilt nur $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ gemäß Satz 5.24 (a), aber nicht $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

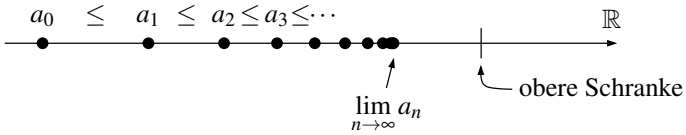
Aufgabe 5.26. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

Alle unsere bisherigen Kriterien haben den entscheidenden Nachteil, dass sie Grenzwerte nur auf andere bereits bekannte zurückführen können. In der Praxis werden aber viele Größen wie z. B. Quadratwurzeln, π, e oder der Sinus und Kosinus einer gegebenen Zahl überhaupt erst als Grenzwerte geeigneter Folgen konstruiert. Die Konvergenz solcher Folgen werden wir also mit unseren bisherigen Methoden nie nachweisen können.

Wir benötigen daher auch Kriterien, mit denen man die Konvergenz einer Folge selbst dann nachweisen kann, wenn man ihren Grenzwert noch nicht vorher kennt oder gleichzeitig aus bereits bekannten anderen Grenzwerten berechnen kann. Im Gegensatz zu unseren Ergebnissen aus Abschnitt 5.A, die unverändert auch in $\mathbb{Q}$ gelten würden, handelt es sich hierbei nun um Resultate, die ganz zentral das Supremumsaxiom verwenden und daher nur in $\mathbb{R}$ gelten.

Das erste Kriterium dieser Art, das wir jetzt behandeln wollen, ist für Folgen anwendbar, deren Folgenglieder mit wachsendem n immer größer werden. Ist eine solche Folge nach oben beschränkt, so ist anschaulich klar, dass die Folgenglieder wie im Bild unten für wachsendes n „immer näher zusammen rücken“ müssen, was letztlich zur Konvergenz der Folge führen sollte. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.



Definition 5.27 (Monotone und beschränkte Folgen)**.** Es sei $(a_n)_n$ eine Folge.

(a) Die Folge $(a_n)_n$ heißt **monoton wachsend** oder **steigend**, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ und damit $a_m \leq a_n$ für alle $m \leq n$ gilt. Gilt sogar $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt $(a_n)_n$ **streng monoton wachsend** oder **steigend**.

Analog heißt $(a_n)_n$ **(streng) monoton fallend**, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ (bzw. $a_n > a_{n+1}$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Analog zu Definition 5.7 heißt $(a_n)_n$ **nach oben beschränkt**, wenn die Menge ihrer Folgenglieder nach oben beschränkt ist, also wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq s$ für alle n.

Analog heißt $(a_n)_n$ **nach unten beschränkt**, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \geq s$ für alle n; die Folge ist also genau dann beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Satz 5.28 (**Monotoniekriterium**)**.** *Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ ist konvergent. (Analog ist dann natürlich auch jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge konvergent.)*

Beweis. Da die Menge $M := \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ aller Folgenglieder nicht leer und nach oben beschränkt ist, existiert $a := \sup M$ nach dem Supremumsaxiom. Wir behaupten, dass $a_n \to a$.

Es sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Da a die kleinste obere Schranke für M ist, ist $a-\varepsilon$ keine obere Schranke mehr. Es gibt also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > a-\varepsilon$. Für alle $n \geq n_0$ folgt dann

$$\begin{aligned} a-\varepsilon < a_{n_0} &\leq a_n && \text{(Monotonie)} \\ &\leq a && (a \text{ ist obere Schranke der Folgenglieder}) \\ &< a+\varepsilon, \end{aligned}$$

also $|a_n - a| < \varepsilon$. Damit konvergiert $(a_n)_n$ gegen a. □

Als Beispiel für die Anwendung des Monotoniekriteriums wollen wir nun als Erstes zeigen, dass jede nicht-negative reelle Zahl eine Quadratwurzel besitzt. Auch wenn euch diese Tatsache aus der Schule vielleicht „offensichtlich“ erscheint (und wir sie in Bemerkung 4.37 auch schon ohne Beweis

benutzt haben), folgt sie dennoch nicht unmittelbar aus den Axiomen für $\mathbb{R}$ und muss damit bewiesen werden. Eine Möglichkeit dafür ist nun, eine Folge $(a_n)_n$ zu konstruieren, deren Konvergenz wir beweisen können, und deren Grenzwert nur die gewünschte Wurzel sein kann. Die Konstruktion von $(a_n)_n$ ist dabei wie im Beweis der Rückrichtung von Lemma 5.21 *rekursiv*, d. h. wir können (analog zur vollständigen Induktion) nicht direkt a_n für alle $n \in \mathbb{N}$ angeben, sondern legen nur das erste Folgenglied a_0 fest und geben dann eine Formel an, mit der für alle $n \in \mathbb{N}$ aus a_n das nächste Folgenglied a_{n+1} berechnet werden kann.

Lemma 5.29 (Existenz von Wurzeln, *Heron-Verfahren*)**.** *Es seien $c \in \mathbb{R}_{>0}$ und $a_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben. Dann konvergiert die mit diesem Startwert a_0 rekursiv definierte Folge $(a_n)_n$ mit*

$$a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{$*$}$$

gegen ein $a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $a^2 = c$.

Beweis. Wir zeigen die Konvergenz von $(a_n)_n$ mit dem Monotoniekriterium, indem wir nachweisen, dass die Folge nach unten beschränkt und monoton fallend ist.

Aus der Rekursionsvorschrift $(*)$ ist offensichtlich, dass mit c und a_0 auch alle Folgenglieder positiv sind. Die Folge ist also sicher durch 0 nach unten beschränkt. In der Tat gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ sogar

$$a_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)^2 = \frac{1}{4}a_n^2 + \frac{1}{2}c + \frac{1}{4}\frac{c^2}{a_n^2} = \frac{1}{4}a_n^2 - \frac{1}{2}c + \frac{1}{4}\frac{c^2}{a_n^2} + c = \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{c}{a_n}\right)^2 + c \geq c$$

und somit $a_n^2 \geq c$ für alle $n \geq 1$. Daraus folgt für alle $n \geq 1$ aber auch

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c}{a_n^2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c}{c}\right) = 1,$$

und damit $a_{n+1} \leq a_n$, die Folge ist also (mit Ausnahme evtl. des ersten Folgengliedes) monoton fallend. Damit konvergiert $(a_n)_n$ nach Satz 5.28, d. h. der Grenzwert $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert.

Um Informationen über den Grenzwert a zu bekommen, multiplizieren wir die Rekursionsgleichung $(*)$ zunächst mit a_n und erhalten $a_{n+1}a_n = \frac{1}{2}(a_n^2 + c)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gehen wir in dieser Gleichung nun zum Grenzwert über, so ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n^2 + c\right), \quad \text{und damit} \quad a^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + c\right),$$

da die Folge $(a_{n+1})_n = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ gegenüber $(a_n)_n = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ ja nur um ein Folgenglied verschoben ist und somit als Teilfolge von $(a_n)_n$ ebenfalls gegen a konvergiert. Auflösen dieser Gleichung liefert nun sofort wie behauptet $a^2 = c$. Da alle a_n positiv sind, ergibt Satz 5.24 (a) außerdem auch $a \geq 0$; in der Tat ist wegen $a^2 = c > 0$ dann sogar $a > 0$. □

Folgerung und Definition 5.30. *Zu jedem $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a^2 = c$. Wir nennen sie die **(Quadrat-)Wurzel** aus c und schreiben sie als $\sqrt{c}$.*

Beweis. Für $c = 0$ ist die Aussage mit $a = 0$ klar, daher können wir im Folgenden $c > 0$ annehmen. Die Existenz einer Wurzel a folgt dann direkt aus Lemma 5.29. Das Polynom $x \mapsto x^2 - c$ hat nun die positive Nullstelle a und die negative Nullstelle $-a$, und kann als Polynom vom Grad 2 nach Satz 3.19 (b) keine weiteren Nullstellen haben. Also ist die Wurzel a auch eindeutig bestimmt. □

Bemerkung 5.31 (Grenzwert rekursiver Folgen)**.** Das Monotoniekriterium bietet sich oft für rekursiv definierte Folgen $(a_n)_n$ wie in Lemma 5.29 an, da die Monotonie ja durch den Vergleich von a_{n+1} und a_n nachgewiesen werden kann. Sehr nützlich ist dabei auch der Trick, wie im Beweis des Lemmas in der Rekursionsgleichung zum Grenzwert überzugehen, um eine bestimmende Gleichung für den Grenzwert zu finden.

Beispiel 5.32. Die folgende Tabelle zeigt den Anfang der Folge aus Lemma 5.29 im Fall $c = 2$ und $a_0 = 1$. Beachte, dass die Folge „extrem schnell“ konvergiert und daher sehr gut zur näherungsweisen Berechnung von Wurzeln geeignet ist – z. B. wenn man einem Computer, der bisher nur weiß, wie man die vier Grundrechenarten ausführt, das Wurzelziehen beibringen möchte. In der Tat kann

man zeigen, dass jeder Schritt die Anzahl der korrekten Dezimalstellen (die in der Tabelle unten fett gedruckt sind) näherungsweise verdoppelt. Wir werden uns in dieser Vorlesung jedoch nicht weiter mit der „Geschwindigkeit“ der Konvergenz von Folgen beschäftigen; derartige Fragestellungen werdet ihr später in den Vorlesungen zur Praktischen Mathematik untersuchen.

n	a_n
0	**1,**000000000000000000000000000000000000000000000000...
1	**1,**500000000000000000000000000000000000000000000000...
2	**1,41**666666666666666666666666666666666666666666666666...
3	**1,4142**1568627450980392156862745098039215686274509 8...
4	**1,41421356237**468991062629557889013491011655962211 5...
5	**1,41421356237309504880168**962350253024361498192577 6...
6	**1,41421356237309504880168872420969807856967187537 7**...

Aufgabe 5.33. Untersuche, ob die folgenden rekursiv definierten Folgen $(a_n)_n$ konvergieren, und bestimme im Fall der Konvergenz den Grenzwert.

(a) $a_0 = 1$, $a_n = \sqrt{a_{n-1}+6}$ für alle $n \geq 1$;

(b) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2})$ für alle $n \geq 2$.

(Hinweis: Leite zunächst eine Formel für die Differenz $a_n - a_{n-1}$ zweier aufeinander folgender Glieder her.)

Aufgabe 5.34. Es seien $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige, dass die Quadratwurzel die folgenden Eigenschaften hat:

(a) Gilt $a \leq b$, so auch $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ (Monotonie).

(b) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

(c) $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

(d) Konvergiert eine Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ gegen a, so gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Aufgabe 5.35.

(a) Man zeige: Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ und $k, n \in \mathbb{N}$ ist $(a+b\sqrt{k})^n + (a-b\sqrt{k})^n \in \mathbb{Z}$.

(b) Bestimme die 100. Nachkommastelle (im Dezimalsystem) von $(2+\sqrt{5})^{2024}$.

Aufgabe 5.36. Zeige, dass jedes (nicht-leere) offene Intervall in $\mathbb{R}$ unendlich viele rationale und unendlich viele irrationale Zahlen enthält.

Aufgabe 5.37 (Existenz höherer Wurzeln in $\mathbb{R}$)**.** In dieser Aufgabe wollen wir analog zu Lemma 5.29 und Folgerung 5.30 beweisen, dass jede nicht-negative reelle Zahl c für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ eine eindeutige k-te Wurzel besitzt. Wir definieren dazu für ein gegebenes $c \in \mathbb{R}_{>0}$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und einen beliebigen positiven Startwert a_0 die Folge $(a_n)_n$ rekursiv durch

$$a_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)\,a_n + \frac{c}{a_n^{k-1}}\right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Man beweise nun:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_{n+1}^k \geq c$.

(b) Die Folge $(a_n)_n$ ist ab dem zweiten Folgenglied monoton fallend.

(c) Zu jeder Zahl $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt es ein eindeutiges $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a^k = c$. Wir nennen dieses a die k-te **Wurzel** aus c und schreiben sie als $\sqrt[k]{c}$.

Aufgabe 5.38. Es sei $M \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Zeige, dass für $s \in \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $s = \sup M$.

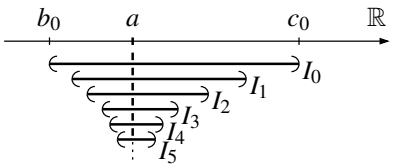
(b) s ist eine obere Schranke für M, und es gibt eine Folge $(a_n)_n$ von Elementen aus M mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s$.

10

Kombiniert man die Monotoniekriterien für wachsende und fallende Folgen miteinander, kann man einen Grenzwert wie folgt von beiden Seiten einschachteln.

Satz 5.39 (Intervallschachtelung). *Gegeben sei für alle $n \in \mathbb{N}$ ein abgeschlossenes Intervall $I_n = [b_n, c_n]$ in $\mathbb{R}$, so dass $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ (also die Intervalle ineinander liegen) und $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n - b_n) = 0$ (also die Längen der Intervalle gegen 0 konvergieren).*

Dann gibt es genau ein $a \in \mathbb{R}$, das in allen diesen Intervallen liegt, und es gilt $b_n \to a$ und $c_n \to a$.



Beweis. Die Folge $(b_n)_n$ der unteren Intervallgrenzen ist monoton wachsend und nach oben beschränkt (z. B. durch c_0), nach dem Monotoniekriterium aus Satz 5.28 also konvergent. Genauso ist $(c_n)_n$ monoton fallend und nach unten beschränkt, und damit ebenfalls konvergent. Da die Längen der Intervalle nach Voraussetzung gegen 0 konvergieren, folgt nach Satz 5.13 also

$$\lim_{n\to\infty} c_n - \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(c_n - b_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Es sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ der gemeinsame Grenzwert dieser beiden Folgen.

Nach dem Beweis von Satz 5.28 ist a eine obere Schranke für alle b_n und eine untere Schranke für alle c_n. Es gilt also $a \in [b_n, c_n] = I_n$ für alle n. Ist umgekehrt $a' \in \mathbb{R}$ mit $a' \in I_n$ und damit $b_n \le a' \le c_n$ für alle n, so folgt daraus durch Grenzwertbildung mit Satz 5.24 auch $a \le a' \le a$, also $a' = a$. Somit gibt es genau eine Zahl in allen gegebenen Intervallen, nämlich a. □

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir analog zu den uneigentlichen Suprema in Bemerkung 4.38 auch *uneigentliche Grenzwerte* definieren, also festlegen, was es heißt, dass eine Folge „den Grenzwert ∞ besitzt“. Dies hat den Vorteil, dass viele Aussagen über konvergente Folgen mit gewöhnlichen Grenzwerten in $\mathbb{R}$ auf diesen Fall verallgemeinert werden können.

Definition 5.40 (Uneigentliche Grenzwerte von Folgen)**.** Für eine Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ schreiben wir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ bzw. $a_n \to \infty$, wenn

$$\forall s \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0 \colon a_n > s,$$

also wenn zu jeder vorgegebenen Schranke s fast alle Folgenglieder größer als s sind. Analog definiert man die Eigenschaft $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Beachte, dass derartige Folgen natürlich insbesondere unbeschränkt und damit nach Lemma 5.8 divergent sind. Man bezeichnet sie als **bestimmt divergent** und nennt ∞ bzw. $-\infty$ einen **uneigentlichen Grenzwert**. Ist $(a_n)_n$ divergent und besitzt nicht in obigem Sinne den Grenzwert ∞ oder $-\infty$, so nennt man $(a_n)_n$ **unbestimmt divergent**.

Beispiel 5.41.

(a) Die Folge $(a_n)_n = (1, 2, 3, \dots)$ ist bestimmt divergent mit uneigentlichem Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(b) Die Folge $(b_n)_n = (1, 0, 2, 0, 3, 0, \dots)$ aus Beispiel 5.9 (a) ist unbestimmt divergent (da z. B. nicht fast alle Folgenglieder größer als 1 sind).

Bemerkung 5.42 (Grenzwertsätze für uneigentliche Grenzwerte)**.** Die Grenzwertsätze aus Satz 5.13 gelten auch für uneigentliche Grenzwerte wie in Definition 5.40, wenn man die formalen Rechenregeln für ∞

$$\begin{aligned} a+\infty &= \infty && \text{für } a \in \mathbb{R}, \\ \infty+\infty &= \infty, \\ a\cdot\infty &= \infty && \text{für } a \in \mathbb{R}_{>0}, \\ \infty\cdot\infty &= \infty, \\ \frac{a}{\infty} &= 0 && \text{für } a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und analog für $-\infty$ bzw. $a \in \mathbb{R}_{<0}$ definiert. Die Beweise dieser Aussagen sind letztlich analog zu denen von Satz 5.13, jedoch in den einzelnen Fällen immer etwas unterschiedlich, da die Bedingung für den Grenzwert ∞ aus Definition 5.40 ja formal anders aussieht als die eines endlichen Grenzwerts in Definition 5.1. Wir werden die Beweise hier nur exemplarisch in Aufgabe 5.43 betrachten.

Beachte aber, dass die Grenzwertsätze auch weiterhin keine Aussage liefern, wenn eine der betrachteten Folgen unbestimmt divergent ist oder sich Ausdrücke der Form $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ergeben, die sich nicht sinnvoll definieren lassen.

Aufgabe 5.43. Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei reelle Zahlenfolgen.

(a) Man zeige: Gilt $a_n \to a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $b_n \to \infty$, so ist auch $a_n b_n \to \infty$.

(b) Man zeige: Gilt $a_n \to \infty$ und $b_n \to \infty$, so ist auch $a_n + b_n \to \infty$.

(c) Kann man in (b) die Bedingung des Grenzwerts ∞ auch durch „nach oben unbeschränkt“ ersetzen, d. h. gilt für nach oben unbeschränkte Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ auch, dass $(a_n+b_n)_n$ nach oben unbeschränkt ist?

Bemerkung 5.44 (Monotoniekriterium mit uneigentlichem Grenzwert)**.** Auch das Monotoniekriterium aus Satz 5.28 lässt sich auf eine Variante mit uneigentlichen Grenzwerten erweitern: Ist eine reelle Folge $(a_n)_n$ zwar monoton wachsend, aber nicht nach oben beschränkt, so gibt es zu jedem $s \in \mathbb{R}$ zunächst ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > s$, und wegen der Monotonie dann auch mit $a_n > s$ für alle $n \geq n_0$. Nach Definition 5.40 ist damit dann also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Wir können Satz 5.28 also dahingehend verallgemeinern, dass jede monotone reelle Folge einen evtl. uneigentlichen Grenzwert in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ hat, also konvergent oder bestimmt divergent ist.

5.C Limes superior und inferior

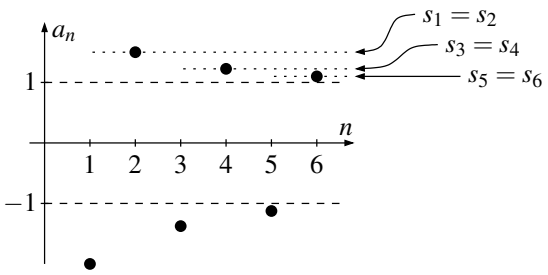
Bisher haben wir das Verhalten einer Folge $(a_n)_n$ für $n \to \infty$ in der Regel durch ihren Grenzwert beschrieben. Selbst wenn wir hierbei uneigentliche Grenzwerte wie in Definition 5.40 zulassen, funktioniert dies aber natürlich nicht bei unbestimmt divergenten Folgen, die keinen solchen Grenzwert besitzen.

Um solche Folgen zu untersuchen, können wir wie in Definition 5.18 (c) versuchen, auf Häufungspunkte auszuweichen. In der Tat wollen wir jetzt zeigen, dass *jede* Folge (zumindest im uneigentlichen Sinne) auch wirklich mindestens einen Häufungspunkt besitzt. Der Einfachheit halber betrachten wir hierfür zunächst nur beschränkte reelle Folgen, deren Häufungspunkte dann also in $\mathbb{R}$ liegen müssen. In diesem Fall werden wir in Folgerung 5.48 sehen, dass die folgende Konstruktion stets einen Häufungspunkt liefert – und zwar sogar einen ganz bestimmten, nämlich den größten.

Konstruktion 5.45. Es sei $(a_n)_n$ eine beschränkte reelle Folge. Wie im Bild unten für die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = (-1)^n\,(1+\frac{1}{n})$ dargestellt konstruieren wir nun die Hilfsfolge $(s_n)_n$ durch

$$s_n := \sup\{a_k : k \geq n\},$$

d. h. wir betrachten das Supremum aller Folgenglieder, wobei wir aber für s_n erst beim n-ten Folgenglied anfangen.



Beachte dabei, dass die Mengen $\{a_k : k \geq n\}$ nach Voraussetzung beschränkt sind und die Suprema s_n damit nach dem Supremumsaxiom in $\mathbb{R}$ existieren. Außerdem folgt aus der Beschränktheit der Folgenglieder, dass auch $(s_n)_n$ eine beschränkte Folge ist.

Darüber hinaus ist die Folge $(s_n)_n$ monoton fallend: Die obere Schranke s_n der Menge $\{a_k : k \geq n\}$ ja auch eine obere Schranke der Teilmenge $\{a_k : k \geq n+1\} \subset \{a_k : k \geq n\}$ und muss damit größer oder gleich der kleinsten oberen Schranke s_{n+1} von $\{a_k : k \geq n+1\}$ sein – d. h. es ist $s_{n+1} \leq s_n$.

Wir haben also gesehen, dass $(s_n)_n$ eine monoton fallende und (nach unten) beschränkte reelle Folge ist. Nach dem Monotoniekriterium aus Satz 5.28 besitzt sie also einen Grenzwert. Im oben dargestellten Beispiel ist dieser Grenzwert offensichtlich 1. Da die Häufungspunkte unserer Beispielfolge nach dem Mischfolgenlemma 5.22 genau ± 1 sind, ist der Grenzwert von $(s_n)_n$ hier also gerade der größte Häufungspunkt von $(a_n)_n$. Bevor wir zeigen, dass dies immer der Fall ist, geben wir der so konstruierten Zahl noch einen Namen.

Definition 5.46 (Limes superior und inferior)**.** Für eine beschränkte reelle Folge $(a_n)_n$ definieren wir

$$\text{den } \textbf{Limes superior} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \big(\sup\{a_k : k \geq n\}\big)$$
$$\text{und} \quad \text{den } \textbf{Limes inferior} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \big(\inf\{a_k : k \geq n\}\big).$$

In der Literatur sind hierfür auch die Schreibweisen $\overline{\lim} a_n$ bzw. $\underline{\lim} a_n$ üblich.

Das folgende Lemma zeigt, dass sich der Limes superior (und analog der Limes inferior) in gewissem Sinne wie eine „Mischung“ aus einem Grenzwert und einem Häufungspunkt verhält: Während für einen Grenzwert a ja in jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ fast alle Folgenglieder, für einen Häufungspunkt nach Lemma 5.21 aber nur unendlich viele Glieder liegen müssen, ist der Limes superior die (eindeutig bestimmte) Zahl a, für die für alle ε fast alle Folgenglieder kleiner als $a+\varepsilon$, und unendlich viele größer als $a-\varepsilon$ sind.

Lemma 5.47 (Äquivalente Charakterisierung des Limes superior)**.** *Es seien $(a_n)_n$ eine beschränkte reelle Folge und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt $a = \limsup_{n\to\infty} a_n$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) *Für fast alle n ist $a_n < a + \varepsilon$.*

(b) *Für unendlich viele n ist $a_n > a - \varepsilon$.*

(Eine analoge Aussage gilt natürlich auch für den Limes inferior.)

Beweis. Wie in Konstruktion 5.45 sei $s_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$, so dass also $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$ gilt. Weiterhin sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

„$\Rightarrow$“: Es gelte $s_n \to a$, also $s_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ für fast alle n. Wir müssen (a) und (b) zeigen.

Da s_n eine obere Schranke für $\{a_k : k \geq n\}$ (also insbesondere für a_n) ist, gilt $a_n \leq s_n < a+\varepsilon$ für fast alle n. Dies zeigt (a).

Um (b) zu zeigen, nehmen wir an, es gäbe nur endlich viele n mit $a_n > a - \varepsilon$. Dann gäbe es also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leq a - \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, d. h. $a - \varepsilon$ wäre eine obere Schranke für alle

diese Folgenglieder. Daraus folgt dann aber auch $s_n \leq a-\varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, im Widerspruch zu $s_n \to a$.

„$\Leftarrow$“: Wir setzen nun (a) und (b) voraus und müssen $s_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ für fast alle n zeigen.

Nach (a) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n < a+\frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Damit ist für diese n auch $s_n = \sup\{a_k : k \geq n\} \leq a+\frac{\varepsilon}{2} < a+\varepsilon$.

Weiterhin gibt es nach (b) zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $k \geq n$ mit $a_k > a-\varepsilon$, woraus natürlich auch $s_n = \sup\{a_k : k \geq n\} > a-\varepsilon$ folgt.

Insgesamt gilt also $s_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ für fast alle n. □

Aus diesem Lemma ergibt sich nun die folgende wichtige Charakterisierung des Limes superior (und inferior), mit der man diese Zahl oft sehr einfach bestimmen kann.

Folgerung 5.48. *Für jede beschränkte reelle Folge $(a_n)_n$ ist $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ der größte Häufungspunkt von $(a_n)_n$. (Analog ist dann natürlich $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ der kleinste Häufungspunkt von $(a_n)_n$.)*

*Insbesondere besitzt also jede beschränkte reelle Folge einen Häufungspunkt (**Satz von Bolzano-Weierstraß** für $\mathbb{R}$).*

Beweis. Es seien $a = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus (a) und (b) von Lemma 5.47 folgt dann $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$ für unendlich viele n, d. h. nach Lemma 5.21 ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$. Andererseits ist aber kein $b > a$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$: Setzen wir nämlich $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$, so ist $a+\varepsilon = b-\varepsilon$, und somit gilt nach Lemma 5.47 (a) für fast alle n

$$a_n < a+\varepsilon = b-\varepsilon \quad \Rightarrow \quad a_n \notin (b-\varepsilon, b+\varepsilon).$$

Damit kann b kein Häufungspunkt von $(a_n)_n$ sein. □

Beispiel 5.49.

(a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ mit $a_n = (-1)^n(1+\frac{1}{n})$ ist eine Mischfolge aus den geraden Gliedern $a_{2n} = 1+\frac{1}{2n} \to 1$ und den ungeraden Gliedern $a_{2n+1} = -(1+\frac{1}{2n+1}) \to -1$, sie hat nach Lemma 5.22 also die einzigen Häufungspunkte 1 und -1. Aus Folgerung 5.48 ergibt sich damit sofort $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$.

(b) Ist $(a_n)_n$ eine konvergente reelle Folge, so ist ihr Grenzwert a nach Lemma 5.19 der einzige Häufungspunkt. Also ist dann $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = a$ nach Folgerung 5.48.

Ist umgekehrt $(a_n)_n$ eine beschränkte reelle Folge mit $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n =: a$, so folgt aus Lemma 5.47 (a) für alle $\varepsilon > 0$, dass $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$ für fast alle n ist – wobei sich die erste Ungleichung aus $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und die zweite aus $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ergibt. Also ist $(a_n)_n$ dann konvergent mit Grenzwert a.

Aufgabe 5.50. Berechne $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ für $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}+(-1)^n\cdot n}$.

Aufgabe 5.51.

(a) Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei beschränkte Folgen positiver Zahlen. Zeige, dass

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n,$$

und gib ein Beispiel dafür an, dass hier im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

(b) Beweise, dass in (a) jedoch stets die Gleichheit gilt, wenn $(a_n)_n$ oder $(b_n)_n$ konvergent ist.

Bemerkung 5.52 (Uneigentliche Werte für Limes superior und inferior)**.** Lässt man für Supremum, Infimum und Grenzwerte wie in Bemerkung 4.38 und Definition 5.40 formal auch $\pm\infty$ zu, so kann man den Limes superior und Limes inferior nach Bemerkung 5.44 genau wie in Definition 5.46 auch für beliebige reelle Folgen konstruieren und erhält dann Werte in $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

Aufgabe 5.53. Zeige, dass die Aussage von Folgerung 5.48 auch für beliebige reelle Folgen richtig ist, wenn man wie in Bemerkung 5.52 die uneigentlichen Werte $\pm\infty$ für Häufungspunkte sowie den Limes superior und inferior zulässt.

Insbesondere gibt es also auch vom Satz von Bolzano-Weierstraß die erweiterte Form, dass jede (nicht notwendig beschränkte) reelle Folge einen (evtl. uneigentlichen) Häufungspunkt hat.

11