Grundlagen der Mathematik 1: Analysis

Andreas Gathmann

Vorlesungsskript RPTU Kaiserslautern 2024/25

– vorläufige Version –

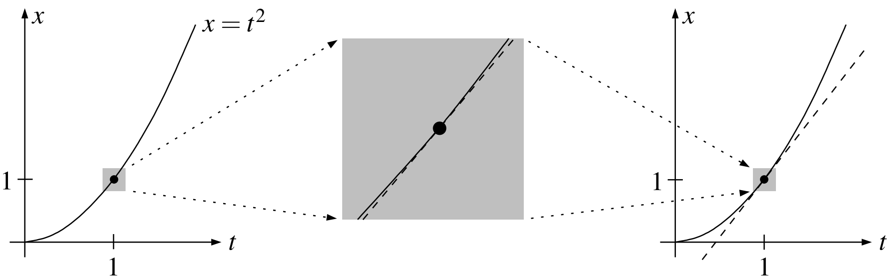
Inhaltsverzeichnis (Grundlagen der Mathematik 1)

0. Einleitung und Motivation

In diesem Skript – so verspricht es der Titel – wollen wir uns die Grundlagen der Mathematik erarbeiten. Aber was ist das überhaupt, die „Grundlagen der Mathematik"? Es handelt sich hierbei um die Kombination zweier Themengebiete, die in der Tat das grundlegende Handwerkszeug für nahezu die gesamte Mathematik darstellen, nämlich

- der *Analysis*, d. h. der Untersuchung von Folgen und Grenzwerten, Stetigkeit, sowie der Differential- und Integralrechnung (zunächst in einer und im zweiten Semester dann auch in mehreren Variablen), und
- der *linearen Algebra*, d. h. der Theorie der Vektorräume, linearen Abbildungen und Gleichungssysteme.

Von beiden Gebieten habt ihr ja aus der Schule wahrscheinlich schon eine ungefähre Vorstellung. In der *Analysis* geht es grob gesagt darum, reelle Funktionen *lokal*, also in der Umgebung eines gewählten Punktes, zu untersuchen, und aus diesen Untersuchungen dann wieder Aussagen über die gesamte Funktion zurückzugewinnen. Betrachten wir z. B. ein Auto, das sich entlang einer geraden Strecke bewegt. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Position x des Autos nach der Zeit t (in geeigneten Einheiten) durch die Gleichung $x = t^2$ beschrieben werden kann, so dass die Bewegung durch die Kurve im folgenden Bild links dargestellt wird:



Wir wollen diese Bewegung nun nur in einer kleinen Umgebung eines fest gewählten Zeitpunkts, z. B. des Zeitpunkts $t = 1$ (und damit auch $x = 1$) betrachten. Im Bild oben haben wir diese Umgebung grau markiert und in der Mitte stark vergrößert dargestellt. Wir sehen, dass die Kurve in dieser Umgebung fast wie eine *Gerade* aussieht; wir haben diese Gerade gestrichelt eingezeichnet und im Bild rechts auch außerhalb der gewählten Umgebung fortgesetzt. Geometrisch ist diese Gerade natürlich einfach die *Tangente* an die Kurve an der Stelle $t = 1$. Physikalisch repräsentiert die Steigung dieser Geraden die *Geschwindigkeit* des Autos zum betrachteten Zeitpunkt, denn sie gibt ja gerade an, in welchem Verhältnis sich dort die Strecke x mit der Zeit t verändert. Aus der Schule wisst ihr auch schon, wie man diese Steigung ausrechnet: Man muss dazu die gegebene Funktion t^2 *differenzieren* – so dass man die Ableitung $2t$ erhält – und dort die betrachtete Stelle $t = 1$ einsetzen. Die Steigung ist in unserem Fall also gerade $2 \cdot 1 = 2$, und man rechnet sofort nach, dass $x = 2t - 1$ die Gleichung der oben eingezeichneten Tangente ist. Man sagt, dass die Gerade $x = 2t - 1$ eine *lineare Approximation* der ursprünglich gegebenen Funktion $x = t^2$ im Punkt $t = 1$ ist.

Wir können aus der Kenntnis der zurückgelegten Strecke zu jedem Zeitpunkt also die Geschwindigkeit des Autos durch Differenzieren bestimmen. Man kann sich natürlich auch die umgekehrte Frage stellen: Angenommen, der Kilometerzähler eures Autos ist kaputt, aber ihr beobachtet auf eurer Fahrt ständig eure Geschwindigkeit. Könnt ihr dann am Ende der Fahrt trotzdem ausrechnen, wie weit ihr gefahren seid? Dies ist offensichtlich die „Umkehrung" des Differenzierens – und auch hier wisst ihr aus der Schule natürlich schon, dass dies auf die *Integralrechnung* führen wird.

In der Praxis bewegt man sich mit dem Auto aber nicht immer nur auf einer geraden Strecke, und demzufolge braucht man für die Beschreibung solch einer Bewegung (und natürlich auch vieler anderer natürlich auftretender Prozesse) mehrere Variablen. Wir werden daher auch Abbildungen betrachten, die mehrere Variablen auf mehrere andere abbilden, wie z. B. die folgende Vorschrift, die zwei reelle Zahlen y_1 und y_2 in Abhängigkeit von zwei anderen x_1 und x_2 ausdrückt:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 \cos x_1 \\ y_2 &= x_1 \, e^{x_2} - x_2 \end{aligned}$$

Genau wie oben werden wir uns auch hier wieder die Frage stellen, ob wir diese (in diesem Fall recht komplizierte) Funktion in der Nähe eines gegebenen Punktes nicht vielleicht durch eine einfache *lineare* Abhängigkeit annähern können. In der Tat ist dies möglich: Wir werden sehen, dass z. B. in einer kleinen Umgebung des Nullpunkts $(x_1, x_2) = (0, 0)$ die obige Vorschrift näherungsweise die gleichen Ergebnisse liefert wie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Auch wenn diese Gleichungen natürlich viel einfacher als die ursprünglichen sind, sollte offensichtlich sein, dass auch solche linearen Gleichungssysteme bei wachsender Zahl von Variablen (und in der Praxis sind Hunderte oder Tausende von Variablen keine Seltenheit) recht kompliziert werden können. Wir werden daher einen wesentlichen Teil dieser Vorlesung mit der *linearen Algebra*, also dem Studium derartiger linearer Gleichungssysteme, verbringen. Um dabei überhaupt erst einmal den Notationsaufwand in Grenzen zu halten, tut man dabei gut daran, die Start- und Zielvariablen nicht alle einzeln hinzuschreiben, sondern sie zu sogenannten *Vektoren* zusammenzufassen. In der Tat kann man in dieser Sichtweise die lineare Algebra als das Studium von linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen beschreiben.

Wenn wir dann die linearen Abbildungen zwischen mehreren Variablen gut genug verstanden haben, können wir uns im zweiten Teil der Analysis schließlich daran machen, die Differential- und Integralrechnung auf den Fall von mehreren Variablen auszuweiten.

Wir haben damit jetzt relativ kurz umrissen, welcher mathematische Stoff uns in dieser Vorlesung erwartet. Es wird in diesem Skript aber nicht nur darum gehen, mathematische Resultate kennenzulernen. Mindestens ebenso wichtig ist es, das „mathematische Denken" zu lernen, d. h. die Fähigkeit zu entwickeln, mit abstrakten Konzepten umzugehen, exakte logische Schlüsse zu ziehen und Beweise zu führen. Anders als in der Schule oder im Studium z. B. ingenieurswissenschaftlicher Fächer werden wir genau darauf achten, eine „wasserdichte" Theorie aufzubauen: Jeder neue Begriff bzw. jeder neue Satz wird nur unter Verwendung des bisher Bekannten exakt definiert bzw. bewiesen. So sind z. B. Formulierungen in dem Stil „eine Funktion wird durch eine Gerade angenähert" oder „eine Funktion heißt stetig, wenn man sie zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen" als Veranschaulichung unserer Ideen zwar sehr sinnvoll, als exakte mathematische Formulierung jedoch schlichtweg unbrauchbar. Wir werden daher in dieser Vorlesung viel exakter arbeiten als ihr es wahrscheinlich aus der Schule gewohnt seid, und es ist wichtig, dass ihr diese exakte Denkweise verinnerlicht und anzuwenden lernt. Die Mathematik ist ein riesiges Gebäude – viel größer und komplexer als ihr es euch wahrscheinlich im Moment vorstellen könnt – das ständig höher gebaut wird, indem schon bewiesene Sätze auf neue Fälle angewendet oder wieder für neue Beweise verwendet werden. Wir starten gerade beim Fundament dieses Gebäudes und können es uns da wirklich nicht leisten herumzupfuschen.

Diese konsequent logische und exakte Herangehensweise ist zwar am Anfang wahrscheinlich ungewohnt, hat jedoch für euch auch einen Vorteil: Etwas überspitzt formuliert erzählen wir euch während des gesamten Studiums eigentlich nur Dinge, die logisch aus dem folgen, was ihr ohnehin schon wusstet. Dadurch ist die Mathematik wahrscheinlich das Studienfach, in dem man am wenigsten auswendig lernen muss – in dem es aber im Gegenzug auch am meisten auf das *Verständnis* des Stoffes ankommt. Je besser euer Verständnis für die Mathematik wird, um so mehr Dinge werden euch letztlich einfach „klar" werden, so dass es euch dann auch viel leichter fällt, sie zu lernen.

Dieses Verständnis für die Mathematik bekommt man aber natürlich nur durch intensiven und *aktiven* Umgang mit dem Stoff, weswegen neben dem Studium der Vorlesung auch die Bearbeitung der Übungsaufgaben besonders wichtig ist.

Heißt das alles nun, dass wir nur mit logischen Argumenten die Mathematik sozusagen „aus dem Nichts“ aufbauen können? Nein, das geht natürlich nicht … von nichts kommt nichts. Man muss am Anfang immer gewisse Dinge als gegeben annehmen, also Aussagen als wahr voraussetzen, die man nicht mehr beweist bzw. beweisen kann, und auf denen dann die gesamte Theorie beruht. Derartige Annahmen bezeichnet man als **Axiome**. Natürlich versucht man in der Mathematik, mit möglichst wenigen und sehr elementaren Axiomen auszukommen, die hoffentlich niemand anzweifeln würde. In der modernen Mathematik ist es üblich, hierfür die grundlegenden Prinzipien der Logik und Mengenlehre zu verwenden (zu denen wir auch gleich in Kapitel 1 Genaueres sagen werden).

In dieser Vorlesung wollen wir uns das Leben allerdings etwas leichter machen und zusätzlich auch die *Existenz und elementaren Eigenschaften der reellen Zahlen* axiomatisch voraussetzen (um welche Eigenschaften es sich hierbei handelt, werden wir natürlich genau angeben). Man kann zwar nur aus den Axiomen der Logik und Mengenlehre beweisen, dass die reellen Zahlen existieren und dass sie die erwarteten Eigenschaften haben, der Beweis wäre zu diesem frühen Zeitpunkt im Studium aber sehr verwirrend und würde euch auch keine großartigen neuen Erkenntnisse bringen. In diesem Sinne starten wir also sozusagen doch nicht ganz beim Fundament unseres „Gebäudes Mathematik“, sondern bereits im ersten Stock.

Im weiteren Verlauf ist dieses Skript dann wie im Inhaltsverzeichnis angegeben in mehrere Teile gegliedert. Diese bauen der Reihe nach aufeinander auf, mit einer Ausnahme: Nach den in jedem Fall benötigten grundlegenden Anfangskapiteln 1 bis 3 sind die Teile „Grundlagen der Mathematik 1: Analysis“ (Kapitel 4 bis **??**) und „Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra“ (Kapitel **??** bis **??**) *unabhängig voneinander* und können somit in beliebiger Reihenfolge oder auch parallel studiert werden.

Aber jetzt genug der Vorrede … beginnen wir nun also unser Studium der Mathematik mit den „Grundlagen der Grundlagen“, den für uns wesentlichen Prinzipien der Logik und Mengenlehre.

1. Etwas Logik und Mengenlehre

Bevor wir mit dem eigentlichen Inhalt der Vorlesung beginnen, müssen wir in diesem Kapitel kurz die exakte mathematische Sprache beschreiben, in der wir unsere Ergebnisse formulieren werden: die der Logik und Mengenlehre. Zentral hierbei sind die Begriffe der *Aussage* (in der Logik) und der *Menge* (in der Mengenlehre).

Da wir es hier mit den ersten beiden Begriffen überhaupt zu tun haben, die in der Mathematik vorkommen, können wir sie natürlich nicht durch bereits bekannte Dinge definieren oder mit bereits bekannten Resultaten ihre Eigenschaften herleiten. Wir müssen sie daher (wie schon in der Einleitung erwähnt) axiomatisch voraussetzen. Wir müssen *voraussetzen*, dass es sinnvoll ist, über logische Aussagen und deren Wahrheit zu reden, dass Mengen überhaupt existieren, dass man Mengen vereinigen und schneiden kann, aus ihnen Elemente auswählen kann, und noch einiges mehr. Wenn ihr euch zum Beispiel auf den Standpunkt stellt, dass ihr nicht an die Existenz von Mengen glaubt, wird euch niemand widerlegen können. Allerdings zweifelt ihr damit dann auch die Existenz der gesamten Mathematik an, wie sie heutzutage betrieben wird – und aus der Tatsache, dass ihr in dieser Vorlesung sitzt, schließe ich einmal, dass das nicht der Fall ist.

Glücklicherweise sind die Dinge, die wir benötigen, jedoch allesamt anschaulich sofort einleuchtend. Ich möchte es euch (und mir) daher ersparen, an dieser Stelle eine vollständige und präzise axiomatische Formulierung der Logik und Mengenlehre hinzuschreiben, zumal das momentan sicher mehr verwirren als helfen würde und außerdem gerade im Bereich der Logik auch zu sehr in die Philosophie abdriften würde. Stattdessen wollen wir uns in diesem (für den Rest der Vorlesung sehr untypischen) ersten Kapitel damit begnügen, die für uns wichtigsten Prinzipien und Notationen sowie beliebte Fehlerquellen in verständlicher Sprache zu erklären, auch wenn ein paar Dinge (insbesondere die Begriffsfestlegung – „Definition“ möchte ich es eigentlich gar nicht nennen – einer Aussage und einer Menge) dadurch recht schwammig klingen werden. Außerdem werden wir in Beispielen zur besseren Verdeutlichung bereits hier die reellen Zahlen und ihre einfachsten Eigenschaften (die euch sicherlich bekannt sein werden) benutzen, auch wenn wir diese erst später formalisieren werden. Da es sicher niemanden von euch verwirren wird, werden wir auch die Schreibweise „$x \in \mathbb{R}$“ für „x ist eine reelle Zahl“ schon verwenden, bevor sie in den Notationen 1.12 und 1.14 offiziell eingeführt wird. Ab Kapitel 2 werden wir dann mit dem strukturierten Aufbau der Grundlagen der Mathematik beginnen, also alle Definitionen mit bereits eingeführten Notationen präzise formulieren und alle Aussagen aus vorherigen exakt beweisen.

1.A Logik

Beginnen wir also mit der Logik. Unter einer **Aussage** verstehen wir (grob gesagt) ein sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist (wobei wir in der Mathematik natürlich letztlich daran interessiert sind, *wahre* Aussagen herzuleiten – wenn wir später mathematische Sätze formulieren, ist damit also stets gemeint, dass die dort gemachte Aussage wahr ist). Wichtig sind auch sprachliche Gebilde, in denen freie **Variablen**, also Platzhalter, vorkommen, und die erst beim Einsetzen von Werten für diese Variablen Aussagen liefern. Man bezeichnet sie als **Aussageformen**.

Beispiel 1.1.

(a) $1+1=2$ ist eine wahre, $1+1=3$ eine falsche, und $1+1$ überhaupt keine Aussage.

(b) $x+1=2$ ist eine Aussageform, die beim Einsetzen von $x=1$ in eine wahre, beim Einsetzen jeder anderen reellen Zahl in eine falsche Aussage übergeht.

Bemerkung 1.2. Als Variablen in Aussageformen kann man beliebige Symbole benutzen. Üblich sind neben den normalen lateinischen Klein- und Großbuchstaben auch die griechischen Buchstaben, die wir zur Erinnerung hier auflisten:

$\mathrm{A}\ \alpha$ alpha	$\mathrm{B}\ \beta$ beta	$\Gamma\ \gamma$ gamma	$\Delta\ \delta$ delta	$\mathrm{E}\ \varepsilon$ epsilon	$\mathrm{Z}\ \zeta$ zeta	$\mathrm{H}\ \eta$ eta	$\Theta\ \vartheta$ theta
$\mathrm{I}\ \iota$ iota	$\mathrm{K}\ \kappa$ kappa	$\Lambda\ \lambda$ lambda	$\mathrm{M}\ \mu$ my	$\mathrm{N}\ \nu$ ny	$\Xi\ \xi$ xi	$\mathrm{O}\ o$ omikron	$\Pi\ \pi$ pi
$\mathrm{P}\ \rho$ rho	$\Sigma\ \sigma$ sigma	$\mathrm{T}\ \tau$ tau	$\Upsilon\ \upsilon$ ypsilon	$\Phi\ \varphi$ phi	$\mathrm{X}\ \chi$ chi	$\Psi\ \psi$ psi	$\Omega\ \omega$ omega

Oft verziert man Buchstaben auch noch mit einem Symbol oder versieht sie mit einem Index, um neue Variablen zu erhalten: So sind z. B. $x, x', \tilde{x}, \bar{x}, x_1, x_2, \ldots$ alles Symbole für verschiedene Variablen, die zunächst einmal nichts miteinander zu tun haben (aber möglichst für irgendwie miteinander zusammenhängende Objekte eingesetzt werden sollten, wenn man den Leser nicht vollends verwirren will).

Notation 1.3 (Zusammengesetzte Aussagen)**.** Sind A und B Aussagen, so lassen sich daraus wie folgt neue bilden:

Symbol	Wahrheitstafel				Bedeutung
A	w	f	w	f	
B	w	w	f	f	
$\neg A$	f	w			nicht A
$A \wedge B$	w	f	f	f	A und B
$A \vee B$	w	w	w	f	A oder B (oder beides): „nicht-ausschließendes Oder“
$A \Leftrightarrow B$	w	f	f	w	A und B sind gleichbedeutend / *äquivalent*, bzw. A genau dann, wenn B
$A \Rightarrow B$	w	w	f	w	aus A folgt B, bzw. wenn A dann B

Die sogenannte **Wahrheitstafel** in den mittleren vier Spalten ist dabei die eigentliche Definition der neuen zusammengesetzten Aussagen. Sie gibt in Abhängigkeit der Wahrheit von A und B (in den ersten beiden Zeilen) an, ob die zusammengesetzte Aussage wahr oder falsch ist.

Bemerkenswert ist hierbei wohl nur die Folgerungsaussage $A \Rightarrow B$, die keine Aussage über die Richtigkeit von A oder B separat macht, sondern nur sagt, dass B wahr ist, wenn auch A es ist. Ist hingegen A falsch, so ist die Folgerungsaussage $A \Rightarrow B$ stets wahr („aus einer falschen Voraussetzung kann man alles folgern“). So ist z. B. $0 = 1 \quad\Rightarrow\quad 2 = 3$ eine wahre Aussage. Wie schon erwähnt wollen wir uns in der Mathematik aber natürlich in der Regel mit wahren Aussagen beschäftigen, und neue wahre Aussagen aus alten herleiten. Gerade in Beweisen ist die übliche Verwendung der Notation $A \Rightarrow B$ daher, dass A eine bereits als wahr erkannte Aussage ist, und wir damit nun schließen wollen, dass auch B wahr ist.

Bemerkung 1.4 (Beweise mit Wahrheitstafeln)**.** Wollen wir kompliziertere zusammengesetzte Aussagen miteinander vergleichen, so können wir dies auch mit Hilfe von Wahrheitstafeln tun. So ist für zwei Aussagen A und B z. B.

$$A \Rightarrow B \quad \text{äquivalent zu} \quad (\neg A) \vee B,$$

denn wenn wir in der Wahrheitstafel

A	w	f	w	f
B	w	w	f	f
$\neg A$	f	w	f	w
$(\neg A) \vee B$	w	w	f	w

mit Hilfe der Definitionen von $\neg$ und $\vee$ aus Notation 1.3 zunächst $\neg A$ und dann $(\neg A) \vee B$ berechnen, sehen wir, dass das Ergebnis mit $A \Rightarrow B$ übereinstimmt. Nach der Bemerkung aus Notation 1.3 ist dies auch anschaulich klar: Die Folgerungsaussage $A \Rightarrow B$ ist ja genau dann wahr, wenn A falsch (also $\neg A$ wahr) ist, oder wenn B wahr ist (oder beides).

Genauso zeigt man die ebenfalls einleuchtende Aussage, dass

$$A \Leftrightarrow B \quad \text{äquivalent zu} \quad (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

ist – was auch die übliche Art ist, wie man eine Äquivalenz zeigt: Man zeigt separat die beiden Folgerungen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$.

Notation 1.5. Folgerungen („$\Rightarrow$“) und Äquivalenzen („$\Leftrightarrow$“) sind natürlich zwei verschiedene Dinge, die man nicht durcheinanderwerfen darf (auch wenn das in der Schule wahrscheinlich manchmal nicht so genau genommen wird). Es hat sich jedoch in der Mathematik eingebürgert, bei *Definitionen* von Begriffen durch eine äquivalente, definierende Eigenschaft die Sprechweise „wenn“ anstatt des eigentlich korrekten „genau dann, wenn“ zu verwenden: So würde man z. B. als Definition des Begriffs einer geraden Zahl hinschreiben

„Eine ganze Zahl x heißt gerade, wenn $\frac{x}{2}$ eine ganze Zahl ist“,

obwohl man genau genommen natürlich meint

„Eine ganze Zahl x heißt *genau dann* gerade, wenn $\frac{x}{2}$ eine ganze Zahl ist“.

Eine gewöhnliche Folgerungsaussage wie z. B. die wahre Aussage

„Wenn eine ganze Zahl x positiv ist, dann ist auch $x+1$ positiv“

ist dagegen immer nur in einer Richtung zu verstehen; hier wird also nicht behauptet, dass mit $x+1$ auch x immer positiv sein muss (was ja auch falsch wäre).

Notation 1.6 (Quantoren)**.** Natürlich kann man nicht nur zwei, sondern auch mehrere Aussagen wie in Notation 1.3 mit „und“ bzw. „oder“ verknüpfen – also die neue Aussage konstruieren, dass *jede* bzw. *mindestens eine* der ursprünglichen Aussagen wahr ist. Am einfachsten notiert man dies mit einer Aussageform A, in der eine freie Variable x vorkommt. Wir schreiben dies dann auch als $A(x)$ und setzen

Symbol	Bedeutung
$\forall x\colon A(x)$	für alle x gilt $A(x)$ (also eine „und“-Verknüpfung aller Aussagen $A(x)$)
$\exists x\colon A(x)$	es gibt ein x mit $A(x)$ (also eine „oder“-Verknüpfung aller Aussagen $A(x)$)

Die beiden Symbole $\forall$ und $\exists$ bezeichnet man als **Quantoren**. Beachte, dass diese beiden Quantoren *nicht* miteinander vertauschbar sind: So besagt z. B. die Aussage

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon y > x$$

„zu jeder reellen Zahl x gibt es eine Zahl y, die größer ist“ (was offensichtlich wahr ist), während die Umkehrung der beiden Quantoren die Aussage

$$\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon y > x$$

„es gibt eine reelle Zahl y, die größer als jede reelle Zahl x ist“ liefern würde (was ebenso offensichtlich falsch ist). Der Unterschied besteht einfach darin, dass im ersten Fall zuerst das x gewählt werden muss und dann ein y dazu existieren muss (das von x abhängen darf), während es im zweiten Fall *dasselbe* y für alle x sein müsste.

Bemerkung 1.7. Jede Aussage lässt sich natürlich auf viele Arten aufschreiben, sowohl als deutscher Satz als auch als mathematische Formel. Die gerade eben betrachtete Aussage könnte man z. B. auf die folgenden (absolut gleichwertigen) Arten aufschreiben:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon y > x$.

(b) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y > x$.

(c) Zu jeder reellen Zahl gibt es noch eine größere.

Welche Variante man beim Aufschreiben wählt, ist weitestgehend Geschmackssache. Die Formulierung einer Aussage als deutscher Satz hat den Vorteil, dass wir sie oft leichter verstehen können, weil wir die deutsche Sprache schon länger kennen als die mathematische. Wenn wir uns jedoch erst einmal an die mathematische Sprache gewöhnt haben, wird auch sie ihre Vorzüge bekommen:

Sie ist deutlich kürzer und besser logisch strukturiert. Wir werden im Folgenden beide Schreibweisen mischen und jeweils diejenige wählen, mit der unsere Aussagen (hoffentlich) am einfachsten verständlich werden.

Wenn wir mathematische Symbole verwenden, müssen wir diese aber auch stets in ihrer korrekten Notation und nicht als „Abkürzungen" für deutsche Wörter verwenden: Man würde die Aussage „2 und 4 sind gerade Zahlen" sicher niemals schreiben als „$2 \wedge 4$ sind gerade Zahlen", und analog genauso wenig „Es gilt $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$" als „Es gilt $x^2 \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$".

Bemerkung 1.8 (Negationen)**.** Es ist wichtig zu wissen, wie man von einer Aussage das Gegenteil, also die Negation bzw. „Verneinung" bildet. Da hierbei oft Fehler gemacht werden, wollen wir die allgemeinen Regeln hierfür im Folgenden kurz auflisten. Dabei könnte man (a), (b) und (c) wieder schnell mit Wahrheitstafeln zeigen; die Regeln (d) und (e) sind wie in Notation 1.6 analog zu (b) und (c) für die Verknüpfung mehrerer Aussagen:

(a) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$: Ist es falsch, dass A falsch ist, so bedeutet dies genau, dass A wahr ist.

(b) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$: Das Gegenteil von „$A$ und B sind richtig" ist „A oder B ist falsch".

(c) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$: Das Gegenteil von „$A$ oder B ist richtig" ist „A und B sind falsch".

(d) $\neg(\forall x \colon A(x)) \Leftrightarrow \exists x \colon \neg A(x)$: Das Gegenteil von „für alle x gilt $A(x)$" ist „es gibt ein x, für das $A(x)$ falsch ist".

(e) $\neg(\exists x \colon A(x)) \Leftrightarrow \forall x \colon \neg A(x)$: Das Gegenteil von „es gibt ein x, für das $A(x)$ gilt" ist „für alle x ist $A(x)$ falsch".

Man kann also sagen, dass eine Verneinung dazu führt, dass „und" mit „oder" sowie „für alle" mit „es gibt" vertauscht werden. So ist z. B. das Gegenteil der Aussage

> „In Frankfurt haben *alle* Haushalte Strom *und* fließendes Wasser"

die Aussage

> „In Frankfurt *gibt es* einen Haushalt, der keinen Strom *oder* kein fließendes Wasser hat".

Beispiel 1.9.

(a) Wollen wir eine Folgerung $A \Rightarrow B$ verneinen, so können wir sie zunächst mit Bemerkung 1.4 zu $(\neg A) \vee B$ umformen, und erhalten nach Bemerkung 1.8 als Umkehrung dann $A \wedge \neg B$. Dies ist auch anschaulich einleuchtend: Die Folgerungsaussage „wenn A dann B" ist genau dann falsch, wenn die Voraussetzung A zwar gilt, die Behauptung B aber nicht. Wir sehen also:

$$\boxed{\text{Die Verneinung einer Folgerung } A \Rightarrow B \text{ ist } A \wedge \neg B}$$

(und nicht etwa $A \Rightarrow \neg B$, wie man vielleicht denken könnte).

(b) Eine oft vorkommende Anwendung der Regeln für die Verneinung von Aussagen ist der sogenannte **Widerspruchsbeweis** bzw. Beweis durch **Kontraposition**. Nach Bemerkung 1.4 gesehen ist die Folgerung $A \Rightarrow B$ („aus A folgt B") gleichbedeutend mit $(\neg A) \vee B$. Damit ist diese Aussage nach Bemerkung 1.8 (a) auch äquivalent zu $(\neg(\neg B)) \vee (\neg A)$, also zu $\neg B \Rightarrow \neg A$. Mit anderen Worten: Haben wir eine Schlussfolgerung $A \Rightarrow B$ zu beweisen, so können wir genauso gut $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ zeigen, d. h. *wir können annehmen, dass die zu zeigende Aussage B falsch ist und dies dann zu einem Widerspruch führen bzw. zeigen, dass dann auch die Voraussetzung A falsch sein muss.*

Beispiel 1.10. Hier sind zwei Beispiele für die Anwendung der Prinzipien aus Bemerkung 1.8 und Beispiel 1.9 – und auch unsere ersten Beispiele dafür, wie man Beweise von Aussagen exakt aufschreiben kann.

(a) Einen Beweis durch Widerspruch könnte man z. B. so aufschreiben:

Behauptung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $2x+1>0$ oder $2x-1<0$.

Beweis: Angenommen, die Behauptung wäre falsch, d. h. (nach Bemerkung 1.8 (c) und (d)) es gäbe ein $x \in \mathbb{R}$ mit

$$2x+1 \le 0 \quad (1) \qquad \text{und} \qquad 2x-1 \ge 0 \quad (2).$$

Für dieses x würde dann folgen, dass

$$0 \overset{(1)}{\ge} 2x+1 = 2x-1+2 \overset{(2)}{\ge} 0+2 = 2.$$

Dies ist aber ein Widerspruch. Also war unsere Annahme falsch und somit die zu beweisende Aussage richtig. □

Das dabei verwendete Symbol „□" ist die übliche Art, das Ende eines Beweises zu kennzeichnen. Zur Verdeutlichung haben wir die beiden Ungleichungen mit (1) und (2) markiert, um später angeben zu können, wo sie verwendet werden.

(b) Manchmal weiß man von einer Aussage aufgrund der Aufgabenstellung zunächst einmal noch nicht, ob sie wahr oder falsch ist. In diesem Fall muss man sich dies natürlich zuerst überlegen – und, falls die Aussage falsch ist, ihre Negation beweisen. Als Beispiel dafür betrachten wir die Aufgabe

Man beweise oder widerlege: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $2x+1<0$ oder $2x-1>0$.

In diesem Fall merkt man schnell, dass die Aussage falsch sein muss, weil die Ungleichungen schon für den Fall $x=0$ nicht stimmen. Man könnte als Lösung der Aufgabe unter Beachtung der Negationsregeln aus Bemerkung 1.8 also aufschreiben:

Behauptung: Die Aussage ist falsch, d. h. es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $2x+1 \ge 0$ und $2x-1 \le 0$.

Beweis: Für $x=0$ ist $2x+1=1 \ge 0$ und $2x-1=-1 \le 0$. □

Beachte, dass dies ein vollständiger Beweis ist: *Um eine allgemeine Aussage zu widerlegen, genügt es, ein Gegenbeispiel dafür anzugeben.*

Bemerkung 1.11. Bevor wir unsere kurze Auflistung der für uns wichtigen Prinzipien der Logik beenden, wollen wir noch kurz auf ein paar generelle Dinge eingehen, die man beim Aufschreiben mathematischer Beweise oder Rechnungen beachten muss.

Dass wir bei unseren logischen Argumenten sauber und exakt arbeiten – also z. B. nicht Folgerungen, die keine Äquivalenzen sind, in der falschen Richtung verwenden, „für alle" mit „es gibt" verwechseln oder ähnliches – sollte sich von selbst verstehen. Die folgende kleine Geschichte hilft vielleicht zu verstehen, was damit gemeint ist.

Ein Ingenieur, ein Physiker und ein Mathematiker fahren mit dem Zug nach Frankreich und sehen dort aus dem Fenster des Zuges ein schwarzes Schaf.

Da sagt der Ingenieur: „Oh, in Frankreich sind die Schafe schwarz!"

Darauf der Physiker: „Nein ... wir wissen jetzt nur, dass es in Frankreich mindestens ein schwarzes Schaf gibt."

Der Mathematiker: „Nein ... wir wissen nur, dass es in Frankreich mindestens ein Schaf gibt, das auf mindestens einer Seite schwarz ist."

Es gibt aber noch einen weiteren sehr wichtigen Punkt, der leider oft nicht beachtet wird: In der Regel werden wir beim Aufschreiben sowohl Aussagen notieren wollen, die wir erst noch zeigen wollen (um schon einmal zu sagen, worauf wir hinaus wollen), als auch solche, von denen wir bereits wissen, dass sie wahr sind (z. B. weil sie für die zu zeigende Behauptung als wahr vorausgesetzt werden oder weil sie sich logisch aus irgendetwas bereits Bekanntem ergeben haben). Es sollte offensichtlich sein, dass wir Aussagen mit derartig verschiedenen Bedeutungen für die Argumentationsstruktur nicht einfach zusammenhangslos hintereinander schreiben dürfen, wenn noch jemand in der Lage sein soll, die Argumente nachzuvollziehen. Betrachten wir z. B. noch einmal unseren

Beweis aus Beispiel 1.10 (a) oben, so wäre eine Art des Aufschreibens in folgendem Stil (wie man es leider oft sieht)

$$\begin{array}{lll} 2x+1>0 & \text{oder} & 2x-1<0 \\ 2x+1\leq 0 & & 2x-1\geq 0 \\ \multicolumn{3}{l}{0\geq 2x+1=2x-1+2\geq 0+2=2} \end{array}$$

völlig inakzeptabel, obwohl hier natürlich letztlich die gleichen Aussagen stehen wie oben. Kurz gesagt:

> Von *jeder* aufgeschriebenen Aussage muss für den Leser *sofort* und *ohne eigenes Nachdenken* ersichtlich sein, welche Rolle sie in der Argumentationsstruktur spielt: Ist es z. B. eine noch zu zeigende Behauptung, eine Annahme oder eine Folgerung (und wenn ja, aus was)?

Dies bedeutet allerdings nicht, dass wir ganze Aufsätze schreiben müssen. Eine (schon recht platzoptimierte) Art, den Beweis aus Beispiel 1.10 (a) aufzuschreiben, wäre z. B.

Angenommen, es gäbe ein $x\in\mathbb{R}$ mit $2x+1\leq 0$ und $2x-1\geq 0$.

Dann wäre $0\geq 2x+1=2x-1+2\geq 0+2=2$, Widerspruch. □ 01

1.B Mengenlehre

Nachdem wir die wichtigsten Regeln der Logik behandelt haben, wenden wir uns jetzt der Mengenlehre zu. Die gesamte moderne Mathematik basiert auf diesem Begriff der Menge, der ja auch schon aus der Schule hinlänglich bekannt ist. Zur Beschreibung, was eine Menge ist, zitiert man üblicherweise die folgende Charakterisierung von Georg Cantor (1845–1918):

„Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.“

Die in einer Menge zusammengefassten Objekte bezeichnet man als ihre **Elemente**.

Notation 1.12.

(a) Wir schreiben $x\in M$, falls x ein Element der Menge M ist, und $x\notin M$ andernfalls.

(b) Die einfachste Art, eine Menge konkret anzugeben, besteht darin, ihre Elemente in geschweiften Klammern aufzulisten, wobei es auf die Reihenfolge und Mehrfachnennungen nicht ankommt. So sind z. B. $\{1,2,3\}$ und $\{2,3,1,3\}$ zwei Schreibweisen für dieselbe Menge mit den drei Elementen 1, 2 und 3.

Beachte, dass die Elemente einer Menge nicht unbedingt Zahlen sein müssen – so ist z. B. $M=\{\{2,3\},\{1,3\}\}$ eine Menge mit zwei Elementen, die selbst wieder Mengen sind, nämlich $\{2,3\}$ und $\{1,3\}$. Mit der Notation aus (a) ist also z. B. $\{1,3\}\in M$. Insbesondere ist M nicht dasselbe wie die Menge $\{1,2,3\}$.

(c) Man kann die Elemente einer Menge auch durch eine beschreibende Eigenschaft angeben: $\{x:A(x)\}$ bezeichnet die Menge aller Objekte x, für die die Aussage $A(x)$ wahr ist, wie z. B. in $\{x\in\mathbb{R}:x^2=1\}=\{-1,1\}$.

(d) Die Menge $\{\}$ ohne Elemente, die sogenannte **leere Menge**, bezeichnen wir mit $\emptyset$.

(e) Eine Menge M heißt **Teilmenge** einer Menge N (geschrieben $M\subset N$), wenn jedes Element von M auch Element von N ist, bzw. in der Quantorenschreibweise von Notation 1.6 wenn

$$\forall x\colon\ x\in M\Rightarrow x\in N.$$

Man sagt in diesem Fall auch, dass N eine **Obermenge** von M ist (geschrieben $N\supset M$).

Beachte, dass M und N dabei auch gleich sein können; in der Tat ist offensichtlich

$$M=N \quad \text{genau dann, wenn} \quad M\subset N \text{ und } N\subset M.$$

Oft wird man eine Gleichheit $M = N$ von Mengen auch so beweisen, dass man separat $M \subset N$ und $N \subset M$ zeigt.

Wenn wir ausdrücken wollen, dass M eine Teilmenge von N und nicht gleich N ist, so schreiben wir dies als $M \subsetneq N$ und sagen, dass M eine **echte Teilmenge** von N ist. Es ist wichtig, dies von der Aussage $M \not\subset N$ zu unterscheiden, die bedeutet, dass M keine Teilmenge von N ist.

Achtung: Manchmal wird in der Literatur das Symbol „$\subset$" für *echte* Teilmengen und „$\subseteq$" für nicht notwendig echte Teilmengen verwendet.

(f) Hat eine Menge M nur endlich viele Elemente, so nennt man M eine **endliche Menge** und schreibt die Anzahl ihrer Elemente als $|M|$. Andernfalls setzt man formal $|M| = \infty$.

Bemerkung 1.13 (Russellsches Paradoxon)**.** Die oben gegebene Charakterisierung von Mengen von Cantor ist aus mathematischer Sicht natürlich sehr schwammig. In der Tat hat Bertrand Russell kurz darauf bemerkt, dass sie sogar schnell zu Widersprüchen führt. Er betrachtet dazu

$$M = \{A : A \text{ ist eine Menge mit } A \notin A\}, \tag{$*$}$$

also „die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten". Sicherlich ist es eine merkwürdige Vorstellung, dass eine Menge sich selbst als Element enthalten könnte – im Sinne von Cantors Charakterisierung wäre die Definition $(*)$ aber zulässig. Fragen wir uns nun allerdings, ob sich die so konstruierte Menge M selbst als Element enthält, so erhalten wir sofort einen Widerspruch: Wenn $M \in M$ gilt, so würde das nach der Definition $(*)$ ja gerade bedeuten, dass $M \notin M$ ist – und das wiederum, dass doch $M \in M$ ist. Man bezeichnet dies als das *Russellsche Paradoxon*.

Die Ursache für diesen Widerspruch ist, dass die Definition $(*)$ rückbezüglich ist: Wir wollen eine neue Menge M konstruieren, verwenden dabei aber auf der rechten Seite der Definition *alle Mengen*, also u. a. auch die Menge M, die wir gerade erst definieren wollen. Das ist in etwa so, als würdet ihr im Beweis eines Satzes die Aussage des Satzes selbst verwenden – und das ist natürlich nicht zulässig.

Man muss bei der Festlegung, was Mengen sind und wie man sie bilden kann, also eigentlich viel genauer vorgehen, als es Cantor getan hat. Heutzutage verwendet man hierzu in der Regel das im Jahre 1930 aufgestellte Axiomensystem von Zermelo und Fraenkel, das genau angibt, wie man aus bekannten Mengen neue konstruieren darf: z. B. indem man sie schneidet oder vereinigt, oder aus bereits bekannten Mengen Elemente mit einer bestimmten Eigenschaft auswählt. Wir wollen dies hier in dieser Vorlesung aber nicht weiter thematisieren und uns mit der naiven Mengencharakterisierung von Cantor begnügen (sowie der Versicherung meinerseits, dass schon alles in Ordnung ist, wenn wir neue Mengen immer nur aus alten konstruieren und keine rückbezüglichen Definitionen hinschreiben). Genaueres zum Zermelo-Fraenkel-Axiomensystem könnt ihr z. B. in [E, Kapitel 13] nachlesen.

Notation 1.14 (Reelle Zahlen)**.** Unser wichtigstes Beispiel für eine Menge ist die Menge der **reellen Zahlen**, die wir mit $\mathbb{R}$ bezeichnen werden. Wir wollen die Existenz der reellen Zahlen in dieser Vorlesung axiomatisch voraussetzen und begnügen uns daher an dieser Stelle damit zu sagen, dass man sie sich als die Menge der Punkte auf einer Geraden (der „Zahlengeraden") vorstellen kann. Zusätzlich werden wir in den nächsten beiden Kapiteln die mathematischen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ exakt angeben (und ebenfalls axiomatisch voraussetzen) – und zwar genügend viele Eigenschaften, um $\mathbb{R}$ dadurch eindeutig zu charakterisieren.

Ich möchte hier noch einmal betonen, dass man die Existenz und die Eigenschaften der reellen Zahlen eigentlich nicht voraussetzen müsste: Man kann das auch allein aus den Axiomen der Logik und Mengenlehre herleiten! Dies wäre jedoch relativ aufwendig und würde euch im Moment mehr verwirren als helfen, daher wollen wir hier darauf verzichten. Wer sich trotzdem dafür interessiert, kann die Einzelheiten hierzu in [E, Kapitel 1 und 2] nachlesen.

Außer den reellen Zahlen sind vor allem noch die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ wichtig:

(a) die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ der **natürlichen Zahlen** (Achtung: In der Literatur wird die 0 manchmal nicht mit zu den natürlichen Zahlen gezählt!);

(b) die Menge $\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$ der **ganzen Zahlen**;

(c) die Menge $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p,q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ der **rationalen Zahlen**.

Offensichtlich sind diese Mengen ineinander enthalten: Es gilt $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$. Teilmengen von $\mathbb{R}$, die durch Ungleichungen gegeben sind, schreiben wir in der Regel, indem wir die Ungleichungsbedingung als Index an das Symbol $\mathbb{R}$ schreiben, z. B. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ für die Menge $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ aller nicht-negativen Zahlen.

Notation 1.15. Sind M und N Mengen, so bezeichnen wir mit ...

(a) $M \cap N := \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}$ die **Schnittmenge** von M und N. Gilt $M \cap N = \emptyset$, so sagen wir, dass M und N **disjunkt** sind.

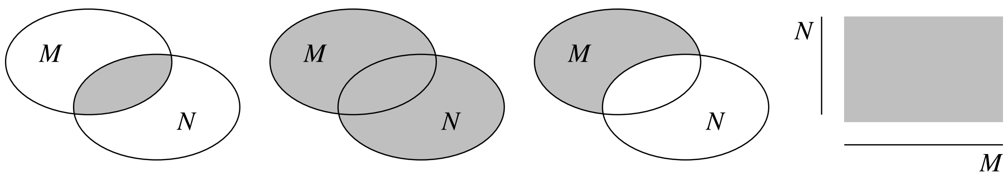
(b) $M \cup N := \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$ die **Vereinigungsmenge** von M und N. Im Fall einer **disjunkten Vereinigung** mit $M \cap N = \emptyset$ schreiben wir statt $M \cup N$ auch $M \,\dot{\cup}\, N$.

(c) $M \backslash N := \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}$ die **Differenzmenge** von M und N.

(d) $M \times N := \{(x,y) : x \in M, y \in N\}$ die **Produktmenge** bzw. das Produkt von M und N. Die Schreibweise (x,y) steht hierbei für ein **geordnetes Paar**, d. h. einfach für die Angabe eines Elements aus M und eines aus N (wobei es auch im Fall $M = N$ auf die Reihenfolge ankommt, d. h. (x,y) ist genau dann gleich (x',y') wenn $x = x'$ und $y = y'$). Im Fall $M = N$ schreibt man $M \times N = M \times M$ auch als M^2.

(e) $\mathscr{P}(M) := \{A : A \text{ ist Teilmenge von } M\}$ die **Potenzmenge** von M.

Das Symbol „$:=$“ bedeutet hierbei, dass der Ausdruck auf der linken Seite durch die rechte Seite definiert wird. Die Konstruktionen (a) bis (d) können durch die folgenden Bilder veranschaulicht werden. Natürlich sind sie auch für mehr als zwei Mengen möglich; aus der Schule kennt ihr zum Beispiel sicher den Fall $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.



$M \cap N$ $\quad$ $M \cup N$ $\quad$ $M \backslash N$ $\quad$ $M \times N$

Die Potenzmenge $\mathscr{P}(M)$ aller Teilmengen einer gegebenen Menge M lässt sich dagegen nicht so einfach durch ein Bild darstellen. Es ist z. B.

$$\mathscr{P}(\{0,1\}) = \big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\big\}.$$

Aufgabe 1.16. Wie lautet die Negation der folgenden Aussagen? Formuliere außerdem die Aussage (a) in Worten (also analog zu (b)) sowie die Aussage (b) mit Quantoren und anderen mathematischen Symbolen (also analog zu (a)).

(a) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N} \colon n = 2m$.

(b) Zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen gibt es noch eine weitere reelle Zahl.

(c) Sind M,N,R Mengen mit $R \subset N \subset M$, so ist $M \backslash N \subset M \backslash R$.

Aufgabe 1.17. Es seien A, B, C Aussagen und M, N, R Mengen. Man zeige:

(a) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ und $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

(b) $M \cup (N \cap R) = (M \cup N) \cap (M \cup R)$ und $M \cap (N \cup R) = (M \cap N) \cup (M \cap R)$.

Aufgabe 1.18. Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige gegebene x und M äquivalent zueinander? Zeige jeweils die Äquivalenz bzw. widerlege sie durch ein Gegenbeispiel.

(a) $x \in M$	(b) $\{x\} \subset M$	(c) $\{x\} \cap M \neq \emptyset$
(d) $\{x\} \in M$	(e) $\{x\} \backslash M = \emptyset$	(f) $M \backslash \{x\} = \emptyset$

Aufgabe 1.19. Man beweise oder widerlege: Für alle Mengen $A \subset M$ und $A' \subset M'$ gibt es Teilmengen B und C von M sowie B' und C' von M', so dass

$$(M \times M') \setminus (A \times A') = (B \times B') \cupdot (C \times C').$$

Könnt ihr die Aussage durch eine Skizze veranschaulichen?

2. Relationen und Funktionen

Nachdem wir Mengen eingeführt haben, wollen wir nun auch mehrere von ihnen miteinander in Beziehung setzen können. Das Grundkonzept hierfür ist das einer Relation.

Definition 2.1 (Relationen)**.** Es seien M und N zwei Mengen. Eine **Relation** zwischen M und N ist eine Teilmenge R des Produkts $M \times N$. Für $x \in M$ und $y \in N$ mit $(x,y) \in R$ sagen wir dann „*x steht (bezüglich R) in Relation zu y*". Ist $M = N$, so nennen wir R auch eine *Relation auf M*.

Bemerkung 2.2. Um eine Relation R anzugeben, also eine Teilmenge $R \subset M \times N$ zu definieren, müssen wir demzufolge einfach für alle Paare (x,y) mit $x \in M$ und $y \in N$ festlegen, ob $(x,y) \in R$ gelten, also ob x in Relation zu y stehen soll.

Wie wir in diesem Kapitel sehen werden, werden Relationen in der Mathematik für sehr unterschiedliche Konzepte verwendet – z. B. um Zahlen miteinander zu vergleichen wie in Beispiel 2.3, um eine Menge auf eine andere abzubilden wie in Abschnitt 2.A, oder um die Elemente einer Menge nach bestimmten Kriterien zu Klassen zusammenzufassen wie in Abschnitt 2.B. Dementsprechend sind für die Aussage „x steht bezüglich R in Relation zu y" auch je nach Anwendung ganz unterschiedliche Notationen üblich. Für allgemeine, nicht näher spezifizierte Relationen schreibt man hierfür oft $x R y$.

Beispiel 2.3 (Kleiner-Relation)**.** Für $M = N = \mathbb{R}$ betrachten wir die Relation

$$R = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R} \text{ mit } x < y\},$$

für die x also genau dann in Relation zu y steht, wenn $x < y$ gilt. Man nennt R deshalb auch die *Kleiner-Relation* auf $\mathbb{R}$. Die Notation „$x R y$" aus Bemerkung 2.2 stimmt in diesem Fall also mit der Schreibweise „$x < y$" überein, wenn man die Relation R direkt mit dem Symbol „$<$" bezeichnet. In der Tat ist es aus diesem Grund bei manchen Relationen üblich, sie gleich mit Symbolen statt mit Buchstaben zu benennen.

2.A Funktionen

Die mit Abstand wichtigsten Relationen sind ohne Zweifel die Funktionen, die ihr natürlich bereits hinlänglich aus der Schule kennt. Wir wollen sie hier nun exakt einführen und ihre ersten Eigenschaften untersuchen.

Definition 2.4 (Funktionen)**.** Es seien M und N zwei Mengen.

(a) Eine **Funktion** oder **Abbildung** f von M nach N, geschrieben $f: M \to N$, ist eine Relation zwischen M und N, bezüglich der jedes Element x von M zu *genau einem* Element y von N in Relation steht. Wir schreiben dies dann als $x \mapsto y$ oder $y = f(x)$ und sagen, y ist das **Bild** von x unter f bzw. der **Wert** von f in x.

(b) Für eine Funktion $f: M \to N$ bezeichnet man die Menge M als **Definitionsmenge**, **Startmenge** oder **Startraum** von f. Die Menge N heißt **Zielmenge** oder **Zielraum** von f.

Bemerkung 2.5.

(a) Um eine Funktion komplett festzulegen, müssen wir zuerst einmal den Start- und Zielraum angeben, und dann schließlich noch von jedem Element des Startraums sagen, auf welches Element des Zielraums es abgebildet wird. In welcher Form wir diese Zuordnung angeben – ob durch eine Formel, durch explizites Auflisten der Funktionswerte aller Elemente des Startraums, oder irgendwie anders – spielt dabei keine Rolle. So sind z. B.

$$f: \{0,1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x^2, \quad g: \{0,1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x^3, \quad h: \{0,1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

trotz ihrer verschieden aussehenden Vorschriften dieselbe Funktion (d. h. es gilt $f = g = h$), da alle drei den gleichen Start- und Zielraum haben und aus den gleichen Zuordnungen $0 \mapsto 0$ und $1 \mapsto 2$ bestehen. Mit anderen Worten sind zwei Funktionen $f,g\colon M \to N$ also genau dann gleich, wenn sie an jedem Punkt die gleichen Werte besitzen, also wenn gilt

$$\forall x \in M\colon f(x) = g(x).$$

(b) Man sieht leider oft, dass eine Funktion $f\colon M \to N$ als $f(x)$ geschrieben wird. Es ist wichtig zu verstehen, dass diese Notation gemäß Definition 2.4 falsch ist: Mit $f(x)$ wird *der Wert der Funktion f in einem Punkt $x \in M$* bezeichnet. Somit ist $f(x)$ (für gegebenes x) ein Element von N, und damit ein ganz anderes mathematisches Objekt als die Funktion selbst, die wir nur mit f bezeichnen und die eine Relation zwischen M und N ist. Dies mag auf den ersten Blick spitzfindig erscheinen – wir werden aber später noch oft Mengen sehen, deren Elemente Funktionen sind, und dann ist es natürlich wichtig, dies von der Menge ihrer Funktions*werte* zu unterscheiden.

Beispiel 2.6.

(a) Die Zuordnungen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{für } x \le 0 \\ x & \text{für } x \ge 0 \end{cases}$$

sind in dieser Form keine zulässigen Funktionsdefinitionen, weil im Fall von f der Zahl 0 kein gültiger Funktionswert zugeordnet wird und im Fall g für die Zahl 0 zwei (sich widersprechende) Festlegungen des Funktionswertes gemacht werden. Dies lässt sich jedoch in beiden Fällen leicht reparieren, z. B. indem man die Festlegungen abändert in

$$f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \ge 0 \end{cases}.$$

(b) Zu jeder Menge M gibt es die **identische Abbildung**

$$\mathrm{id}_M\colon M \to M,\ x \mapsto x,$$

die jedes Element auf sich selbst abbildet.

(c) Ist $f\colon M \to N$ eine Abbildung und $A \subset M$ eine Teilmenge des Startraums, so erhält man durch die Einschränkung der Definitionsmenge von M auf A eine neue Abbildung, die wir mit

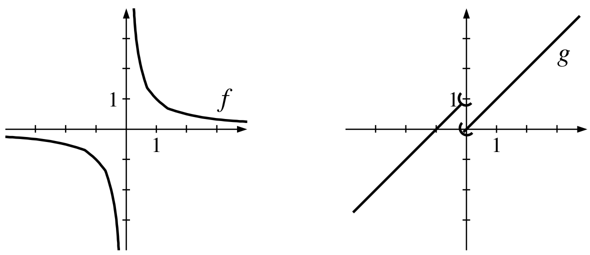
$$f|_A\colon A \to N,\ x \mapsto f(x)$$

bezeichnen und die die **Einschränkung** von f auf A genannt wird. Genauso kann man natürlich auch die Zielmenge N auf eine Teilmenge B einschränken, wenn f nur Werte in B annimmt. Es ist üblich, bei einer derartigen Einschränkung der Zielmenge immer noch den gleichen Namen für die Abbildung zu verwenden, also dann $f\colon M \to B$ zu schreiben (auch wenn es sich dabei um eine andere Funktion als das ursprüngliche $f\colon M \to N$ handelt).

Bemerkung 2.7 (Graph einer Abbildung)**.** Zu einer Abbildung $f\colon M \to N$ heißt die Menge

$$\{(x, f(x)) : x \in M\} \quad \subset M \times N$$

der **Graph** von f. Sind M und N Teilmengen von $\mathbb{R}$, so ist dieser Graph also eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, und man kann ihn leicht zeichnen und dadurch die Abbildung veranschaulichen. Für die Abbildungen aus Beispiel 2.6 (a) sieht dies z. B. so aus:



Beachte, dass dieser Graph nach den Definitionen 2.1 und 2.4 eigentlich sogar genau das gleiche ist wie die Funktion selbst, nämlich die Teilmenge des Produkts $M \times N$, die aus den Paaren (x,y) besteht, für die x bezüglich f in Relation zu y steht, also $y = f(x)$ gilt. Der Begriff des Graphen soll hier also nur noch einmal deutlich machen, dass man sich die Funktion gerade wirklich als ein derart „grafisches" Objekt vorstellt und nicht als eine „Zuordnung" von M nach N.

In der Definition 2.4 einer Abbildung $f: M \to N$ verlangen wir, dass jedem Element von M genau ein Element von N zugeordnet wird. Wir fordern jedoch nicht auch umgekehrt, dass jedes Element des Zielraums N das Bild von genau einem Element von M ist, oder dass es überhaupt als Bild eines Elements von M auftritt. Abbildungen, die diese Eigenschaften dennoch besitzen, haben spezielle Namen, die wir jetzt einführen wollen.

Definition 2.8 (Eigenschaften von Abbildungen)**.** Es sei $f: M \to N$ eine Abbildung.

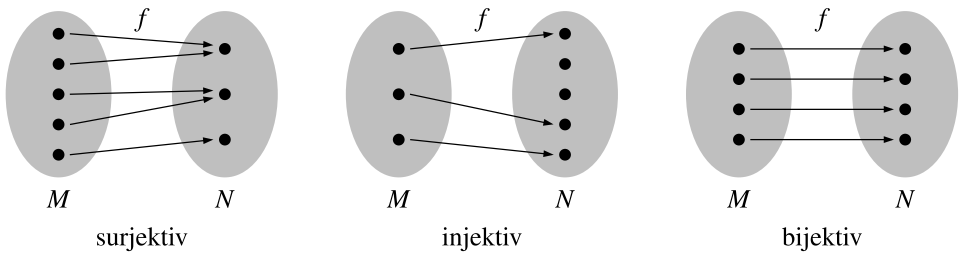
(a) Ist $y \in N$ und $x \in M$ mit $f(x) = y$, so heißt x ein **Urbild** von y unter f.

(b) Hat jedes $y \in N$ ...

- *mindestens* ein Urbild, so heißt f **surjektiv**.

  In Quantoren bedeutet dies: $\forall y \in N \; \exists x \in M: \; f(x) = y$.
- *höchstens* ein Urbild, so heißt f **injektiv**.

  In Quantoren bedeutet dies: $\forall x_1, x_2 \in M: \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. (Also: Haben zwei Elemente des Startraums das gleiche Bild, so müssen sie bereits dasselbe Element sein.)
- *genau* ein Urbild, ist f also surjektiv und injektiv, so heißt f **bijektiv**.



02

Beispiel 2.9. Betrachten wir noch einmal die Funktionen aus Beispiel 2.6 (a), so ist die Funktion f nicht surjektiv (und damit auch nicht bijektiv), da das Element 0 des Zielraums kein Urbild hat. Sie ist jedoch injektiv: Sind $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$, also $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$, so folgt durch Multiplikation mit $x_1 x_2$ sofort $x_1 = x_2$.

Die Funktion g dagegen ist surjektiv: Eine Zahl $y \in \mathbb{R}$ hat als Urbild $x = y$ für $y \geq 0$, und $x = y - 1$ für $y < 0$. Sie ist allerdings nicht injektiv, denn es ist $g(-1) = g(0) = 0$.

Beachte, dass diese Eigenschaften auch an den Graphen in Bemerkung 2.7 ablesbar sind: Surjektivität bzw. Injektivität bedeuten gerade, dass jede horizontale Gerade auf der Höhe eines Wertes im Zielraum den Funktionsgraphen in mindestens bzw. höchstens einem Punkt schneidet. Wichtig ist auch, dass diese Eigenschaften von der Wahl des Start- und Zielraums abhängen: So wird z. B. f bijektiv, wenn man den Zielraum $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ ersetzt, und g injektiv, wenn man den Startraum auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ einschränkt (in der Notation von Beispiel 2.6 (c) also $g|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ betrachtet).

Aufgabe 2.10. Wie viele Abbildungen gibt es zwischen den Mengen $\{1,2,3,4\}$ und $\{1,2,3,4,5,6\}$? Wie viele von ihnen sind injektiv?

Bilder und Urbilder unter Abbildungen betrachtet man oft auch von ganzen Mengen statt nur von Punkten:

Definition 2.11 (Bild und Urbild von Mengen)**.** Es sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung.

(a) Für $A \subset M$ heißt die Menge

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} \quad \subset N$$

(also die Menge aller Bilder von Punkten in A) das **Bild** von A unter f.

(b) Ist $B \subset N$, so heißt die Menge

$$f^{-1}(B) := \{x \in M : f(x) \in B\} \quad \subset M$$

(also die Menge aller Urbilder von Punkten in B) das **Urbild** von B unter f.

Bemerkung 2.12. Die Grundidee der Notation in Definition 2.11 (a) ist: Schreiben wir als Argument einer Funktion $f\colon M \to N$ eine *Teilmenge* statt einem *Element* von M, so bedeutet dies, dass wir alle Werte $f(x)$ für $x \in M$ zusammen nehmen und diese wieder in einer Menge zusammenfassen. Diese Schreibweise verwendet man auch oft, wenn die Funktion aus einer Rechenverknüpfung besteht, wie z. B. in

$$\mathbb{N}+\tfrac{1}{2} := \left\{n+\tfrac{1}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},\tfrac{5}{2},\dots\right\} \quad \text{oder} \quad 3\mathbb{Z} := \{3n : n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots,-6,-3,0,3,6,\dots\}.$$

Beispiel 2.13. Für die Funktion $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ aus Beispiel 2.6 (a) ist $f(\mathbb{R}_{>0}) = \mathbb{R}_{>0}$ und $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

Beispiel 2.14. Zwischen den Konstruktionen von Bild und Urbild aus Definition 2.11 und den Mengenoperationen aus Abschnitt 1.B gibt es sehr viele Beziehungen. Um einmal exemplarisch zu sehen, wie derartige Beziehungen aussehen und bewiesen werden können, wollen wir nun zeigen, dass für jede Abbildung $f\colon M \to N$ und zwei beliebige Teilmengen $A,B \subset M$ stets

$$f(A)\backslash f(B) \subset f(A\backslash B) \tag{$*$}$$

gilt.

Zum Beweis müssen wir zeigen, dass jedes Element der linken Menge auch in der rechten Menge liegt. Es sei also $y \in f(A)\backslash f(B)$ beliebig. Insbesondere ist damit $y \in f(A)$, nach Definition 2.11 (a) also $y = f(x)$ für ein $x \in A$. Würde nun auch $x \in B$ gelten, so hätten wir wegen $y = f(x)$ auch $y \in f(B)$, im Widerspruch zu $y \in f(A)\backslash f(B)$. Also ist $x \notin B$, und damit $x \in A\backslash B$. Damit besagt $y = f(x)$ aber gerade $y \in f(A\backslash B)$. Insgesamt haben wir somit die behauptete Teilmengenbeziehung $(*)$ gezeigt.

Beachte allerdings, dass in $(*)$ im Allgemeinen keine Gleichheit gilt: Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ mit $A = \{-1,1\}$ und $B = \{-1\}$ ist

$$f(A)\backslash f(B) = \{1\}\backslash\{1\} = \emptyset, \quad \text{aber} \quad f(A\backslash B) = f(\{1\}) = \{1\}.$$

Aufgabe 2.15. Beweise die folgenden Teilmengenbeziehungen und untersuche jeweils, ob auch die Gleichheit gilt.

(a) Für alle Mengen M,A,B gilt $M\backslash(A\cup B) \subset (M\backslash A)\cap(M\backslash B)$.

(b) Ist $f\colon M \to N$ eine Abbildung und $A \subset N$, so ist $f\left(f^{-1}(A)\right) \subset A$.

Aufgabe 2.16. Es sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Finde für das Symbol $\Box$ jeweils eine der Mengenbeziehungen $\subset, =, \supset$, so dass die folgenden Aussagen wahr werden, und beweise die so entstandenen Aussagen!

(a) $f(A)\cap f(B) \,\Box\, f(A\cap B)$ für alle $A,B \subset M$.

(b) $f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B) \,\Box\, f^{-1}(A\cap B)$ für alle $A,B \subset N$.

Als Nächstes wollen wir nun die euch sicher bereits bekannte Verkettung, also die Hintereinanderausführung von Funktionen einführen.

Definition 2.17 (Verkettung von Funktionen)**.** Es seien $f: M \to N$ und $g: N \to R$ zwei Abbildungen (also so dass die Zielmenge von f gleich der Startmenge von g ist). Dann heißt die Abbildung

$$g \circ f: M \to R, \; x \mapsto g(f(x))$$

die **Verkettung** von f und g.

Bemerkung 2.18. Bei der Verkettung zweier Funktionen kommt es natürlich auf die Reihenfolge an, allein schon weil in der Situation von Definition 2.17 in der Regel der Zielraum von g ja nicht mit dem Startraum von f übereinstimmt und die „umgekehrte Verkettung“ $f \circ g$ damit gar nicht definierbar wäre. Beachte dabei, dass die Notation $g \circ f$ lautet, obwohl wir zuerst f (von M nach N) und dann g (von N nach R) anwenden – man liest $g \circ f$ daher manchmal auch als „g nach f“. Diese vielleicht etwas merkwürdig erscheinende Notation kommt einfach daher, dass die Buchstaben in der gleichen Reihenfolge stehen sollen wie bei der Abbildungsvorschrift $x \mapsto g(f(x))$.

Wir werden nun unser erstes *Lemma* beweisen – „Lemma“ ist griechisch und bedeutet eigentlich „Annahme“, aber in der Mathematik wird dieser Begriff für einen *Hilfssatz* verwendet, also für ein kleines Zwischenresultat, das vielleicht für sich genommen nicht übermäßig überraschend oder interessant ist, aber das in späteren Beweisen immer wieder nützlich sein wird. In unserem momentanen Fall geht es einfach darum, dass die Verkettung von Abbildungen *assoziativ* ist (siehe auch Definition 3.1):

Lemma 2.19 (Assoziativität der Verkettung)**.** *Sind $f: M \to N$, $g: N \to R$ und $h: R \to S$ drei Abbildungen, so gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. (Man schreibt für diese Abbildung daher oft auch einfach $h \circ g \circ f$.)*

Beweis. Nach Definition 2.4 können wir die Gleichheit zweier Funktionen zeigen, indem wir für jedes Element der Startmenge nachweisen, dass sein Bild unter beiden Funktionen übereinstimmt. Dies rechnen wir nun einfach durch wiederholtes Einsetzen von Definition 2.17 nach: Es gilt

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

und

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

Da diese beiden Ausdrücke übereinstimmen, ist das Lemma bewiesen. □

Am Ende dieses Abschnitts wollen wir schließlich noch das Konzept von Umkehrfunktionen bijektiver Funktionen einführen.

Definition 2.20 (Umkehrfunktionen)**.** Es sei $f: M \to N$ eine bijektive Funktion. Dann heißt

$$f^{-1}: N \to M, \; y \mapsto \text{das eindeutige Urbild von } y \text{ unter } f$$

die **Umkehrfunktion** bzw. **Umkehrabbildung** von f.

Bemerkung 2.21. Für die Umkehrfunktion f^{-1} einer bijektiven Funktion $f: M \to N$ gilt nach Konstruktion offensichtlich $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N$.

Gibt es umgekehrt zu einer Funktion $f: M \to N$ eine Abbildung $g: N \to M$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$, so ist f bijektiv:

- f ist surjektiv: Ist $y \in N$ beliebig, so ist $x := g(y) \in M$ ein Urbild von y unter f, denn es ist $f(x) = f(g(y)) = y$.
- f ist injektiv: Sind $x_1, x_2 \in M$ mit $f(x_1) = f(x_2)$, so folgt durch Anwenden von g sofort auch $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, und damit $x_1 = x_2$.

Beispiel 2.22. Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+1$ ist bijektiv, und ihre Umkehrabbildung ist $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x-1$. In der Tat gilt nämlich für alle $x \in \mathbb{R}$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = (x+1) - 1 = x \quad \text{und} \quad (f \circ f^{-1})(x) = (x-1) + 1 = x.$$

Bemerkung 2.23 (Urbilder und Umkehrabbildungen)**.** Beachte, dass wir das Urbild einer Menge unter einer Abbildung $f\colon M\to N$ in Definition 2.11 (b) mit dem gleichen Symbol f^{-1} bezeichnet haben wie (im Fall einer bijektiven Abbildung) die Umkehrabbildung aus Definition 2.20. Das ist vielleicht etwas unglücklich gewählt, aber in der Literatur so fest verankert, dass wir hier nicht davon abweichen wollen. Bei genauem Hinschauen kann man aber auch immer feststellen, was gemeint ist:

> Ist $f\colon M\to N$ eine Abbildung, so bezeichnet ...
>
> ... $f^{-1}(B)$ für eine *Menge* $B\subset N$ das *Urbild* von B wie in Definition 2.11 (b); es existiert für jede Abbildung f.
>
> ... $f^{-1}(y)$ für ein *Element* $y\in B$ den *Wert der Umkehrabbildung* bei y wie in Definition 2.20; er existiert nur für bijektives f.

Letztlich hängen diese beiden Notationen aber auch eng miteinander zusammen: Ist f bijektiv und ist $x\in M$ mit $f(x)=y$, so ist $f^{-1}(y)=x$ (mit f^{-1} im Sinne der Umkehrabbildung) und $f^{-1}(\{y\})=\{x\}$ (mit f^{-1} im Sinne des Urbildes).

Aufgabe 2.24.

(a) Untersuche die Abbildung $f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ x\mapsto 3x+2$ auf Injektivität und Surjektivität.

(b) Untersuche die Abbildung $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ (x,y)\mapsto(xy,x+1)$ auf Injektivität und Surjektivität.

(c) Man zeige: Sind $f\colon M\to N$ und $g\colon N\to R$ surjektiv, so ist auch $g\circ f\colon M\to R$ surjektiv.

Aufgabe 2.25. Es seien $f\colon M\to N$ und $g\colon N\to R$ bijektiv. Zeige, dass dann auch $f^{-1}\colon N\to M$ und $g\circ f\colon M\to R$ bijektiv sind.

Aufgabe 2.26. Man beweise oder widerlege:

(a) Sind $f\colon M\to N$ und $g\colon N\to R$ zwei Abbildungen und ist $g\circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

(b) Sind $f\colon M\to N$ und $g\colon N\to R$ zwei Abbildungen und ist $g\circ f$ injektiv, so ist auch g injektiv.

Aufgabe 2.27. Es sei $f\colon M\to N$ eine Abbildung zwischen nicht-leeren Mengen. Man zeige:

(a) f ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $g\colon N\to M$ gibt mit $f\circ g=\mathrm{id}_N$.

(b) f ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $g\colon N\to M$ gibt mit $g\circ f=\mathrm{id}_M$.

Aufgabe 2.28. Es sei $f : M\to N$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen. Man beweise:

$$f \text{ ist surjektiv} \quad\Leftrightarrow\quad \text{für alle } A,B\subset N \text{ mit } f^{-1}(A)=f^{-1}(B) \text{ gilt } A=B.$$

Aufgabe 2.29. Für diese Aufgabe nennen wir eine Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ...

- *monoton wachsend*, wenn gilt: $\forall x,y\in\mathbb{R}: x<y\Rightarrow f(x)\le f(y)$;
- *irgendwann konstant*, wenn gilt: $\exists x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R}: x\le y\Rightarrow f(x)=f(y)$;
- *interessant*, wenn gilt: $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R}: x<y$ und $f(x)<f(y)$.

Man zeige:

(a) Die Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2$ ist interessant.

(b) Für die Eigenschaften „monoton wachsend“ und „irgendwann konstant“ gilt, dass mit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ auch deren Summenfunktion

$$f+g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto f(x)+g(x)$$

diese Eigenschaft hat.

(c) Ist $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monoton wachsend, aber nicht interessant, so ist f irgendwann konstant.

2.B Äquivalenzrelationen

Am Anfang dieses Kapitels haben wir allgemeine Relationen eingeführt, als einzigen Spezialfall davon aber bisher nur die Funktionen ausführlicher betrachtet. Wir wollen daher nun noch einen ganz anderen wichtigen Typ von Relationen studieren, die sogenannten Äquivalenzrelationen.

Angenommen, wir möchten eine Menge M untersuchen, die uns zunächst einmal zu groß oder zu kompliziert erscheint. Es gibt dann zwei prinzipiell verschiedene Möglichkeiten, wie man daraus eine kleinere bzw. einfachere Menge machen kann:

- Wir können uns auf eine Teilmenge von M beschränken – dann schließen wir allerdings manche Elemente von M von unserer Untersuchung aus.
- Wir können zwar alle Elemente von M betrachten, aber manche von ihnen miteinander identifizieren bzw. zu Klassen zusammenfassen – d. h. sie als gleich bzw. „äquivalent" ansehen, wenn sie für das zu untersuchende Problem ähnliche Eigenschaften haben.

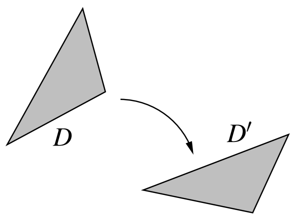
Diese zweite Idee der Identifizierung ähnlicher Elemente führt zum Begriff der Äquivalenzrelationen. Sie klingt vielleicht zunächst etwas abstrakt, ist euch aber sicher schon an vielen Stellen begegnet. Hier sind zwei einfache Beispiele dafür.

Beispiel 2.30.

(a) Eine analoge Uhr vereinfacht die recht große Menge aller (vergangenen und zukünftigen) Zeitpunkte, die wir uns als Zeitachse $M = \mathbb{R}$ vorstellen können, indem sie nach jeweils 12 Stunden wieder dasselbe anzeigt. Sie identifiziert also zwei Zeitpunkte $x, y \in \mathbb{R}$ (gemessen in Stunden) miteinander, wenn $x - y$ ein ganzzahliges Vielfaches von 12 ist. Dadurch „verkleinert" sie die ursprüngliche Zeitachse auf ein gut überschaubares Intervall von 12 Stunden – und wir alle wissen, dass uns ein Blick auf die Uhr in vielen Fällen ausreicht, wenn wir den aktuellen Zeitpunkt wissen wollen, auch wenn uns das nichts über das Datum oder die Tageszeit (vormittags oder nachmittags) sagt.

(b) Als „mathematischeres" Beispiel können wir die Menge M aller Dreiecke in der Ebene $\mathbb{R}^2$ betrachten.

Bekanntlich heißen zwei solche Dreiecke $D, D' \in M$ zueinander *kongruent*, wenn sie wie im Bild rechts durch eine Drehung und / oder Verschiebung auseinander hervorgehen – wir schreiben dies im Folgenden als $D \sim D'$. Zueinander kongruente Dreiecke werden oft miteinander identifiziert, nämlich immer dann, wenn es uns nur auf die Form bzw. Größe der Dreiecke, aber nicht auf ihre Lage in der Ebene ankommt.



Wenn wir z. B. sagen, dass die drei Seitenlängen ein Dreieck eindeutig bestimmen, dann meinen wir damit in Wirklichkeit, dass sie das Dreieck *bis auf Kongruenz* eindeutig bestimmen, also nur die Form und Größe festlegen, aber nicht die Lage des Dreiecks in $\mathbb{R}^2$. Formal kann man dies so ausdrücken: zu einem Dreieck D nennt man

$$\overline{D} := \{D' \in M : D' \sim D\},$$

also die Menge aller zu D kongruenten Dreiecke, die *Kongruenzklasse* von D. Die Menge aller dieser Kongruenzklassen bezeichnen wir mit

$$M/\sim \; := \; \{\overline{D} : D \in M\}.$$

Man kann dann z. B. sagen, dass die Seitenlängen eines Dreiecks ein eindeutiges Element in $M/\sim$ bestimmen, also eine eindeutige Kongruenzklasse von Dreiecken festlegen – nicht aber ein eindeutiges Element von M.

Mit der Idee dieser Beispiele im Kopf wollen wir nun den Begriff der Äquivalenzrelation exakt definieren.

Definition 2.31 (Äquivalenzrelationen)**.** Es sei $\sim$ wie in Definition 2.1 eine Relation auf einer Menge M. Wie in Bemerkung 2.2 schreiben wir $x \sim y$, wenn x und y bezüglich $\sim$ in Relation stehen.

Man nennt $\sim$ eine **Äquivalenzrelation** auf M, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

(a) (**Reflexivität**) Für alle $x \in M$ gilt $x \sim x$.

(b) (**Symmetrie**) Sind $x, y \in M$ mit $x \sim y$, so gilt auch $y \sim x$.

(c) (**Transitivität**) Sind $x, y, z \in M$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$, so gilt auch $x \sim z$.

In diesem Fall sagt man statt $x \sim y$ auch, dass x (bezüglich dieser Relation) zu y **äquivalent** ist. Zu $x \in M$ heißt dann die Menge

$$\overline{x} := \{y \in M : y \sim x\}$$

aller Elemente, die zu x äquivalent sind, die **Äquivalenzklasse** bzw. einfach **Klasse** von x; jedes Element dieser Menge nennt man einen **Repräsentanten** dieser Klasse. Die Menge aller Äquivalenzklassen schreiben wir als

$$M/\sim \; := \; \{\overline{x} : x \in M\}.$$

Beispiel 2.32.

(a) Das Beispiel 2.30 (a) einer analogen Uhr lässt sich mathematisch exakt wie folgt definieren: Auf $M = \mathbb{R}$ betrachten wir die Relation

$$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; \text{es gibt ein } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } x - y = 12k. \tag{$*$}$$

Dies ist in der Tat eine Äquivalenzrelation, denn für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

- Reflexivität: Es gilt $x - x = 12 \cdot 0 = 12k$ mit $k = 0 \in \mathbb{Z}$, also $x \sim x$.
- Symmetrie: Es gelte $x \sim y$, also $x - y = 12k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Durch Multiplikation mit -1 folgt dann auch $y - x = 12 \cdot (-k) = 12k'$ mit $k' := -k \in \mathbb{Z}$, und damit $y \sim x$.
- Transitivität: Es gelte $x \sim y$ und $y \sim z$, nach Definition der Relation also $x - y = 12k$ und $y - z = 12k'$ für gewisse $k, k' \in \mathbb{Z}$ (beachte, dass der Wert von k in ($*$) von x und y abhängt und wir daher für die Differenz $y - z$ eine neue Variable k' brauchen). Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhalten wir $x - z = 12(k + k') = 12k''$ mit $k'' := k + k' \in \mathbb{Z}$, und damit $x \sim z$.

Die Äquivalenzklasse z. B. von $2 \in \mathbb{R}$ ist

$$\overline{2} = \{x \in \mathbb{R} : x \sim 2\} = \{x \in \mathbb{R} : \text{es gibt ein } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } x - 2 = 12k\} = \{2 + 12k : k \in \mathbb{Z}\},$$

also die Menge aller Zeitpunkte, zu denen die Uhr auf 2 steht. Jeder beliebige Zeitpunkt $x \in \mathbb{R}$, zu dem die Uhr auf 2 steht, ist ein Repräsentant dieser Klasse. Die Menge $M/\sim$ entspricht allen möglichen Ständen der Uhr; wir können sie uns anschaulich als einen „Kreis mit Umfang 12“ vorstellen.

(b) Die Kongruenz von Dreiecken aus Beispiel 2.30 (b) ist ebenfalls eine Äquivalenzrelation (es ist offensichtlich, dass sie die Eigenschaften aus Definition 2.31 erfüllt). Die Äquivalenzklassen sind in diesem Fall genau die Kongruenzklassen.

(c) Die Kleiner-Relation auf $\mathbb{R}$ aus Beispiel 2.3, also die Relation, für die für $x, y \in \mathbb{R}$ genau dann $x \sim y$ gilt, wenn $x < y$ ist, ist keine Äquivalenzrelation, da sie weder reflexiv noch symmetrisch ist.

Beachte, dass bei unseren Äquivalenzrelationen aus Beispiel 2.32 (a) und (b) jedes Element von M in genau einer Äquivalenzklasse liegt: Zu jedem Zeitpunkt hat eine analoge Uhr genau einen Stand, und jedes Dreieck in der Ebene liegt in genau einer Kongruenzklasse. Dies beschreibt genau unsere Idee, dass wir die Elemente von M auf eine bestimmte Art zu Klassen zusammenfassen wollen. Allgemein sind die Axiome einer Äquivalenzrelation aus Definition 2.31 anschaulich genau diejenigen, die man braucht, damit die Relation sinnvoll eine solche Identifizierung von Elementen zu Klassen beschreiben kann. Dies zeigt auch noch einmal der folgende zentrale Satz über Äquivalenzrelationen.

Satz 2.33 (Eigenschaften von Äquivalenzrelationen)**.** *Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M.*

(a) *Für $x,y \in M$ gilt $x \sim y$ genau dann, wenn $\overline{x} = \overline{y}$. (Zwei Elemente sind also genau dann äquivalent zueinander, wenn sie die gleiche Äquivalenzklasse bestimmen.)*

(b) *Jedes Element $x \in M$ liegt in genau einer Äquivalenzklasse (nämlich in $\overline{x}$). Insbesondere ist M also die disjunkte Vereinigung aller Äquivalenzklassen. Man sagt dafür auch, dass die Äquivalenzklassen eine* Partition *von M bilden.*

Beweis.

(a) Es seien $x,y \in M$.

„$\Rightarrow$“: Es gelte $x \sim y$. Ist dann $z \in M$ mit $z \in \overline{x}$, also $z \sim x$, so ist nach der Transitivität wegen $x \sim y$ auch $z \sim y$, also $z \in \overline{y}$. Damit gilt $\overline{x} \subset \overline{y}$. Da mit $x \sim y$ wegen der Symmetrie aber auch $y \sim x$ gilt, folgt analog auch umgekehrt $\overline{y} \subset \overline{x}$, und somit insgesamt $\overline{x} = \overline{y}$.

„$\Leftarrow$“: Es sei nun $\overline{x} = \overline{y}$. Wegen der Reflexivität ist $x \sim x$, also $x \in \overline{x} = \overline{y}$, und damit $x \sim y$.

(b) Wegen der Reflexivität liegt wie im Beweis von (a) jedes $x \in M$ in seiner eigenen Äquivalenzklasse $\overline{x}$. Liegt x nun zusätzlich auch in $\overline{y}$ für ein $y \in M$, gilt also $x \sim y$, so folgt nach (a) sofort $\overline{x} = \overline{y}$. Also waren die beiden Äquivalenzklassen schon gleich, d. h. x liegt in nur einer Äquivalenzklasse (nämlich in $\overline{x}$). $\square$

Aufgabe 2.34. Es sei $M = \{n \in \mathbb{Z} : |n| \le 100\} = \{-100, -99, \dots, 0, \dots, 99, 100\}$. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen auf M? Gib im Fall einer Äquivalenzrelation außerdem die Äquivalenzklasse $\overline{-34}$ explizit an.

(a) $x \sim y \;:\Leftrightarrow\;$ es gibt ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $x = 2^n y$.

(b) $x \sim y \;:\Leftrightarrow\; xy \ge 0$.

Aufgabe 2.35. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{R}^2$? Im Fall einer Äquivalenzrelation berechne und skizziere man außerdem die Äquivalenzklassen von $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ und $(1,1) \in \mathbb{R}^2$.

(a) $(x,y) \sim (x',y') \;:\Leftrightarrow\;$ es gibt ein $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $x = a^2 x'$ und $y = ay'$;

(b) $(x,y) \sim (x',y') \;:\Leftrightarrow\;$ es gibt ein $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $x = ay'$ und $y = ax'$. 03

3. Erste Eigenschaften der reellen Zahlen

In Notation 1.14 haben wir bereits die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als „Menge der Punkte auf einer Geraden“ eingeführt. Man kann aber natürlich noch viel mehr Dinge mit den reellen Zahlen tun als sie als eine einfache Punktmenge zu betrachten: Man kann sie addieren, multiplizieren, die Größe von zwei Zahlen miteinander vergleichen, und noch einiges mehr. Wir wollen die Eigenschaften der reellen Zahlen in diesem und dem nächsten Kapitel exakt formalisieren, damit wir danach genau wissen, welche Eigenschaften von $\mathbb{R}$ wir in dieser Vorlesung axiomatisch voraussetzen. In der Tat werden diese Eigenschaften letztlich sogar ausreichen, um die reellen Zahlen eindeutig zu charakterisieren. Wir beginnen in diesem Kapitel aber zunächst einmal nur mit den „Grundrechenarten“, also mit der Addition und der Multiplikation sowie ihren Umkehrungen, der Subtraktion und Division.

3.A Gruppen und Körper

Die Eigenschaften von Verknüpfungen wie der Addition oder Multiplikation reeller Zahlen werden mathematisch durch die Begriffe einer Gruppe bzw. eines Körpers beschrieben, die wir jetzt einführen wollen.

Definition 3.1 (Gruppen)**.** Eine **Gruppe** ist eine Menge G zusammen mit einer „Verknüpfung“, d. h. einer Abbildung

$$*\colon G\times G\to G,\ (x,y)\mapsto x*y,$$

so dass die folgenden Eigenschaften (auch *Gruppenaxiome* genannt) gelten:

(a) (**Assoziativität**) Für alle $x,y,z\in G$ gilt $(x*y)*z=x*(y*z)$. Man schreibt diesen Ausdruck dann in der Regel auch einfach als $x*y*z$, weil die Reihenfolge der Klammerung ja egal ist.

(b) (Existenz eines neutralen Elements) Es gibt ein $e\in G$, für das $e*x=x*e=x$ für alle $x\in G$ gilt. Man nennt ein solches e ein **neutrales Element**, und verlangt davon zusätzlich:

(c) (Existenz von inversen Elementen) Für alle $x\in G$ gibt es ein $x'\in G$ mit $x'*x=x*x'=e$. Man nennt x' dann ein **inverses Element** zu x.

Wir bezeichnen eine solche Gruppe mit $(G,*)$. Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, welche Verknüpfung gemeint ist, schreiben wir oft auch einfach nur G für die Gruppe.

Gilt zusätzlich zu den obigen Eigenschaften noch

(d) (**Kommutativität**) $x*y=y*x$ für alle $x,y\in G$,

so heißt $(G,*)$ eine **kommutative** oder **abelsche Gruppe**.

Bemerkung 3.2. Manchmal wird in der Definition einer Gruppe in Teil (b) lediglich $e*x=x$ und in Teil (c) lediglich $x'*x=e$ gefordert (man spricht dann auch von einem **linksneutralen** bzw. **linksinversen** Element). Man kann jedoch unter Verwendung der übrigen Gruppenaxiome zeigen, dass in diesem Fall automatisch auch $x*e=x$ und $x*x'=e$ gelten muss, also dass linksneutrale Elemente bereits immer neutrale und linksinverse Elemente immer inverse Elemente sind [G, Satz 1.7]. Die beiden Varianten der Definition einer Gruppe stimmen also letztlich überein.

Beispiel 3.3.

(a) $(\mathbb{R},+)$ ist eine abelsche Gruppe, denn die Addition ist (wie wir axiomatisch voraussetzen werden) eine Verknüpfung auf $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:
- $(x+y)+z=x+(y+z)$ für alle $x,y,z\in\mathbb{R}$;
- $0\in\mathbb{R}$ ist ein neutrales Element, denn $0+x=x+0=x$ für alle $x\in\mathbb{R}$;
- zu jedem $x\in\mathbb{R}$ ist $-x\in\mathbb{R}$ ein inverses Element, denn $(-x)+x=x+(-x)=0$;

- $x+y=y+x$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$.

Auf die gleiche Art sind auch $(\mathbb{Q},+)$ und $(\mathbb{Z},+)$ abelsche Gruppen, jedoch nicht $(\mathbb{N},+)$: Hier existiert zwar noch ein neutrales Element 0, aber die Zahl $1 \in \mathbb{N}$ hat kein Inverses mehr, denn es gibt kein $x \in \mathbb{N}$ mit $x+1=0$.

(b) $(\mathbb{R},\cdot)$ ist keine Gruppe: Die Multiplikation ist zwar assoziativ und kommutativ und hat das neutrale Element 1, aber die Zahl 0 hat kein Inverses – denn dies müsste ja eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ sein mit $x \cdot 0 = 1$.

Nimmt man jedoch die 0 aus $\mathbb{R}$ heraus, so erhält man mit $(\mathbb{R}\backslash\{0\},\cdot)$ wieder eine abelsche Gruppe, bei der das neutrale Element 1 und das zu einem x inverse Element $\frac{1}{x}$ ist. Genauso funktioniert dies für $(\mathbb{Q}\backslash\{0\},\cdot)$, aber z. B. nicht für $(\mathbb{Z}\backslash\{0\},\cdot)$: Hier gibt es zwar noch ein neutrales Element 1, aber die Zahl $2 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ hat kein Inverses mehr, denn es gibt kein $x \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ mit $2 \cdot x = 1$.

(c) Hier ist noch ein Beispiel von einem ganz anderen Typ: Es sei M eine beliebige Menge und

$$G = \{f : f \text{ ist eine bijektive Abbildung von } M \text{ nach } M\}.$$

Da die Verkettung bijektiver Abbildungen nach Aufgabe 2.25 wieder bijektiv ist, definiert sie eine Verknüpfung auf G. In der Tat wird G damit zu einer Gruppe, denn die Verkettung ist assoziativ nach Lemma 2.19, die Identität id_M ist ein neutrales Element, und zu einem $f \in G$ ist die Umkehrabbildung f^{-1} aus Definition 2.20 ein inverses Element: Sie ist nach Aufgabe 2.25 selbst wieder bijektiv (also in G) und erfüllt $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_M$ nach Bemerkung 2.21. Im Allgemeinen ist diese Gruppe jedoch nicht kommutativ.

Wir wollen nun ein paar einfache Eigenschaften von Gruppen beweisen, u. a. dass die in Definition 3.1 geforderten neutralen und inversen Elemente eindeutig sind und wir daher in Zukunft auch von *dem* neutralen und *dem* zu einem gegebenen Element inversen Element sprechen können.

Lemma 3.4 (Eigenschaften von Gruppen)**.** *Es seien $(G,*)$ eine Gruppe und $x,y \in G$.*

(a) *Es gibt genau ein neutrales Element (wie in Definition 3.1 (b)).*

(b) *Es gibt genau ein inverses Element zu x (wie in Definition 3.1 (c)).*

(c) *Sind x' und y' die inversen Elemente zu x bzw. y, so ist $y' * x'$ das inverse Element zu $x * y$.*

(d) *Ist x' das inverse Element zu x, so ist x das inverse Element zu x' („das Inverse des Inversen ist wieder das Ausgangselement“).*

Beweis.

(a) Sind e und $\tilde{e}$ neutrale Elemente, so folgt

$$\begin{aligned} e &= \tilde{e} * e && \text{(denn } \tilde{e} \text{ ist ein neutrales Element)} \\ &= \tilde{e} && \text{(denn } e \text{ ist ein neutrales Element).} \end{aligned}$$

(b) Sind x' und $\tilde{x}'$ inverse Elemente zu x, so gilt

$$\begin{aligned} x' &= e * x' && (e \text{ neutrales Element}) \\ &= (\tilde{x}' * x) * x' && (\tilde{x}' \text{ ist ein inverses Element zu } x) \\ &= \tilde{x}' * (x * x') && \text{(Assoziativität)} \\ &= \tilde{x}' * e && (x' \text{ ist ein inverses Element zu } x) \\ &= \tilde{x}' && (e \text{ neutrales Element).} \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$(y' * x') * (x * y) = y' * (x' * x) * y = y' * e * y = y' * y = e$$

und analog auch $(x * y) * (y' * x') = e$. Damit ist $y' * x'$ das inverse Element zu $x * y$.

(d) Die Gleichung $x' * x = x * x' = e$ besagt direkt, dass x das inverse Element zu x' ist. □

Wie wir in Beispiel 3.3 (a) und (b) gesehen haben, erlauben die reellen Zahlen *zwei* grundlegende Gruppenstrukturen: die Addition und (nach Herausnahme der 0) die Multiplikation. Diese beiden Strukturen sind jedoch nicht unabhängig voneinander, da sie durch das Distributivgesetz $(x+y)\cdot z = xz+yz$ für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$ miteinander verbunden sind. Eine derartige Kombination zweier Gruppenstrukturen bezeichnet man als einen Körper.

Definition 3.5 (Körper)**.** Ein **Körper** ist eine Menge K zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$+\colon K\times K\to K \quad (\text{genannt } \textit{Addition}) \qquad \text{und} \qquad \cdot\colon K\times K\to K \quad (\text{genannt } \textit{Multiplikation}),$$

so dass die folgenden Eigenschaften (auch *Körperaxiome* genannt) gelten:

(a) $(K,+)$ ist eine abelsche Gruppe. Wir bezeichnen ihr neutrales Element mit 0 und das zu einem $x\in K$ inverse Element mit $-x$.

(b) $(K\backslash\{0\},\cdot)$ ist ebenfalls eine abelsche Gruppe. Wir bezeichnen ihr neutrales Element mit 1 und das zu einem $x\in K\backslash\{0\}$ inverse Element mit x^{-1}.

(c) (**Distributivität**) Für alle $x,y,z\in K$ gilt $(x+y)\cdot z = (x\cdot z)+(y\cdot z)$.

Mit dieser Definition wollen wir nun also axiomatisch voraussetzen:

$$\boxed{\mathbb{R} \text{ ist ein Körper.}}$$

Um Verwirrungen zu vermeiden, werden wir die beiden Verknüpfungen in einem Körper immer mit den Symbolen „$+$“ und „$\cdot$“ bezeichnen. Ebenso werden wir (wie ihr es natürlich gewohnt seid) vereinbaren, dass man den Punkt bei der Multiplikation auch weglassen darf und bei ungeklammerten Ausdrücken zuerst die Multiplikationen und dann die Additionen ausgeführt werden, so dass man also z. B. die Distributivität aus Definition 3.5 (c) auch als $(x+y)z = xz+yz$ schreiben kann.

Es ist jedoch wichtig zu verstehen, dass wir ab jetzt *nicht* mehr voraussetzen werden, dass Addition und Multiplikation in einem Körper wie z. B. $\mathbb{R}$ genau die Verknüpfungen sind, „an die man als Erstes denken würde“ – was auch immer das heißen mag. Stattdessen sind es einfach irgendwelche zwei Verknüpfungen, die die Eigenschaften aus Definition 3.5 haben. Unsere zukünftigen Beweise über Körper wie z. B. $\mathbb{R}$ müssen wir also ausschließlich auf diesen Eigenschaften aufbauen.

Dieser axiomatische Zugang hat zwei Vorteile:

- Zum einen wissen wir dadurch genau, welche Eigenschaften der Grundrechenarten auf den reellen Zahlen wir eigentlich voraussetzen. Es sollte schließlich klar sein, dass wir eine *exakte* Mathematik nicht auf einer *anschaulichen* Vorstellung von $\mathbb{R}$ aufbauen können. Solltet ihr euch also z. B. später einmal dafür interessieren, wie man die Existenz der reellen Zahlen beweisen kann, so wüsstet ihr dann genau, was eigentlich zu beweisen ist: nämlich die Existenz einer Menge mit genau den Eigenschaften, die wir jetzt axiomatisch voraussetzen.
- Zum anderen werdet ihr im Laufe eures Studiums noch viele weitere Körper kennenlernen, z. B. in Kapitel **??** den sehr wichtigen Körper der komplexen Zahlen. Alle Resultate, die nur auf den Körperaxiomen aufbauen, übertragen sich dann also sofort auf diese neuen Fälle, ohne dass man sich darüber noch einmal neu Gedanken machen muss.

Beispiel 3.6.

(a) Neben $\mathbb{R}$ ist auch $\mathbb{Q}$ (mit den gleichen Verknüpfungen wie auf $\mathbb{R}$) ein Körper. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden mit diesen Verknüpfungen jedoch keinen Körper, da $(\mathbb{Z}\backslash\{0\},\cdot)$ nach Beispiel 3.3 (b) keine Gruppe ist. Ebenso ist $\mathbb{N}$ mit diesen Verknüpfungen kein Körper, da hier nach Beispiel 3.3 (a) bereits die Addition keine Gruppenstruktur liefert.

(b) Hier ist ein Beispiel für einen Körper, der sich ganz anders verhält als $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$: Wir definieren auf der Menge $K=\{g,u\}$ zwei Verknüpfungen durch die folgenden Tabellen.

$$\begin{array}{c|cc} + & g & u \\ \hline g & g & u \\ u & u & g \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & g & u \\ \hline g & g & g \\ u & g & u \end{array}$$

Dabei sind g und u einfach nur Namen für die beiden Elemente von K, die für „gerade“ und „ungerade“ stehen sollen und damit auch die Verknüpfungstafeln erklären: Wir haben z. B. $g+u$ als u definiert, weil die Addition einer geraden und einer ungeraden Zahl eine ungerade Zahl ergibt.

Man kann zeigen, dass K mit diesen beiden Verknüpfungen einen Körper bildet. Er wird in der Literatur mit $\mathbb{Z}_2$ bezeichnet, da seine Elemente die Reste ganzer Zahlen bei Division durch 2 beschreiben. Um zu beweisen, dass $\mathbb{Z}_2$ ein Körper ist, könnte man z. B. einfach die geforderten Eigenschaften für alle Elemente – es gibt ja nur zwei – explizit nachprüfen. In der Vorlesung „Algebraische Strukturen“ zeigt man allerdings, dass man die Körperaxiome hier auch viel eleganter direkt aus den Eigenschaften von $\mathbb{Z}$ folgern kann [G, Satz 7.10]. Wir wollen uns hier damit begnügen, die neutralen und inversen Elemente anzugeben:

- Das additive neutrale Element ist g, wie man leicht aus der Tabelle abliest. Im Sinne der Notationen von Definition 3.5 ist also $0 = g$. Wegen $g+g = u+u = g = 0$ sind die additiven inversen Elemente $-g = g$ und $-u = u$. Dies stimmt natürlich auch mit der Interpretation als gerade und ungerade Zahlen überein, da das Negative von einer geraden bzw. ungeraden Zahl ebenfalls wieder gerade bzw. ungerade ist.
- Das multiplikative neutrale Element in $\mathbb{Z}_2\backslash\{0\}$ ist u – in der Tat ist es ja auch das einzige Element in $\mathbb{Z}_2\backslash\{0\}$. Gemäß der Notation von Definition 3.5 ist also $1 = u$.

Beachte, dass in diesem Körper $\mathbb{Z}_2$ die Gleichung $1+1 = u+u = g = 0$ gilt. Die Körperaxiome lassen es also zu, dass man bei fortgesetzter Addition der 1 irgendwann wieder zur 0 zurück kommt. Wir werden in dieser Vorlesung nicht viel mit dem Körper $\mathbb{Z}_2$ zu tun haben – wir haben ihn hier nur als Beispiel dafür angegeben, dass die Körperaxiome noch weit davon entfernt sind, die rationalen oder reellen Zahlen eindeutig zu charakterisieren.

Anschaulich kann man die Körperaxiome so interpretieren, dass ein Körper eine Menge ist, auf der „die vier Grundrechenarten existieren und die erwarteten Eigenschaften haben“. Wir wollen nun noch ein paar weitere dieser erwarteten Eigenschaften zeigen, die bereits aus den Körperaxiomen folgen und die wir dann beim Rechnen z. B. in $\mathbb{R}$ natürlich ständig benutzen werden.

Bemerkung 3.7. Es seien K ein Körper und $x,y \in K$.

(a) Wenden wir Lemma 3.4 (c) und (d) auf die (kommutative) Addition und Multiplikation an, so sehen wir sofort, dass

$$-(x+y) = (-x)+(-y) \quad \text{und} \quad -(-x) = x$$

sowie für $x,y \neq 0$

$$(xy)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1} \quad \text{und} \quad (x^{-1})^{-1} = x.$$

(b) Etwas versteckt in Definition 3.5 steht in Teil (b) u. a. die Aussage, dass die Multiplikation überhaupt eine Verknüpfung auf $K\backslash\{0\}$ ist, also dass für $x,y \in K\backslash\{0\}$ auch $xy \in K\backslash\{0\}$ gilt. Äquivalent dazu bedeutet das:

$$\text{Ist } xy = 0, \text{ so gilt } x = 0 \text{ oder } y = 0.$$

Lemma 3.8 (Eigenschaften von Körpern)**.** *In jedem Körper K gilt für alle $x,y \in K$:*

(a) $0 \cdot x = 0$.

(b) $x \cdot (-y) = -(xy)$.

(c) *Für $x \neq 0$ ist $-(x^{-1}) = (-x)^{-1}$.*

Beweis.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} 0 \cdot x &= (0+0) \cdot x && \text{(0 ist additives neutrales Element)} \\ &= 0 \cdot x + 0 \cdot x, && \text{(Distributivität)} \end{aligned}$$

woraus durch Addition des additiven Inversen von $0 \cdot x$ auf beiden Seiten die gewünschte Gleichung $0 = 0 \cdot x$ folgt.

(b) Es ist

$$\begin{aligned} x\cdot(-y)+xy &= x\cdot(-y+y) && \text{(Distributivität)} \\ &= x\cdot 0 && \text{($-y$ ist additives Inverses zu y)} \\ &= 0 && \text{(nach (a)),} \end{aligned}$$

daher ist $x \cdot (-y)$ das additive Inverse zu xy, d. h. es gilt $x \cdot (-y) = -(xy)$.

(c) Doppeltes Anwenden von (b), einmal für den linken und einmal für den rechten Faktor, ergibt

$$(-(x^{-1}))\cdot(-x) = -(x^{-1}\cdot(-x)) = -(-(x^{-1}\cdot x)) = -(-1) \overset{3.7(a)}{=} 1.$$

Also ist $-(x^{-1})$ das multiplikative Inverse zu $-x$, d. h. es ist $-(x^{-1}) = (-x)^{-1}$. □

Notation 3.9. In einem Körper K verwendet man üblicherweise die folgenden Notationen, von denen euch die meisten sicher bekannt sein werden:

(a) Für $x, y \in K$ setzt man $x - y := x + (-y)$. Ist $y \neq 0$, so setzt man $\frac{x}{y} := x \cdot y^{-1}$.

(b) Für $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert man die n-te **Potenz** von x als

$$x^n := \underbrace{x\cdot \cdots \cdot x}_{n\text{-mal}},$$

wobei dieser Ausdruck für $n = 0$ als $x^0 := 1$ zu verstehen ist. Insbesondere legen wir also auch $0^0 := 1$ fest. Beachte, dass aus dieser Definition (und der Kommutativität der Multiplikation) unmittelbar die Potenzrechenregeln

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n} \quad \text{und} \quad (xy)^n = x^n \cdot y^n$$

für alle $x, y \in K$ folgen. Ist $x \neq 0$, so definiert man zusätzlich Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten durch $x^{-n} := (x^{-1})^n$.

Beachte, dass auch in einem beliebigen Körper K die Exponenten einer Potenz stets *ganze Zahlen* sind und keine Elemente aus K. Eine Potenz x^y für $x, y \in K$ lässt sich im Allgemeinen nicht definieren (auch wenn dies für $K = \mathbb{R}$ in vielen Fällen möglich ist, siehe Definition **??**).

(c) Manchmal möchte man mehrere Elemente $x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ in einem Körper (oder allgemeiner in einer additiv geschriebenen abelschen Gruppe) aufsummieren, die durch eine ganzzahlige Laufvariable indiziert werden, die von einem $m \in \mathbb{Z}$ bis zu einem $n \in \mathbb{Z}$ (mit $n \geq m$) läuft. Man schreibt dies dann als

$$\sum_{i=m}^{n} x_i := x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_n$$

(also mit einem großen griechischen Sigma, das an das Wort „Summe“ erinnern soll). So steht z. B.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \tag{$*$}$$

für die Summe aller Quadratzahlen bis n^2. Natürlich ist der Name der Laufvariablen dabei egal, und der Ausdruck $(*)$ hängt nicht von einem i ab (wie man auf der rechten Seite ja auch sieht). Außerdem kann man die Laufvariable verschieben, ohne den eigentlichen Ausdruck zu ändern: Setzt man z. B. $i = j + 1$, also $j = i - 1$, in der obigen Summe $(*)$, so läuft j dort von 0 bis $n - 1$, wenn i von 1 bis n läuft, und wir können dieselbe Summe auch schreiben als

$$\sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

Natürlich kann man diesen Ausdruck nun auch wieder genauso gut mit dem Buchstaben i statt j als $\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^2$ schreiben, oder den Index um mehr als 1 in die eine oder andere Richtung verschieben. Also:

Der Wert einer Summe ändert sich nicht, wenn man zur Laufvariablen im zu summierenden Ausdruck eine Konstante addiert, und dafür von der Ober- und Untergrenze der Summe diese Konstante abzieht.

Wir sagen in diesem Fall, dass die neue Darstellung der Summe durch eine **Indexverschiebung** (im Beispiel oben $i \mapsto i+1$) aus der alten hervorgeht. 04

Analog schreibt man

$$\prod_{i=m}^{n} x_i := x_m \cdot x_{m+1} \cdot x_{m+2} \cdot \cdots \cdot x_n$$

(mit einem großen griechischen Pi für das Produkt), wenn man die Körperelemente multiplizieren statt addieren möchte. Ist schließlich die Obergrenze einer Summe oder eines Produkts kleiner als die Untergrenze (man spricht dann von der **leeren Summe** bzw. dem **leeren Produkt**), so definiert man dies als

$$\sum_{i=m}^{n} x_i := 0 \quad \text{und} \quad \prod_{i=m}^{n} x_i := 1 \quad \text{für } n < m,$$

also als das additive bzw. multiplikative neutrale Element.

(d) Ist n eine natürliche Zahl, so fasst man diese oft auch als das Element

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n\text{-mal}}$$

von K auf. Im Fall $K = \mathbb{R}$ ist dies dann einfach die natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ und liefert somit keine neue Notation, aber z. B. in $K = \mathbb{Z}_2$ aus Beispiel 3.6 (b) ist $2 = 1 + 1 = 0$.

Aufgabe 3.10. Zeige, dass in jedem Körper K die üblichen Rechenregeln

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{xw + yz}{yw} \quad \text{und} \quad \frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{xz}{yw}$$

für Brüche gelten, wobei $x, y, z, w \in K$ mit $y, w \neq 0$.

Aufgabe 3.11. Es sei $a \in \mathbb{R}$ fest gegeben. Wir definieren auf $\mathbb{R}^2$ eine „Addition" und „Multiplikation" durch

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad \text{und} \quad (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) := (x_1 y_1 + a x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Man prüft leicht durch explizite Rechnung nach, dass $\mathbb{R}^2$ mit dieser Addition eine kommutative Gruppe mit neutralem Element $(0,0)$ ist, dass auch die Multiplikation kommutativ ist, und dass diese beiden Operationen das Distributivgesetz erfüllen – ihr solltet euch kurz überlegen, warum das so ist, braucht das aber nicht aufzuschreiben. Man zeige stattdessen:

(a) Die Multiplikation ist assoziativ und besitzt ein neutrales Element.

(b) Im Fall $a = -1$ ist $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ein Körper, im Fall $a = 1$ jedoch nicht.

(Für $a = -1$ ist $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ der sogenannte Körper der komplexen Zahlen, den wir in Kapitel **??** noch genau untersuchen werden.)

Aufgabe 3.12. Zu einem Körper K und einer Menge D mit $|D| \geq 2$ sei

$$V = \{f : f \text{ ist eine Abbildung von } D \text{ nach } K\}$$

die Menge aller reellwertigen Funktionen auf D. Für $f, g \in V$ definieren wir die Addition $f + g$ und Multiplikation $f \cdot g$ dieser Funktionen punktweise durch

$$f + g \colon D \to K,\ x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad f \cdot g \colon D \to K,\ x \mapsto f(x) \cdot g(x).$$

(a) Zeige, dass V mit dieser Addition eine abelsche Gruppe ist.

(b) Ist V mit dieser Addition und Multiplikation ein Körper?

3.B Vollständige Induktion

Häufig möchte man in der Mathematik Aussagen beweisen, die von einer natürlichen Zahl abhängen – z. B. bei Formeln, die Summen oder Produkte wie in Notation 3.9 mit variablen Unter- oder Obergrenzen beinhalten. Die einfachste und bekannteste solcher Aussagen ist vermutlich die folgende Formel für die Summe aller natürlichen Zahlen bis zu einer gegebenen Obergrenze.

Satz 3.13 (Summenformel von Gauß). *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beispiel 3.14. Für $n = 5$ ist z. B.

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1+2+3+4+5 = 15 = \frac{5 \cdot 6}{2}.$$

Um derartige Aussagen zu beweisen, ist oft das Beweisverfahren der **(vollständigen) Induktion** nützlich, das wir jetzt einführen wollen.

Angenommen, wir wollen (wie z. B. in Satz 3.13) eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beweisen. Dann können wir dies tun, indem wir die folgenden beiden Dinge zeigen:

(a) **(Induktionsanfang)** Die Aussage $A(0)$ ist wahr.

(b) **(Induktionsschritt)** Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$, d. h. *wenn* die Aussage $A(n)$ für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ gilt (die „Induktionsannahme“ bzw. „Induktionsvoraussetzung“), *dann* gilt auch die Aussage $A(n+1)$ (der „Induktionsschluss“).

Haben wir diese beiden Dinge gezeigt, so folgt daraus nämlich die Gültigkeit von $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$: Die Aussage $A(0)$ haben wir mit dem Induktionsanfang gezeigt, und durch fortgesetztes Anwenden des Induktionsschritts $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für $n = 0, 1, 2, \dots$ erhalten wir dann auch

$$A(0) \Rightarrow A(1) \Rightarrow A(2) \Rightarrow A(3) \Rightarrow \cdots,$$

also die Gültigkeit von $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Derartige Induktionsbeweise sind immer dann sinnvoll, wenn die Aussagen $A(n)$ und $A(n+1)$ „ähnlich genug“ sind, so dass es beim Beweis von $A(n+1)$ hilft, die Gültigkeit von $A(n)$ voraussetzen zu dürfen.

Mit diesem Verfahren können wir nun die Summenformel aus Satz 3.13 beweisen:

Beweis von Satz 3.13. Wir zeigen die Formel mit Induktion über n.

Induktionsanfang ($n = 0$): Für $n = 0$ stimmen die beiden Seiten der zu zeigenden Gleichung überein, denn es ist

$$\sum_{k=1}^{0} k = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}.$$

Induktionsschritt ($n \to n+1$): Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass die zu beweisende Formel für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ richtig ist, d. h. dass

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

gilt. (Beachte, dass wir diese Gleichung nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ voraussetzen – dies wäre ja schon die gesamte zu zeigende Aussage!) Wir müssen zeigen, dass die entsprechende Gleichung dann auch für $n+1$ gilt, also dass

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Dies ergibt sich nun leicht aus der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) && \text{(Abspalten des letzten Summanden für } k = n+1\text{)} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
&= (n+1) \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz mit vollständiger Induktion bewiesen. □

Bemerkung 3.15. Offensichtlich erlaubt das Beweisverfahren der vollständigen Induktion die folgenden Abwandlungen:

(a) Im Induktionsschritt kann man, wenn es hilfreich ist, beim Beweis der Aussage $A(n+1)$ nicht nur die direkt vorangegangene Aussage $A(n)$, sondern *alle bereits gezeigten Aussagen* $A(0), A(1), \ldots, A(n)$ voraussetzen.

(b) Möchte man die Aussage $A(n)$ nicht für alle $n \in \mathbb{N}$, sondern für alle $n \in \mathbb{Z}$ ab einem gewissen Startwert $n_0 \in \mathbb{Z}$ zeigen, so kann man als Induktionsanfang die Aussage $A(n_0)$ zeigen, und im Induktionsschritt dann die Folgerung $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für alle $n \geq n_0$.

Aufgabe 3.16. Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}, \qquad \text{(b)} \quad \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}.$$

Aufgabe 3.17. Zeige mit vollständiger Induktion: Ist $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ mit $a + \frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $a^n + \frac{1}{a^n} \in \mathbb{Z}$.

3.C Polynomfunktionen

Als erste Anwendung der Körpereigenschaften wollen wir zum Abschluss dieses Kapitels die euch sicher schon aus der Schule bekannten Polynomfunktionen behandeln – also die Funktionen, die sich aus den grundlegenden Körperoperationen Addition und Multiplikation bilden lassen.

Definition 3.18 (Polynomfunktionen und Nullstellen)**.** Es seien D eine Teilmenge eines Körpers K und $f: D \to K$ eine Funktion.

(a) Ist f von der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{für alle } x \in D$$

mit gewissen $a_0, \ldots, a_n \in K$, so sagt man, dass f eine **Polynomfunktion** mit **Koeffizienten** $a_0, \ldots, a_n$ ist. Ist n dabei so gewählt, dass der erste Koeffizient a_n ungleich Null ist, so heißt f eine Polynomfunktion vom **Grad** n und mit **Leitkoeffizient** a_n. Ist der Leitkoeffizient 1, so heißt f eine **normierte** Polynomfunktion.

Sind in der obigen Darstellung alle Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ gleich 0 (und ist f damit die Nullfunktion), so nennen wir f formal eine Polynomfunktion vom Grad $-\infty$. In diesem Fall hat f keinen Leitkoeffizienten.

(b) Ist $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = 0$, so nennt man x_0 eine **Nullstelle** von f.

Das Besondere an Nullstellen von Polynomfunktionen ist, dass man sie wie im folgenden Satz als Linearfaktoren abspalten kann.

Satz 3.19 (Abspalten von Nullstellen in Polynomfunktionen)**.** *Es seien K ein Körper, $D \subset K$ und $f: D \to K$ eine Polynomfunktion vom Grad $n \in \mathbb{N}$.*

(a) *Ist $x_0 \in D$ eine Nullstelle von f, so gibt es eine Polynomfunktion $g\colon D \to K$ vom Grad $n-1$ mit $f(x) = (x-x_0)\,g(x)$ für alle $x \in D$ (d. h. man kann „den Linearfaktor $x-x_0$ abspalten“).*

(b) *Die Funktion f hat höchstens n Nullstellen.*

Beweis. Wir zeigen die beiden Aussagen mit Induktion über n. Der Beweis von (a) ist dabei konstruktiv, d. h. er gibt auch ein Verfahren an, wie g berechnet werden kann (siehe Beispiel 3.20).

Der Induktionsanfang für $n = 0$ ist trivial, denn f ist dann eine Konstante ungleich 0 und hat somit keine Nullstellen. Für den Induktionsschluss nehmen wir an, dass die Aussagen des Satzes bis zu einem gegebenen n gelten, und betrachten $f\colon D \to K$, $x \mapsto a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_1 x + a_0$ vom Grad $n+1$, also mit $a_{n+1} \neq 0$.

(a) Wir definieren eine Polynomfunktion $\tilde{f}\colon D \to K$ durch

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &:= f(x) - a_{n+1}x^n(x-x_0)\\ &= a_{n+1}x_0x^n + a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0\end{aligned}$$

für alle x. Ist $\tilde{f}$ die Nullfunktion, so sind wir fertig, da dann ja $f(x) = a_{n+1}x^n(x-x_0)$ für alle $x \in D$ gilt. Andernfalls ist $\tilde{f}$ nach Konstruktion eine Polynomfunktion vom Grad höchstens n (der x^{n+1}-Term hebt sich ja gerade heraus), die immer noch die Nullstelle x_0 hat. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann also eine Polynomfunktion $\tilde{g}\colon D \to K$ vom Grad höchstens $n-1$ mit $\tilde{f}(x) = (x-x_0)\,\tilde{g}(x)$ für alle $x \in D$, und somit ist

$$f(x) = a_{n+1}x^n(x-x_0) + \tilde{f}(x) = (x-x_0)\cdot \underbrace{(a_{n+1}x^n + \tilde{g}(x))}_{=:g(x)}$$

für alle $x \in D$, wobei g offensichtlich vom Grad n ist.

(b) Hat f keine Nullstelle, so sind wir fertig. Andernfalls wählen wir eine Nullstelle x_0 von f und schreiben $f(x) = (x-x_0)\,g(x)$ für alle $x \in D$ wie in (a) mit einer Polynomfunktion g vom Grad n. Nach Induktionsvoraussetzung hat g höchstens n Nullstellen, und nach Bemerkung 3.7 (b) sind die Nullstellen von f genau x_0 zusammen mit den Nullstellen von g. Also hat f höchstens $n+1$ Nullstellen. Damit ist die Behauptung mit Induktion bewiesen. □

Beispiel 3.20 (Polynomdivision)**.** Das Verfahren aus dem Beweis von Satz 3.19 (a) wird als *Polynomdivision* [G, Satz 10.19] bezeichnet: Man subtrahiert fortlaufend geeignete Vielfache von $x-x_0$ von f, so dass sich der jeweils höchste Term von f weghebt, und sammelt die dabei verwendeten Faktoren in g. Das folgende Schema, das genauso aussieht wie eine normale schriftliche Division, verdeutlicht dieses Verfahren am Beispiel der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 3x - 4$ mit Nullstelle $x_0 = 1$, die wir als $f(x) = (x-1)\,g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ schreiben wollen. Das Ergebnis ist in diesem Fall $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+4$.

$$\begin{array}{rcrl}
f(x) \longrightarrow & & (x^2+3x-4) & : (x-1) = x+4 \longleftarrow g(x)\\
 & - & (x^2-x) & \cdot x\\ \cline{2-3}
\tilde{f}(x) \longrightarrow & & 4x-4 & \\
 & - & (4x-4) & \cdot 4\\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

Bemerkung 3.21. Satz 3.19 liefert uns zwar die neue Funktion nach dem Abspalten des Linearfaktors, er sagt uns hingegen nicht, wie wir überhaupt erst einmal eine Nullstelle von f finden können, oder ob es überhaupt Nullstellen gibt (die reelle Polynomfunktion $f(x) = x^2 + 1$ hat ja z. B. keine Nullstellen). In der Tat gibt es im Allgemeinen kein Verfahren, wie man Nullstellen von Polynomfunktionen exakt berechnen kann! Genauer gesagt gilt:

- Für Polynomfunktionen vom Grad höchstens 4 gibt es explizite Verfahren zur exakten Bestimmung der Nullstellen (für Grad 1 ist das klar, für Grad 2 gibt es die bekannte „*p*-*q*-Formel“ bzw. die quadratische Ergänzung, und für Grad 3 bzw. 4 sind die Formeln so lang, dass man im Allgemeinen nicht mehr mit ihnen arbeiten möchte).

- Für Polynomfunktionen vom Grad größer als 4 kann man beweisen(!), dass es keine derartigen Verfahren zur exakten Bestimmung der Nullstellen geben kann (das beweist man z. B. in der Vorlesung „Einführung in die Algebra“, die ihr im nächsten Studienjahr hören könnt). Aber:
- Für reelle Polynomfunktionen beliebigen Grades gibt es zumindest numerische Verfahren, die die Nullstellen (mit beliebiger Genauigkeit) näherungsweise bestimmen können.

Zum Schluss wollen wir nun noch zwei wichtige Konzepte für Polynomfunktionen untersuchen, die ihr beide im reellen Fall vielleicht schon aus der Schule kennt: den sogenannten Koeffizientenvergleich (also dass eine Polynomfunktion eindeutig ihre Koeffizienten bestimmt) und die Vielfachheit von Nullstellen. Es stellt sich jedoch heraus, dass man hierfür im allgemeinen Fall die Voraussetzung benötigt, dass die Definitionsmenge der betrachteten Funktionen unendlich viele Elemente besitzt.

Lemma 3.22 (**Koeffizientenvergleich**). *Es seien K ein Körper, $D \subset K$ mit $|D| = \infty$, und $f\colon D \to K$ eine Polynomfunktion mit zwei Darstellungen*

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 \quad \text{für alle } x \in D$$

für gewisse $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in K$. (Beachte, dass wir dabei in beiden Darstellungen den gleichen höchsten Exponenten n wählen können, da wir nicht $a_n \neq 0$ und $b_n \neq 0$ vorausgesetzt haben.)

Dann gilt bereits $a_i = b_i$ für alle $i = 0, \dots, n$. Es ist also nicht möglich, „eine Polynomfunktion auf zwei verschiedene Arten hinzuschreiben“.

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Polynomfunktion

$$D \to K,\ x \mapsto (a_n - b_n)x^n + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = f(x) - f(x) = 0$$

die Nullfunktion auf D. Da sie damit wegen $|D| = \infty$ unendlich viele Nullstellen besitzt, muss sie nach Satz 3.19 (b) vom Grad $-\infty$ sein. Also sind alle Koeffizienten dieser Polynomfunktion gleich 0, d. h. es ist $a_i = b_i$ für alle $i = 0, \dots, n$. □

Bemerkung und Notation 3.23 (Polynome). Die Voraussetzung $|D| = \infty$ in Lemma 3.22 ist wirklich notwendig: So sind für $D = K = \mathbb{Z}_2$ wie in Beispiel 3.6 (b) z. B. $x \mapsto x$ und $x \mapsto x^2$ dieselbe Funktion, da sie beide 0 auf 0 und 1 auf 1 abbilden und in $\mathbb{Z}_2$ keine weiteren Elemente existieren.

In der Literatur bezeichnet man einen formalen Ausdruck der Form $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ mit $a_0, \dots, a_n \in K$ als ein **Polynom** über K [G, Kapitel 9]. Jedes solche Polynom bestimmt natürlich eine Polynomfunktion von jeder Teilmenge D von K nach K, allerdings können verschiedene Polynome wie im eben angegebenen Beispiel durchaus dieselbe Polynomfunktion definieren: Über $\mathbb{Z}_2$ sind x und x^2 verschiedene Polynome, sie bestimmen aber dieselbe Polynomfunktion.

Mit dieser Notation ist die Aussage von Lemma 3.22 also, dass Polynome und Polynomfunktionen im Fall von unendlichen Definitionsmengen dasselbe sind. Da wir Polynomfunktionen im Folgenden in der Regel nur in diesem Fall unendlicher Definitionsmengen benötigen, werden wir die Begriffe Polynom und Polynomfunktion oft synonym verwenden. Wegen der Eindeutigkeit der Koeffizienten sind dann auch der Grad (und der Leitkoeffizient) einer Polynomfunktion f wie in Definition 3.18 (a) eindeutig bestimmt. Wir können daher eine Bezeichnung dafür einführen:

Definition 3.24 (Grad eines Polynoms). Wir bezeichnen den **Grad** einer Polynomfunktion f (mit unendlicher Definitionsmenge) mit $\deg f \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ (vom englischen Wort „degree“).

In den Fällen $\deg f = 1$ bzw. $\deg f = 2$ nennt man f ein **lineares** bzw. **quadratisches Polynom**.

Satz und Definition 3.25 (Vielfachheit von Nullstellen). *Es seien K ein Körper, $D \subset K$ mit $|D| = \infty$ und $f\colon D \to K$ eine Polynomfunktion, die nicht die Nullfunktion ist. Dann lässt sich f (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig als*

$$f(x) = g(x) \cdot (x - x_1)^{a_1} \cdot \dots \cdot (x - x_k)^{a_k} \quad \text{für alle } x \in D$$

schreiben, wobei $x_1, \dots, x_k \in D$ die verschiedenen Nullstellen von f sind, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt, und g ein Polynom ohne Nullstellen in D ist. In dieser Darstellung nennt man a_i für $i = 1, \dots, k$ die

Vielfachheit *der Nullstelle x_i von f (in der Literatur sind auch die Bezeichnungen* ***Ordnung*** *und* ***Multiplizität*** *der Nullstelle üblich).*

Beweis. Die Existenz einer solchen Darstellung ergibt sich sofort durch fortgesetztes Abspalten von Nullstellen gemäß Satz 3.19 (a). Wir zeigen nun die Eindeutigkeit mit Induktion über den Grad $n := \deg f$ des Polynoms. Dabei ist der Induktionsanfang für $n = 0$ trivial, denn dann hat f keine Nullstellen, und es ist zwangsläufig $k = 0$ und $g = f$.

Für den Induktionsschritt $n \to n+1$ bemerken wir zuerst, dass $x_1, \dots, x_k$ natürlich in jedem Fall als die Nullstellen von f eindeutig bestimmt sind. Wir nehmen also an, dass wir zwei Darstellungen

$$f(x) = g(x) \cdot (x-x_1)^{a_1} \cdot \cdots \cdot (x-x_k)^{a_k} = h(x) \cdot (x-x_1)^{b_1} \cdot \cdots \cdot (x-x_k)^{b_k}$$

eines Polynoms vom Grad $n+1$ wie in der Behauptung des Satzes haben. Im nullstellenfreien Fall $k = 0$ sind wir natürlich bereits fertig. Andernfalls liefert Division durch $x - x_1$ für alle $x \in D \backslash \{x_1\}$ (wir müssen x_1 hier herausnehmen, da wir sonst durch 0 teilen würden!)

$$\begin{aligned} & g(x) \cdot (x-x_1)^{a_1-1} \cdot (x-x_2)^{a_2} \cdot \cdots \cdot (x-x_k)^{a_k} \\ = \; & h(x) \cdot (x-x_1)^{b_1-1} \cdot (x-x_2)^{b_2} \cdot \cdots \cdot (x-x_k)^{b_k}. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Wir haben also wieder zwei Darstellungen eines Polynoms auf der immer noch unendlichen Menge $D \backslash \{x_1\}$. Da der Grad dieses Polynoms n ist, müssen diese Darstellungen aber nach der Induktionsvoraussetzung bereits übereinstimmen. Also gilt $g = h$, $a_1 - 1 = b_1 - 1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_k = b_k$, und damit stimmen auch die beiden ursprünglichen Darstellungen von f überein. □

Aufgabe 3.26. Bestimme die Nullstellen des reellen Polynoms $x^4 + 3x^3 - 4x$ und ihre Vielfachheiten.

Aufgabe 3.27. Es sei f ein reelles Polynom mit $f(x) = x^3$ für alle $x \in \{1, 2, 3, \dots, 8\}$. Welchen Grad kann f haben?

Aufgabe 3.28. Es sei f das reelle Polynom mit $f(x) = (x^2 - x + 1)^{2023}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimme die Summe aller Koeffizienten von f.

(b) Bestimme die Summe aller Koeffizienten von geraden Potenzen von x in f.

Aufgabe 3.29.

(a) Bestimme alle reellen Polynome f mit $x\,f(x+1) = (x-1)\,f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

05 (b) Bestimme alle reellen Polynome f mit $x\,f(x-1) = (x-1)\,f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis

4. Weitere Eigenschaften der reellen Zahlen

Wir haben uns nun das elementare Handwerkszeug für diese Vorlesung erarbeitet und beginnen jetzt mit dem Studium der eindimensionalen Analysis. Wer sich auch (bzw. zurzeit nur) für die lineare Algebra interessiert, kann ab diesem Zeitpunkt auch zusätzlich (bzw. ausschließlich) den Teil „Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra" in den Kapiteln **??** bis **??** durcharbeiten.

Hier in diesem Kapitel wollen wir zunächst nach den gerade behandelten elementaren Eigenschaften der reellen Zahlen noch ein paar weitere untersuchen, die vor allem in der Analysis nützlich sind. Unter anderem wird sich daraus am Ende dieses Kapitels auch eine vollständige Charakterisierung der reellen Zahlen ergeben.

4.A Potenzen in Körpern

Wir beginnen mit zwei weiteren oft vorkommenden Formeln zu Potenzen, die sich allein aus den Eigenschaften aus Abschnitt 3.A herleiten lassen und somit nicht nur in den reellen Zahlen, sondern sogar in beliebigen Körpern gelten. Mit der ersten – der sogenannten (endlichen) geometrischen Reihe – können wir den Wert einer Summe fortlaufender Potenzen eines Körperelements explizit berechnen.

Satz 4.1 (**Endliche geometrische Reihe**). *Es seien K ein Körper, $q \in K \backslash \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Beweis. Die Aussage ließe sich leicht mit Induktion über n zeigen. Der folgende sehr einfache alternative Beweis hilft jedoch auch dabei, sich die Formel zu merken: Multiplizieren wir die gesuchte Summe $\sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+\cdots+q^n$ mit $1-q$, so heben sich fast alle Terme weg und wir erhalten sofort das gewünschte Ergebnis: Es ist

$$\begin{aligned}(1+q+q^2+\cdots+q^n)\cdot(1-q) &= 1+q+q^2+\cdots+q^n \\ &\qquad -q-q^2-\cdots-q^n-q^{n+1} \\ &= 1-q^{n+1},\end{aligned}$$

und damit für $q \neq 1$ wie behauptet

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \qquad \square$$

Beispiel 4.2. In $\mathbb{R}$ ist z. B.

$$1+2+4+8+16 = \sum_{k=0}^{4} 2^k \overset{4.1}{=} \frac{1-2^5}{1-2} = \frac{-31}{-1} = 31.$$

Die zweite Formel, die wir hier behandeln wollen, ist die sogenannte binomische Formel, die eine Verallgemeinerung der aus der Schule bekannten Formel $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ auf höhere Exponenten darstellt. Dazu benötigen wir zunächst die folgende Definition.

Definition 4.3 (Fakultät und Binomialkoeffizienten)**.**

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i = 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n \quad \in \mathbb{N} \qquad \text{(gesprochen „}n\text{-}\textbf{Fakultät}\text{“)},$$

wobei $0!$ gemäß Notation 3.9 (c) als 1 zu verstehen ist.

(b) Für $k,n \in \mathbb{N}$ mit $k \le n$ definiert man ferner die **Binomialkoeffizienten**

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \text{(gesprochen „}n\text{ über }k\text{“)},$$

die so genannt werden, weil sie in der binomischen Formel in Satz 4.7 auftreten. Sie sind aufgrund der Definition zunächst positive rationale Zahlen; wir werden aber in Bemerkung 4.6 sehen, dass sie sogar natürliche Zahlen sind.

Bemerkung 4.4.

(a) Offensichtlich ist $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle $k,n \in \mathbb{N}$ mit $k \le n$.

(b) Man kann im definierenden Ausdruck für $\binom{n}{k}$ die Faktoren von 1 bis $n-k$ kürzen und erhält damit die alternative Darstellung der Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{1\cdot\dots\cdot(n-k)\cdot(n-k+1)\cdot\dots\cdot n}{(1\cdot\dots\cdot k)\cdot(1\cdot\dots\cdot(n-k))} = \frac{(n-k+1)\cdot\dots\cdot n}{1\cdot\dots\cdot k},$$

d. h. $\binom{n}{k}$ ist ein Bruch mit k Zahlen im Zähler und k Zahlen im Nenner, wobei man „im Zähler von n nach unten und im Nenner von 1 nach oben zählt“. So ist z. B. $\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n$ und $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Die wichtigste Identität zwischen den Binomialkoeffizienten ist die folgende:

Lemma 4.5. *Für alle $n,k \in \mathbb{N}$ mit $1 \le k \le n$ gilt $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.*

Beweis. Dies ergibt sich durch einfaches Nachrechnen mit der Darstellung aus Bemerkung 4.4 (b):

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdot\dots\cdot n}{1\cdot\dots\cdot k} + \frac{(n-k+2)\cdot\dots\cdot n}{1\cdot\dots\cdot(k-1)}\\ &= \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdot\dots\cdot n + k\cdot(n-k+2)\cdot\dots\cdot n}{1\cdot\dots\cdot k}\\ &= \frac{(n+1)\cdot(n-k+2)\cdot\dots\cdot n}{1\cdot\dots\cdot k}\\ &= \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$ □

Bemerkung 4.6 (Pascalsches Dreieck)**.** Man kann die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ wie folgt in einem dreieckigen Schema, dem sogenannten **Pascalschen Dreieck**, anordnen.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \swarrow & & & & & & \searrow \\ & & \binom{n}{k-1} & & \binom{n}{k} & & \\ & & & \binom{n+1}{k} & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \swarrow & & & & & & & & \searrow \end{array}$$

Nach Bemerkung 4.4 (a) stehen auf den Schenkeln dieses Dreiecks nur Einsen, und nach Lemma 4.5 ergibt sich jede andere Zahl in diesem Diagramm als die Summe der beiden darüber stehenden. Insbesondere folgt daraus, dass alle Binomialkoeffizienten *natürliche* Zahlen sind – was aus der Definition aufgrund des Bruches ja nicht offensichtlich ist. Wir können sie damit für jeden Körper K gemäß Notation 3.9 (d) als Elemente von K auffassen (was wir gleich in Satz 4.7 auch tun werden).

Mit dieser Vorarbeit können wir nun die sehr wichtige binomische Formel beweisen. Ihr Name kommt übrigens von der lateinischen Vorsilbe „bi“ für „zwei“: Ein Binom ist eine Summe, die aus zwei Termen besteht, und die binomische Formel berechnet die Potenzen eines solchen Binoms. Beachte, dass die Binomialkoeffizienten in dieser Formel gemäß Notation 3.9 (d) als Elemente des Körpers K aufgefasst werden.

Satz 4.7 (Binomische Formel). *Es seien K ein Körper, $x,y \in K$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Beispiel 4.8. Für $n=2$ ergibt Satz 4.7 wie erwartet die bekannte Formel

$$(x+y)^2 = \binom{2}{0} x^0 y^2 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^2 y^0 = y^2 + 2xy + x^2.$$

Beweis von Satz 4.7. Wir beweisen die Formel mit Induktion über n. Für $n=0$ sind beide Seiten der Gleichung 1; die Aussage ist in diesem Fall also richtig. Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, dass die Gleichung für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ richtig ist, und folgern daraus zunächst

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)\cdot(x+y)^n \\
&= (x+y)\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} && \text{(durch Ausmultiplizieren)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} && \text{(Indexverschiebung } k \mapsto k-1 \text{ in der} \\
& && \text{ersten Summe, siehe Notation 3.9 (c)).}
\end{aligned}$$

Lösen wir hier nun aus der ersten Summe den Term für $k=n+1$ und aus der zweiten den für $k=0$ heraus, so können wir diesen Ausdruck auch schreiben als

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] \cdot x^k y^{n+1-k} + \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot x^k y^{n+1-k} + x^{n+1} + y^{n+1} && \text{(nach Lemma 4.5).}
\end{aligned}$$

Die letzten beiden Summanden x^{n+1} und y^{n+1} sind hier aber genau diejenigen, die sich in der vorderen Summe ergeben, wenn man $k=n+1$ bzw. $k=0$ setzt. Also können wir die Summe über k gleich über alle Werte von 0 bis $n+1$ laufen lassen und erhalten

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k},$$

also genau die zu zeigende Gleichung für die Potenz $n+1$. Die binomische Formel ist damit durch Induktion bewiesen. □

Bemerkung 4.9 (Kombinatorische Deutung der Binomialkoeffizienten)**.** Man kann sich die binomische Formel natürlich auch so entstanden denken, dass man den Ausdruck

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot \dots \cdot (x+y)}_{n\text{-mal}}$$

nach dem Distributivgesetz ausmultipliziert. Im Fall $n=3$ erhalten wir z. B. zunächst ohne Verwendung der Kommutativität der Multiplikation

$$\begin{aligned}
(x+y)^3 &= (x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y) \\
&= (x+y)\cdot(xx+xy+yx+yy) \\
&= xxx+xxy+xyx+xyy+yxx+yxy+yyx+yyy. && (*)
\end{aligned}$$

Insgesamt bekommen wir also eine Summe aus Produkten mit jeweils n Faktoren x oder y. Jede Möglichkeit, alle diese Faktoren separat als x oder y zu wählen, kommt dabei genau einmal vor. Fassen wir nun mit der Kommutativität der Multiplikation gleiche Terme zusammen, so erhalten wir den Term $x^k y^{n-k}$ also genau so oft, wie wir Möglichkeiten haben, aus den n Faktoren die k auszuwählen, die gleich x sein sollen. In $(*)$ oben bekommen wir z. B. den Term xy^2 dreimal, nämlich aus xyy, yxy und yyx. Nach der binomischen Formel ist der Vorfaktor von $x^k y^{n-k}$ in $(x+y)^n$ aber gerade $\binom{n}{k}$. Daher ist dieser Binomialkoeffizient genau die Anzahl der Möglichkeiten, aus n Objekten (hier: Faktoren) k auszuwählen (hier: diejenigen, bei denen wir x gewählt haben). Man kann sich die binomische Formel also als algebraische Formulierung dieser kombinatorischen Aussage vorstellen.

Aufgabe 4.10.

(a) Beweise für alle $k,n \in \mathbb{N}$ mit $k \le n$ die Gleichung

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

(b) Zeige mit Induktion über n, dass die Gleichung

$$x_1 + \cdots + x_n = d$$

für gegebenes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $d \in \mathbb{N}$ genau $\binom{n+d-1}{n-1}$ Lösungen $(x_1,\dots,x_n)$ in *natürlichen* Zahlen $x_1,\dots,x_n$ besitzt.

Aufgabe 4.11. Für alle $n,p \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $s_p(n) := \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + \cdots + n^p$ die Summe der p-ten Potenzen aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.

(a) Beweise für alle $n,p \in \mathbb{N}$ die Formel

$$\binom{p+1}{0} s_0(n) + \binom{p+1}{1} s_1(n) + \cdots + \binom{p+1}{p} s_p(n) = (n+1)^{p+1} - 1.$$

(b) Zeige mit Hilfe von (a), dass s_2 ein Polynom in n ist, und berechne dieses Polynom explizit. Ist s_p für alle $p \in \mathbb{N}$ ein Polynom in n?

Aufgabe 4.12. Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir das Polynom

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1.$$

Man zeige:

(a) Ist n ungerade, so hat f genau eine Nullstelle. Was ist ihre Vielfachheit?

(b) Ist n gerade, so hat f keine Nullstelle.

4.B Geordnete Körper

Wir haben bisher von den reellen Zahlen nur die Körpereigenschaften, also die Eigenschaften der vier Grundrechenarten ausgenutzt – und dabei z. B. in Beispiel 3.6 (b) gesehen, dass es außer den reellen Zahlen auch noch ganz andere (und in der Tat sogar sehr viele) Körper gibt. Wir müssen also noch weitere Eigenschaften auflisten, um die reellen Zahlen eindeutig zu charakterisieren. Dies wollen wir im Rest dieses Kapitels tun.

Eine Eigenschaft der reellen Zahlen, die wir bisher völlig vernachlässigt haben, ist, dass man sie *ordnen* kann, also dass man zwei Zahlen der Größe nach vergleichen kann. Die Eigenschaften dieser Ordnungsrelation werden im Begriff des sogenannten *geordneten Körpers* formalisiert.

Definition 4.13 (Geordnete Körper)**.** Ein Körper K heißt **geordneter** oder **angeordneter Körper**, wenn in ihm eine Menge $P \subset K$ (die „Menge der positiven Zahlen") gegeben ist, so dass die folgenden drei Eigenschaften gelten:

(a) Für alle $x \in K$ gilt *genau* eine der drei Eigenschaften $x = 0$, $x \in P$ oder $-x \in P$. (Im zweiten Fall nennt man x eine **positive** Zahl, im dritten eine **negative** Zahl.)

(b) Für alle $x, y \in P$ ist $x + y \in P$ („die Summe zweier positiver Zahlen ist positiv").

(c) Für alle $x, y \in P$ ist $xy \in P$ („das Produkt zweier positiver Zahlen ist positiv").

In diesem Fall schreibt man $x < y$ oder $y > x$ falls $y - x \in P$, und $x \leq y$ oder $y \geq x$ falls $y - x \in P$ oder $y = x$. (Insbesondere ist also $x > 0$ genau dann, wenn $x \in P$, und $x < 0$ genau dann, wenn $-x \in P$; außerdem gilt nach (a) für $x, y \in K$ stets genau eine der Aussagen $x = y$, $x < y$ oder $y < x$.)

Beispiel 4.14.

(a) $\mathbb{R}$ ist ein geordneter Körper (was wir hier wiederum axiomatisch voraussetzen wollen). Nennt man in der Teilmenge $\mathbb{Q}$ von $\mathbb{R}$ genau die Zahlen positiv, die es auch in $\mathbb{R}$ sind, so ist damit auch $\mathbb{Q}$ ein geordneter Körper.

(b) Der Körper $\mathbb{Z}_2$ aus Beispiel 3.6 (b) kann nicht zu einem geordneten Körper gemacht werden: Das Element $1 = u$ ist nicht gleich 0, also müsste nach Definition 4.13 (a) genau eine der beiden Eigenschaften $1 \in P$ und $-1 \in P$ gelten. Dies ist aber unmöglich, da wegen $1 + 1 = 0$ in $\mathbb{Z}_2$ die Gleichung $-1 = 1$ gilt.

Bemerkung 4.15 (Partielle und totale Ordnungen)**.** Ist K ein geordneter Körper, so ist $\leq$ wie in Definition 4.13 natürlich eine Relation auf K im Sinne von Definition 2.1. Sie besitzt die folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in K$:

(a) **Reflexivität**: Es gilt $x \leq x$.

(b) **Antisymmetrie**: Ist $x \leq y$ und $y \leq x$, so folgt $x = y$.

(c) **Transitivität**: Gilt $x \leq y$ und $y \leq z$, so folgt auch $x \leq z$.

(d) **Totalität**: Es gilt (mindestens) eine der Aussagen $x \leq y$ und $y \leq x$. (Mit anderen Worten: „Zwei beliebige Elemente von K sind stets miteinander vergleichbar.")

In der Tat folgt (a) unmittelbar aus Definition 4.13. Da $x \leq y$ nach Definition äquivalent zu $y - x \in P$ oder $y - x = 0$ ist, und $y \leq x$ zu $-(y - x) \in P$ oder $y - x = 0$, ergeben sich (b) und (d) außerdem aus Definition 4.13 (a). Die Aussage (c) schließlich ist trivial falls $x = y$ oder $y = z$; andernfalls gilt $y - x \in P$ oder $z - y \in P$, und damit $z - x = (y - x) + (z - y) \in P$, also $x < z$, nach Definition 4.13 (b).

Auf einer beliebigen Menge K (die also nicht notwendig ein Körper ist) nennt man eine Relation $\leq$ mit den Eigenschaften (a), (b) und (c) eine **partielle Ordnung**. Gilt zusätzlich noch (d), so heißt $\leq$ eine **(totale) Ordnung** auf K. Jeder geordnete Körper K liefert also eine totale Ordnung auf K.

Das Standardbeispiel für eine partielle Ordnung auf einer Menge ist die Teilmengenrelation auf der Potenzmenge $\mathscr{P}(M)$ einer beliebigen Menge M: Sind $A, B, C \in \mathscr{P}(M)$ Teilmengen von M, so gilt natürlich $A \subset A$; aus $A \subset B$ und $B \subset A$ folgt $A = B$; und aus $A \subset B$ und $B \subset C$ folgt $A \subset C$. Diese partielle Ordnung ist aber in der Regel nicht total: Für $M = \mathbb{N}$ sind die Teilmengen $A = \{0\}$ und $B = \{1\}$ nicht vergleichbar, denn es gilt weder $A \subset B$ noch $B \subset A$.

Wie schon bei den Körpern wollen wir nun auch hier für einen geordneten Körper kurz die wichtigsten Eigenschaften ableiten, die aus der Definition folgen (und die euch für die reellen Zahlen sicher bekannt sind). Wir werden sie im Folgenden verwenden, ohne jedes Mal darauf hinzuweisen.

Lemma 4.16 (Eigenschaften geordneter Körper)**.** *Für alle x, y, z in einem geordneten Körper K gilt:*

(a) *Ist $x < y$, so folgt $x + z < y + z$.*

(b) *Ist $x < y$ und $z > 0$, so gilt auch $xz < yz$. Ist dagegen $x < y$ und $z < 0$, so folgt $xz > yz$.*
(Ungleichungen drehen sich also bei der Multiplikation mit einer negativen Zahl um.)

(c) *Gilt $x \neq 0$, so ist $x^2 > 0$. Insbesondere ist also $1 > 0$.*

(d) *Wenn $0 < x < y$, dann folgt $0 < y^{-1} < x^{-1}$.*

Entsprechende Aussagen gelten natürlich auch für die nicht-strikten Ungleichungen $\leq$ bzw. $\geq$.

Beweis.

(a) Ist $x < y$, also $y - x \in P$, so ist auch $(y+z) - (x+z) = y - x \in P$, also $x + z < y + z$.

(b) Gilt wieder $y - x \in P$ und $z \in P$, so folgt aus Definition 4.13 (c) auch $(y-x)z = yz - xz \in P$, also $xz < yz$. Ist hingegen $z < 0$, also $-z \in P$, so gilt diesmal $(y-x)(-z) = xz - yz \in P$, also $yz < xz$.

(c) Ist $x \in P$, so ist natürlich auch $x^2 \in P$ nach Definition 4.13 (c). Ist $-x \in P$, so folgt genauso $x^2 = (-x)^2 \in P$. Also ist für $x \neq 0$ in jedem Fall $x^2 > 0$. Insbesondere ist damit $1 = 1 \cdot 1 > 0$.

(d) Wegen $x > 0$ folgt aus (c) und Definition 4.13 (c) zunächst $x^{-1} = x \cdot (x^{-1})^2 \in P$, also $x^{-1} > 0$. Genauso ergibt sich $y^{-1} > 0$. Ist nun $x < y$, so folgt aus (b) durch Multiplikation mit der positiven Zahl $x^{-1}y^{-1}$ die Ungleichung $xx^{-1}y^{-1} < yx^{-1}y^{-1}$, also $y^{-1} < x^{-1}$, was zu zeigen
06 war. □

Notation 4.17 (Intervalle und Betrag)**.** Die folgenden Notationen verwendet man häufig in einem geordneten Körper K.

(a) Sind $a, b \in K$ mit $a \leq b$, so definiert man die folgenden Teilmengen von K:

- $[a,b] := \{x \in K : a \leq x \leq b\}$ (**abgeschlossene** bzw. **kompakte Intervalle**);
- $(a,b) := \{x \in K : a < x < b\}$ (**offene Intervalle**);
- $[a,b) := \{x \in K : a \leq x < b\}$ (**halboffene Intervalle**);
- $[a,\infty) := K_{\geq a} = \{x \in K : x \geq a\}$ (**uneigentliche Intervalle**);

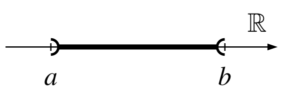
und analog natürlich $(a,b]$, (a,∞), $(-\infty,b]$ und $(-\infty,b)$. Wenn wir derartige Intervalle im Fall $K = \mathbb{R}$ graphisch darstellen, deuten wir wie im Bild unten meistens durch Rundungen an den Intervallgrenzen an, ob die Randpunkte mit dazugehören sollen oder nicht.

In der Literatur sind statt der runden Klammern oft auch „falsch herum geöffnete" eckige Klammern üblich, also z. B. $[a,b[$ statt $[a,b)$.

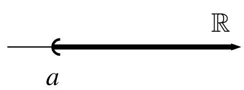
(b) Für $x \in K$ definieren wir den **Betrag** von x als

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

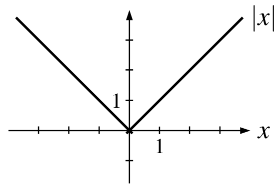
Insbesondere gilt also immer $|x| \geq 0$. Im Fall $K = \mathbb{R}$ sieht die Betragsfunktion natürlich wie im folgenden Bild rechts aus.



(a,b)



$[a,\infty)$



Die wichtigsten beiden Eigenschaften der Betragsfunktion sind ihre „Verträglichkeit" mit Addition und Multiplikation:

Lemma 4.18 (Eigenschaften der Betragsfunktion)**.** *Für alle x, y in einem geordneten Körper K gilt:*

(a) $|xy| = |x| \cdot |y|$. *Insbesondere ergibt sich daraus für $y = -1$, dass $|-x| = |x|$.*

(b) $x \leq |x|$.

(c) $|x+y| \leq |x| + |y|$. *Diese Ungleichung bezeichnet man als **Dreiecksungleichung** – wir werden in Bemerkung* **?? ??** *sehen, warum.*

Beweis.

(a) Wir machen eine Fallunterscheidung je nach Vorzeichen von x und y. Ist z. B. $x \geq 0$ und $y \leq 0$, so ist $xy \leq 0$ und damit nach Definition des Betrages $|x| = x$, $|y| = -y$ und $|xy| = -xy$.

Zusammensetzen dieser Gleichungen ergibt die Behauptung $|xy| = -xy = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$. Die anderen Fälle der möglichen Vorzeichenverteilungen beweist man genauso.

(b) Für $x \leq 0$ ist $x \leq 0 \leq |x|$; für $x \geq 0$ ist $x = |x|$.

(c) Nach (b), angewendet auf x und y, gilt (mit Lemma 4.16 (a))

$$x + y \leq |x| + |y|. \tag{1}$$

Wenden wir (b) hingegen auf $-x$ und $-y$ an, so folgt auch

$$-x - y \leq |-x| + |-y| \overset{(a)}{=} |x| + |y|. \tag{2}$$

Aber $|x+y|$ ist in jedem Fall eine der beiden Zahlen $x+y$ oder $-x-y$. Damit folgt die Behauptung $|x+y| \leq |x| + |y|$ aus (1) und (2). □

Bemerkung 4.19 (Dreiecksungleichung nach oben und unten)**.** Die Dreiecksungleichung aus Lemma 4.18 (c) schätzt den Betrag $|x+y|$ einer Summe nach oben ab. Offensichtlich gilt im Allgemeinen keine Gleichheit, wie das Beispiel $x = 1$, $y = -1$ zeigt: Hier ist $|x+y| = 0 < 2 = |x| + |y|$.

Eine Abschätzung nach unten kann man erhalten, indem man Lemma 4.18 (c) auf die Zahlen $x+y$ und $-y$ anwendet: Man erhält dann nämlich $|x| = |(x+y) - y| \leq |x+y| + |-y| = |x+y| + |y|$ und damit $|x+y| \geq |x| - |y|$. Insgesamt haben wir also für alle $x, y \in K$

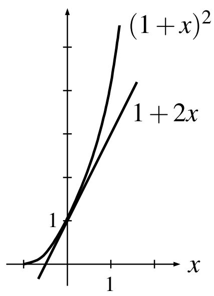
$$|x| - |y| \leq |x+y| \leq |x| + |y|.$$

Eine weitere Anwendung der Eigenschaften eines geordneten Körpers ist die folgende Ungleichung, die oftmals dann nützlich ist, wenn die Größe von Potenzen x^n mit der von Produkten $n \cdot x$ verglichen werden soll.

Satz 4.20 (Bernoullische Ungleichung). *Es seien K ein geordneter Körper, $x \in K$ mit $x \geq -1$, und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage mit Induktion über n. Das Bild rechts unten veranschaulicht die Ungleichung im Fall $K = \mathbb{R}$ und $n = 2$.

Der Induktionsanfang für $n = 0$ ist klar: dann sind beide Seiten gleich 1, die Ungleichung ist also erfüllt.



Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, dass

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

für alle $x \geq -1$ und ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Mit Lemma 4.16 (b) können wir diese Ungleichung mit der nach Voraussetzung nicht-negativen Zahl $1+x$ multiplizieren und erhalten

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2.$$

Nach Lemma 4.16 (c) ist nun $nx^2 \geq 0$ und damit $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$, was zu zeigen war. □

Aufgabe 4.21. Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ bzw. $n \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden Ungleichungen?

(a) $\dfrac{2xy}{x+y} \leq \dfrac{x+y}{2}$ (b) $\dfrac{4^n}{2n+1} < \dbinom{2n}{n} < 4^n$ (c) $n! < \left(\dfrac{n}{2}\right)^n$

4.C Supremum und Infimum

Wie bereits angekündigt wollen wir in diesem Abschnitt nun endlich eine eindeutige axiomatische Charakterisierung der reellen Zahlen angeben. Bisher haben wir nur gesehen, dass $\mathbb{R}$ ein geordneter Körper ist. Aber auch $\mathbb{Q}$ ist ein geordneter Körper, und daher müssen wir noch untersuchen, wie sich $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet. Anschaulich würden wir dies wohl so formulieren, dass die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen „Löcher" auf der Zahlengeraden hat, also dass es Punkte wie z. B. $\sqrt{2}$ auf der Zahlengeraden gibt, die keiner rationalen Zahl entsprechen (siehe Lemma 4.36). Aber wie formuliert man so etwas exakt?

Um dies zu sehen, müssen wir genauer untersuchen, wann Teilmengen eines geordneten Körpers K größte bzw. kleinste Elemente haben. Dazu können wir natürlich zunächst auf die offensichtliche Art das Maximum und Minimum zweier Elemente von K definieren.

Definition 4.22 (Maximum und Minimum endlich vieler Zahlen)**.** Für zwei Elemente x und y eines geordneten Körpers K definieren wir das **Maximum** und **Minimum** durch

$$\max(x,y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y, \\ y & \text{falls } y \geq x \end{cases} \quad \text{und} \quad \min(x,y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \leq y, \\ y & \text{falls } y \leq x. \end{cases}$$

Analog kann man auch das Maximum und Minimum von mehr als zwei Zahlen definieren, *sofern es nur endlich viele sind.* Betrachten wir dagegen eine (unendliche) Teilmenge $M \subset K$, so können wir in der Regel nicht mehr erwarten, dass M ein kleinstes bzw. größtes Element hat, allein schon weil die Menge dann in folgendem Sinne unbeschränkt sein kann:

Definition 4.23 (Beschränkte Mengen)**.** Es sei M eine Teilmenge eines geordneten Körpers K.

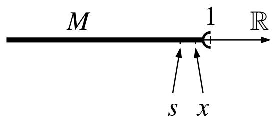
(a) Ein Element $s \in K$ heißt **obere Schranke** für M, wenn $x \leq s$ für alle $x \in M$. Existiert eine solche obere Schranke für M, so nennt man M **nach oben beschränkt**. Analog definiert man den Begriff einer **unteren Schranke** bzw. einer **nach unten beschränkten** Menge.

(b) Die Menge M heißt **beschränkt**, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist, oder – äquivalent dazu – wenn die Menge ihrer Beträge beschränkt ist, also wenn es ein $s \in K$ gibt mit $|x| \leq s$ für alle $x \in M$.

Beispiel 4.24. Es sei $M = \mathbb{R}_{<1}$ im geordneten Körper $\mathbb{R}$.

(a) Die Menge M ist nach oben (aber nicht nach unten) beschränkt, denn $s = 1$ ist eine obere Schranke für M. Genauso ist auch $s = 2$ eine obere Schranke für M, auch wenn man anschaulich vielleicht sagen würde, dass diese Schranke „nicht so gut" ist, weil $x \leq 2$ für alle $x \in M$ eine schwächere Aussage ist als $x \leq 1$ für alle $x \in M$.

(b) Ist $s \in M$, also $s < 1$, so gilt für den Mittelpunkt $x := \frac{s+1}{2}$ zwischen s und 1 wie im Bild rechts natürlich



$$x = \frac{s+1}{2} > \frac{s+s}{2} = s \quad \text{und} \quad x = \frac{s+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1.$$

Hieraus ergeben sich sofort zwei einfache Folgerungen:

- Es gibt keine größte Zahl in M (denn zu $s \in M$ liegt die größere Zahl x wegen $x < 1$ ebenfalls noch in M).
- Die Menge M ist aber nach (a) nach oben beschränkt, und die kleinste mögliche obere Schranke für M ist 1 (denn $s < 1$ kann keine obere Schranke mehr sein, da $x > s$ ebenfalls noch in M liegt).

Die Zahl 1 kann damit als „Obergrenze der Zahlen in M" angesehen werden, auch wenn sie kein Element von M und daher keine größte Zahl in M ist. Dieses Konzept wollen wir jetzt exakt definieren.

Definition 4.25 (Supremum und Infimum)**.** Es sei M eine Teilmenge eines geordneten Körpers K.

(a) Eine Zahl $s \in K$ heißt ein **Supremum** von M, wenn s eine „kleinste obere Schranke für M" ist, d. h. wenn gilt:

- s ist eine obere Schranke für M; und
- für jede obere Schranke s' für M gilt $s \leq s'$.

(b) Eine Zahl $s \in K$ heißt ein **Maximum** von M, wenn s eine „obere Schranke für M in M" ist, d. h. wenn gilt:

- s ist eine obere Schranke für M; und
- $s \in M$.

Analog heißt $s \in K$ ein **Infimum** von M, wenn s eine größte untere Schranke für M ist, und ein **Minimum**, wenn s eine untere Schranke für M in M ist.

Bemerkung und Notation 4.26 ($\sup M$, $\max M$, $\inf M$, $\min M$)**.**

(a) Jedes Maximum s einer Menge M ist auch ein Supremum von M: Ist dann nämlich $s' \in K$ eine weitere obere Schranke, so folgt wegen $s \in M$ natürlich sofort $s \leq s'$.

(b) Wenn die Menge M ein Supremum besitzt, dann ist es eindeutig bestimmt: Sind nämlich s_1 und s_2 zwei kleinste obere Schranken, so folgt nach Definition 4.25 (a) sofort $s_1 \leq s_2$ (weil s_1 eine kleinste obere Schranke und s_2 auch eine obere Schranke ist) und $s_2 \leq s_1$ (weil s_2 Supremum und s_1 auch eine obere Schranke ist), also $s_1 = s_2$. Nach (a) ist damit auch ein Maximum von M eindeutig bestimmt, falls es existiert.

Wenn ein Supremum oder Maximum von M existiert, können wir also von *dem* Supremum bzw. *dem* Maximum von M reden. Wir bezeichnen es dann mit $\sup M$ bzw. $\max M$.

(c) Analog sind natürlich auch Infimum und Minimum von M eindeutig bestimmt, sofern sie existieren; wir bezeichnen sie dann mit $\inf M$ bzw. $\min M$.

Beispiel 4.27.

(a) Die Menge $M = \mathbb{R}_{\leq 1}$ hat offensichtlich das Maximum 1. Nach Bemerkung 4.26 (a) ist 1 damit auch das Supremum von M, d. h. es ist $\sup M = \max M = 1$.

(b) Das uneigentliche Intervall $M = \mathbb{R}_{<1}$ hat nach Beispiel 4.24 (b) kein Maximum, aber es gilt $\sup M = 1$.

(c) Das uneigentliche Intervall $M = \mathbb{R}_{>1}$ besitzt kein Supremum (und damit auch kein Maximum), da M nach oben unbeschränkt ist, also nicht einmal irgendeine obere Schranke für M existiert – insbesondere also keine kleinste.

(d) Auch die leere Menge hat kein Supremum, weil für sie jede reelle Zahl eine obere Schranke ist und damit keine kleinste obere Schranke existiert.

Aufgabe 4.28. Es seien A und B zwei Teilmengen eines geordneten Körpers K, die ein Supremum $\sup A$ bzw. $\sup B$ besitzen. Setzen wir $A+B := \{x+y : x \in A, y \in B\}$ und $-A := \{-x : x \in A\}$, so zeige man, dass auch die folgenden Suprema und Infima existieren und die behaupteten Werte haben:

(a) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

(b) $\inf(-A) = -\sup A$.

(c) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Unsere bisher betrachteten Beispiele von Mengen ohne Supremum in Beispiel 4.27 (c) und (d) waren letztlich trivial – also Mengen, die überhaupt keine obere Schranke besitzen, und die leere Menge. Ist es auch möglich, dass eine Menge (die natürlich nicht unbedingt ein Intervall sein muss) zwar nicht leer und nach oben beschränkt ist, aber trotzdem keine *kleinste* obere Schranke hat? In der Tat ist dies in $\mathbb{R}$ im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$ nicht möglich, und wie wir sehen werden, ist genau dies der wesentliche Unterschied zwischen diesen beiden Körpern. Wir definieren daher zunächst:

Definition 4.29 (Supremumsaxiom)**.** Wir sagen, dass ein geordneter Körper das **Supremumsaxiom** erfüllt, wenn in ihm jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt. (Natürlich besitzt dann nach Aufgabe 4.28 (b) auch jede nicht leere, nach unten beschränkte Teilmenge ein Infimum.)

Die reellen Zahlen erfüllen also dieses Supremumsaxiom – das werden wir in dieser Vorlesung axiomatisch voraussetzen, und das ist nun auch endlich die letzte Eigenschaft der reellen Zahlen, die wir benötigen. Wenn wir dieses und das vorangegangene Kapitel zusammenfassen, setzen wir nun also insgesamt über die reellen Zahlen voraus:

$$\boxed{\mathbb{R} \text{ ist ein geordneter Körper, der das Supremumsaxiom erfüllt.}}$$

Wie schon in Notation 1.14 gesagt, kann man die Existenz der reellen Zahlen auch aus den Axiomen der Logik und Mengenlehre herleiten – und dann ist es natürlich ein beweisbarer Satz, dass $\mathbb{R}$ ein geordneter Körper ist, der das Supremumsaxiom erfüllt. Man kann sogar noch mehr zeigen, nämlich dass diese Eigenschaften die reellen Zahlen auch vollständig charakterisieren: $\mathbb{R}$ ist in der Tat der *einzige* geordnete Körper, der das Supremumsaxiom erfüllt. Der Beweis dieser Aussage ist jedoch sehr schwierig und soll hier nicht gegeben werden, zumal wir diese Aussage auch nicht benötigen werden. Wir werden lediglich in Bemerkung 4.37 noch sehen, dass $\mathbb{Q}$ das Supremumsaxiom in der Tat nicht erfüllt.

Für uns bedeutet diese Tatsache letztlich nur, dass wir ab jetzt alles, was wir mit den reellen Zahlen tun möchten, ausschließlich auf den Axiomen eines geordneten Körpers und dem Supremumsaxiom aufbauen können und werden.

Wir wollen nun ein paar erste elementare Folgerungen aus dem Supremumsaxiom ziehen. Seine wahre Stärke wird dieses Axiom jedoch erst im nächsten Kapitel bei der Untersuchung von Grenzwerten von Folgen zeigen.

Satz 4.30 ($\mathbb{R}$ ist **archimedisch geordnet**). *Die Teilmenge $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\} \subset \mathbb{R}$ ist nach oben unbeschränkt.*

Beweis. Angenommen, $\mathbb{N}$ wäre nach oben beschränkt. Dann würde nach dem Supremumsaxiom $s := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ existieren. Da s die *kleinste* obere Schranke ist, ist $s-1$ keine obere Schranke; es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > s-1$. Dann ist aber $n+1 \in \mathbb{N}$ mit $n+1 > s$, im Widerspruch dazu, dass s eine obere Schranke für $\mathbb{N}$ ist. □

Bemerkung 4.31.

(a) Eine einfache, aber oft verwendete Folgerung aus Satz 4.30 ist, dass es zu jeder positiven Zahl $x \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt mit $\frac{1}{n} < x$: Da $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt ist, ist insbesondere $\frac{1}{x}$ keine obere Schranke für $\mathbb{N}$. Also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{x}$, und damit nach Lemma 4.16 (d) mit $\frac{1}{n} < x$.

(b) Satz 4.30 mag zwar selbstverständlich erscheinen – man kann allerdings in der Tat geordnete Körper konstruieren, in denen diese Aussage falsch ist, in denen es also „unendlich große" Elemente gibt, die größer sind als jede Zahl, die man durch fortlaufende Addition der 1 erreichen kann [E, Kapitel 11].

Aufgabe 4.32. Bestimme Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (sofern sie existieren) der Menge

$$M = \left\{ \frac{m+n}{mn} : m,n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \quad \subset \mathbb{R}.$$

07

Folgerung 4.33. *Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ hat ein Maximum. Entsprechend hat jede nicht-leere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ein Minimum.*

*Insbesondere hat also jede nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein Minimum. (Man sagt dafür auch: $\mathbb{N}$ ist **wohlgeordnet**.)*

Beweis. Es sei $M \subset \mathbb{Z}$ nicht-leer und nach oben beschränkt, mit oberer Schranke s. Nach Satz 4.30 gibt es weiterhin eine natürliche Zahl $b > s$, die dann natürlich auch eine obere Schranke für M ist.

Ist $a \in M$ nun ein beliebiges Element, so ist $M_{\geq a} = M \cap \{a, a+1, \dots, b\}$ eine nicht-leere endliche Menge, die demzufolge natürlich ein Maximum besitzt. Alle anderen Zahlen von M sind aber noch kleiner als a, so dass dieses Maximum also auch das Maximum von M ist. □

Bemerkung 4.34 (*Gaußklammer*). Nach Folgerung 4.33 kann man für alle $x \in \mathbb{R}$ die Zahl

$$\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$$

definieren, da die Menge aller $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq x$ nach Satz 4.30 nicht leer ist (es gibt ja ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq -x$, wir können dann $k = -n$ setzen), und natürlich durch x nach oben beschränkt. Als die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x kann man sie sich als „Abrundung" von x vorstellen; es ist also z. B.

$$\left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor = 3 \quad \text{und} \quad \left\lfloor -\frac{7}{2} \right\rfloor = -4.$$

Folgerung 4.35 ($\mathbb{Q}$ liegt **dicht** in $\mathbb{R}$)**.** *Jedes nicht-leere offene Intervall (a,b) in $\mathbb{R}$ enthält eine rationale Zahl.*

Beweis. Nach Bemerkung 4.31 (a) gibt es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\frac{1}{n} < b-a$. Weiterhin ist die Menge

$$M := \left\{ k \in \mathbb{Z} : \frac{k}{n} > a \right\} = \{k \in \mathbb{Z} : k > na\}$$

nach Satz 4.30 nicht-leer und durch na nach unten beschränkt, und besitzt damit nach Folgerung 4.33 ein Minimum k. Für dieses Minimum gilt also:

(a) $k \in M$ und damit $\frac{k}{n} > a$;

(b) $k-1 \notin M$ und damit $\frac{k-1}{n} \le a$, d. h.

$$\frac{k}{n} \le a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b.$$

Also ist $\frac{k}{n}$ eine rationale Zahl im offenen Intervall (a,b). □

Als eine Konsequenz aus dieser Folgerung wollen wir wie bereits angekündigt nun sehen, dass die rationalen Zahlen das Supremumsaxiom nicht erfüllen, dass hier also der entscheidende Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ liegt. Wir untersuchen dazu zunächst, ob es eine Quadratwurzel aus 2 gibt, also eine positive Zahl x mit $x^2 = 2$ (die wir dann als $\sqrt{2}$ schreiben).

Lemma 4.36 (Irrationalität von $\sqrt{2}$)**.** *Es gibt keine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.*

Beweis. Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$. Wir können x als gekürzten Bruch $x = \frac{p}{q}$ (mit $p,q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0$) schreiben und erhalten

$$x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2, \quad \text{also} \quad p^2 = 2q^2. \tag{$*$}$$

Also muss p^2 und damit auch p selbst eine gerade Zahl, d. h. durch 2 teilbar sein. Wir können daher $p = 2r$ für eine ganze Zahl $r \in \mathbb{Z}$ setzen. Einsetzen in $(*)$ liefert

$$(2r)^2 = 2q^2, \quad \text{also} \quad q^2 = 2r^2.$$

Aber dann muss auch q^2 und damit q eine gerade Zahl sein – was ein Widerspruch dazu ist, dass die Darstellung von x als Bruch $\frac{p}{q}$ als gekürzt vorausgesetzt worden ist. □

Wie ihr aus der Schule wisst, gibt es aber in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ eine Wurzel aus 2. Da unsere Axiome, dass $\mathbb{R}$ ein geordneter Körper ist, der das Supremumsaxiom erfüllt, die reellen Zahlen ja vollständig beschreiben, könnten wir die Existenz dieser Wurzel jetzt sogar aus unseren Axiomen beweisen: Die Menge $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ ist offensichtlich eine nicht-leere, nach oben beschränkte Menge, die demzufolge ein Supremum s besitzt – und für dieses Supremum kann man zeigen, dass $s^2 = 2$ gilt, also dass s eine Wurzel aus 2 ist. Dieser Beweis ist jedoch recht technisch, und da wir in Folgerung **??** ohnehin die Existenz reeller Quadratwurzeln aus beliebigen nicht-negativen Zahlen aus unseren Axiomen beweisen werden, wollen wir hier darauf verzichten und für die folgende Bemerkung der Einfachheit halber annehmen, dass $\sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$ existiert, zumal wir diese Bemerkung im Folgenden nicht verwenden werden.

Bemerkung 4.37 ($\mathbb{Q}$ erfüllt das Supremumsaxiom nicht)**.** Es sei $M := \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$. Diese Menge ist offensichtlich nicht leer (denn $0 \in M$) und nach oben beschränkt (z. B. mit oberer Schranke 2). Würde $\mathbb{Q}$ das Supremumsaxiom erfüllen, müsste sie also ein Supremum $s := \sup M \in \mathbb{Q}$ besitzen. Allerdings ist für dieses Supremum sowohl $s < \sqrt{2}$ als auch $s > \sqrt{2}$ ausgeschlossen:

- $s < \sqrt{2}$ kann keine obere Schranke für M sein, denn nach Folgerung 4.35 gäbe es dann eine rationale Zahl $x \in (s, \sqrt{2})$, also mit $x \in M$, aber $x > s$.
- $s > \sqrt{2}$ kann keine *kleinste* obere Schranke für M sein, denn wieder nach Folgerung 4.35 gäbe es nun eine rationale Zahl $s' \in (\sqrt{2}, s)$, die kleiner ist als s, aber immer noch eine obere Schranke für M (da aus $x \in M$, also $x < \sqrt{2}$, ja sofort auch $x < s'$ folgt).

Also bleibt nur die Möglichkeit $s = \sqrt{2}$, was aber nach Lemma 4.36 ein Widerspruch zu $s \in \mathbb{Q}$ ist. Damit erfüllt $\mathbb{Q}$ das Supremumsaxiom nicht. Anschaulich hat M zwar ein Supremum in $\mathbb{R}$, nämlich $\sqrt{2}$, aber genau an dieser Stelle hat $\mathbb{Q}$ ein „Loch" auf der Zahlengeraden – und daher existiert kein Supremum von M in $\mathbb{Q}$.

Bemerkung 4.38 (Uneigentliche Suprema)**.** Nach dem Supremumsaxiom existiert das Supremum $\sup M$ für jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$. Oft ist es praktisch, diese Notation wie folgt auf beliebige Teilmengen von $\mathbb{R}$ zu erweitern:

(a) Ist $M = \emptyset$, so schreiben wir formal $\sup M = -\infty$. (Anschaulich: Jede reelle Zahl ist eine obere Schranke der leeren Menge, daher ist „die kleinste" davon $-\infty$.)

(b) Ist $M \neq \emptyset$ nach oben unbeschränkt, so schreiben wir formal $\sup M = \infty$. (Anschaulich: Ist M nach oben unbeschränkt, so ist keine reelle Zahl eine obere Schranke für M, die einzige und damit kleinste „obere Schranke" für M ist also ∞.)

Man spricht in diesem Fall von *uneigentlichen Suprema*. Analog setzt man natürlich $\inf \emptyset = \infty$ und $\inf M = -\infty$ für jede nach unten unbeschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$.

Mit „wir schreiben formal" ist dabei oben gemeint, dass $-\infty$ und ∞ natürlich keine Zahlen sind, mit denen man uneingeschränkt wie gewohnt rechnen kann. Manche Rechenoperationen wie z. B. $\infty + x := \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$ lassen sich zwar noch intuitiv sinnvoll definieren (siehe Bemerkung **??**), aber andere wie z. B. $\infty - \infty$ nicht. Mit anderen Worten ist $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ kein Körper. Trotzdem hat die Einführung uneigentlicher Suprema und Infima den Vorteil, dass $\sup M$ und $\inf M$ für *jede* Teilmenge M von $\mathbb{R}$ definiert sind, und Aussagen darüber oft auch in den neuen Fällen gültig bleiben. So gelten z. B. die Aussagen aus Aufgabe 4.28 sogar für beliebige Teilmengen von $\mathbb{R}$ (sofern in (c) rechts nicht der unbestimmte Ausdruck $\infty - \infty$ auftritt) – allerdings brauchen wir dafür natürlich einen neuen Beweis, da ja schon die Definition eines uneigentlichen Supremums eine andere als üblich ist.

5. Folgen und Grenzwerte

Nachdem wir die reellen Zahlen vollständig charakterisiert haben, wollen wir jetzt zur eigentlichen Analysis kommen. Der zentrale Begriff ist dabei der des Grenzwerts, den ihr ja sicher in der Schule schon in der einen oder anderen Form kennengelernt habt und den wir jetzt exakt einführen wollen. Wir beginnen dabei mit Grenzwerten von Folgen, da sie für den Anfang einfacher sind als die später auch noch wichtigen Grenzwerte von Funktionen.

5.A Grenzwerte von Folgen

Zur Untersuchung des Grenzwertbegriffs müssen wir als Erstes exakt definieren, was wir damit meinen, dass sich eine (unendlich lange) Folge reeller Zahlen einem Wert beliebig genau annähert.

Definition 5.1 (Folgen und Grenzwerte)**.**

(a) Eine **Folge** in einer Menge M ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \to M, \;\; n \mapsto a_n.$$

Man schreibt eine solche Folge als $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, einfach nur als $(a_n)_n$, oder durch Aufzählen der Folgenglieder als $(a_0, a_1, a_2, \dots)$. Hin und wieder ist in der Literatur auch die noch weiter verkürzte Schreibweise (a_n) zu finden, die wir hier allerdings nicht verwenden wollen, um Verwechslungen der Folge $(a_n)_n$ mit einem zufällig eingeklammerten Folgenglied a_n zu vermeiden.

Manchmal ist es bequem, Folgen nicht beim Index 0, sondern bei einem anderen Startindex $n_0 \in \mathbb{Z}$ beginnen zu lassen – wenn man dies in der Notation deutlich machen möchte, schreibt man derartige Folgen als $(a_n)_{n\geq n_0}$.

In diesem Kapitel werden wir nur den Fall $M = \mathbb{R}$, also sogenannte *reelle Folgen* betrachten. Wir werden daher oft nur von einer Folge sprechen und damit dann immer eine reelle Folge meinen. Später werden wir auch noch andere Folgen kennenlernen, z. B. Folgen komplexer Zahlen in Abschnitt **??** oder Folgen von Funktionen in Abschnitt **??**.

(b) Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Grenzwert** einer (reellen) Folge $(a_n)_n$, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \colon \; |a_n - a| < \varepsilon.$$

Wir werden gleich in Lemma **??** sehen, dass eine Folge höchstens einen solchen Grenzwert besitzen kann. Wenn ein solches a existiert, können wir also sagen, dass a *der* Grenzwert der Folge $(a_n)_n$ ist. Man nennt die Folge in diesem Fall **konvergent** (gegen a) und schreibt dies als

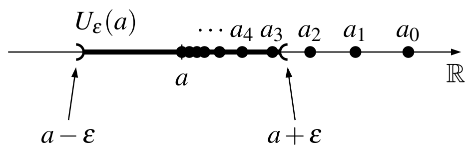
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

(die Bezeichnung kommt vom englischen Wort „limit“ bzw. dem lateinischen „limes“), oder manchmal auch als $a_n \to a$ (für $n \to \infty$). Existiert ein solcher Grenzwert nicht, so heißt die Folge **divergent**.

Bemerkung 5.2 (Anschauliche Deutung des Grenzwertbegriffs)**.** Um die Definition des Grenzwertes in leicht verständliche Worte zu fassen, führen wir ein paar intuitive Notationen ein. Für $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ heißt das offene Intervall

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

die **ε-Umgebung** von a. Die Grenzwertbedingung besagt nun genau, dass in jeder solchen ε-Umgebung von a – egal wie klein das ε gewählt ist – alle Folgenglieder ab einem gewissen n_0 liegen, wobei dieses n_0 natürlich von dem gewählten ε abhängen darf. Im Beispielbild unten wäre das z. B. für $n_0 = 3$ der Fall, denn $a_3, a_4, a_5, \dots$ liegen alle in $U_\varepsilon(a)$.



Man kann diese Tatsache auch so ausdrücken, dass in jeder ε-Umgebung *alle bis auf endlich viele* Folgenglieder liegen müssen (nämlich alle bis auf evtl. $a_0,\dots,a_{n_0-1}$). In der Analysis verwendet man gerne den Buchstaben ε für eine kleine positive Zahl und die Sprechweise „**fast alle**“ für „alle bis auf endlich viele“, und kann damit die Grenzwertbedingung auch in Worten formulieren:

Eine Zahl a ist genau dann Grenzwert einer Folge, wenn in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder liegen.

Anschaulich bedeutet das natürlich einfach, dass sich die Folgenglieder immer mehr dem Grenzwert annähern. Beachte auch, dass dies insbesondere bedeutet, dass das Abändern oder Weglassen endlich vieler Folgenglieder nichts daran ändert, ob und gegen welchen Grenzwert eine Folge konvergiert. Der Startindex einer Folge wie in Definition 5.1 (a) ist für ihre Konvergenz also irrelevant.

Beispiel 5.3. Hier sind ein paar sehr wichtige Beispiele von Grenzwerten:

(a) Es ist offensichtlich, dass eine konstante Folge, in der alle Folgenglieder den gleichen Wert $a \in \mathbb{R}$ haben, gegen eben dieses a konvergiert, d. h. dass $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$ gilt: Hier liegen ja sogar *alle* Folgenglieder in jeder beliebigen ε-Umgebung von a.

(b) Wir behaupten, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ gilt.

Um dies mit Hilfe der Definition 5.1 (b) zu beweisen, sei zunächst ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig vorgegeben; wir müssen zeigen, dass fast alle Glieder der Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ in der ε-Umgebung von 0 liegen. Dies ist aber sehr einfach: Nach der archimedischen Ordnung von $\mathbb{R}$ wie in Bemerkung 4.31 (a) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Mit einem solchen n_0 gilt dann für alle $n \geq n_0$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

wobei wir die Rechenregeln für Ungleichungen aus Lemma 4.16 verwendet haben. Fast alle Folgenglieder, nämlich alle $\frac{1}{n}$ für $n \geq n_0$, liegen also in der ε-Umgebung von 0. Damit gilt nach Definition $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Beachte, dass wir hierbei zu unserem ε gar kein *konkretes* n_0 angegeben haben, das die Grenzwertbedingung erfüllt. Wir hätten dies hier leicht tun können, z. B.

$$n_0 := \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right\rfloor$$

mit der Gaußklammer aus Bemerkung 4.34, denn dann ist n_0 eine natürliche Zahl größer als $\frac{1}{\varepsilon}$, und damit wie oben $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Aber zur Überprüfung der Grenzwertbedingung ist es nicht nötig, ein konkretes n_0 anzugeben – erst recht nicht das *kleinste* (also „beste“) mögliche n_0. In der Tat wäre eine solche Bestimmung des kleinstmöglichen n_0 für die allermeisten Folgen auch sehr aufwendig oder sogar gar nicht praktisch durchführbar.

(c) (**Geometrische Folge**) Es sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$; wir behaupten, dass dann $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ gilt.

Für $q = 0$ ist dies natürlich klar, da wir dann eine ab dem ersten Glied konstante Folge haben. Ansonsten sei wie in (b) wieder $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig vorgegeben. Wir setzen $x := \frac{1}{|q|} - 1$, also $|q| = \frac{1}{1+x}$; wegen $|q| < 1$ ist natürlich $x > 0$. Nach Bemerkung 4.31 (a) gibt es nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$

mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon x$. Es gilt dann für alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
|q^n - 0| = |q|^n &\overset{(1)}{=} \frac{1}{(1+x)^n} \\
&\overset{(2)}{\leq} \frac{1}{1+nx} && \text{(mit } x > 0 \text{ nach der Bernoulli-Ungleichung aus Satz 4.20)} \\
&\overset{(3)}{<} \frac{1}{nx} && \text{(wegen } 1 > 0\text{)} \\
&\overset{(4)}{\leq} \frac{1}{n_0 x} && \text{(wegen } n \geq n_0\text{)} \\
&\overset{(5)}{<} \varepsilon, && \left(\text{wegen } \frac{1}{n_0} < \varepsilon x\right)
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Bemerkung 5.4 (Rückwärtsrechnen)**.** Wenn ihr euch die Rechnung in Beispiel 5.3 (c) angeschaut habt, werdet ihr vermutlich keine Probleme haben, sie nachzuvollziehen – aber euch sicher auch fragen, wie ihr darauf jemals selbst hättet kommen sollen. Insbesondere die Festlegungen von x und n_0 vor Beginn der Rechnung fallen ja doch sehr vom Himmel.

Die Antwort hierauf ist einfach, dass ich den Beweis zunächst „rückwärts" durchgeführt habe, bevor ich angefangen habe, ihn aufzuschreiben. Ich habe also mit der Rechnung oben begonnen, bevor ich wusste, was z. B. n_0 später einmal sein würde, und mir etwa folgendes gedacht:

> *Okay, wir müssen sehen, dass $|q^n|$ für $n \to \infty$ kleiner als das gegebene ε wird. Nehmen wir der Einfachheit halber erst einmal $q > 0$ an, dann müssen wir also eine Ungleichungskette $q^n < \cdots < \varepsilon$ finden. Bisher wissen wir nichts darüber, wie sich Potenzen mit wachsendem Exponenten verhalten... aber wir hatten die Bernoulli-Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx$ gezeigt, die Potenzen durch lineare Funktionen abschätzen kann. Um die anwenden zu können, könnten wir vielleicht $q = 1+x$ setzen? Nein, das hilft nicht, denn dann würde die Ungleichung $q^n = (1+x)^n \geq 1+nx$ ja in die falsche Richtung gehen. Also versuchen wir lieber $q = \frac{1}{1+x}$, das dreht „$\geq$" zu „$\leq$" um. Moment, gibt es so ein x überhaupt und erfüllt das die Voraussetzungen der Bernoulli-Ungleichung? Ja, die Gleichung ist ja äquivalent zu $x = \frac{1}{q} - 1$, und es ist $q < 1$, also $x > 0$, das passt. Damit haben wir die Schritte (1) und (2) oben.*
>
> *Jetzt müssen wir also $\frac{1}{1+nx}$ weiter abschätzen und sehen, warum dieser Term gegen 0 geht. Die 1 im Nenner stört. Wir könnten sicher auch mit ihr weiter rechnen, aber einfacher wäre der Ausdruck ohne sie. Es ist ja auch $\frac{1}{1+nx} < \frac{1}{nx}$, d. h. die Abschätzung geht in die richtige Richtung, und der neue Ausdruck $\frac{1}{nx}$ geht immer noch gegen 0. Also lassen wir die 1 in (3) einfach weg. Wie wir jetzt weiter machen können, wissen wir aus Beispiel 5.3 (b): Ist nun $n \geq n_0$ und $\frac{1}{n_0} < \varepsilon x$, so erhalten wir in (4) und (5) die gewünschte Abschätzung.*

Nachdem wir diese Überlegungen durchgeführt haben, können wir schließlich noch die Beträge wieder einarbeiten und den Beweis dann so aufschreiben wie oben.

Beachte, dass es natürlich viele verschiedene Arten gibt, derartige Abschätzungen durchzuführen. Aber nicht jede Abschätzung, die richtig ist, ist auch zielführend: So hätten wir z. B. in (3) oben auch versuchen können, den Term nx wegzulassen und die Abschätzung mit $\frac{1}{1+nx} < \frac{1}{1}$ fortzusetzen. Diese Ungleichung ist genauso richtig wie (3), aber der neue Ausdruck $\frac{1}{1} = 1$ geht offensichtlich mit $n \to \infty$ nicht mehr gegen 0, so dass wir die gewünschte Folgerung $\cdots < \varepsilon$ jetzt nicht mehr erreichen können. Man muss beim Abschätzen also stets einen geeigneten Mittelweg finden und aufpassen, dass man weder zu wenig noch zu viel abschätzt. Dadurch erfordern derartige Rechnungen oft eine geschickte und vielleicht nicht ganz offensichtliche Idee. Am Anfang ist das sicher ungewohnt, aber im Laufe der Zeit werdet ihr ein gewisses Gefühl dafür entwickeln, welche Art von Abschätzung in welchen Fällen sinnvoll sein könnte. Aber so oder so – für das reine *Nachvollziehen* einer Abschätzung, die jemand anders gefunden hat (wie z. B. wenn ihr den Beweis in Beispiel 5.3 (c) lest und verstehen wollt), sind solche Ideen natürlich nicht notwendig.

08

Literatur

[B] A. Beutelspacher, *Lineare Algebra*, Vieweg-Verlag (2003)
[BF] M. Barner, F. Flohr, *Analysis 1*, de Gruyter Lehrbuch (2000)
[E] H.-D. Ebbinghaus et al., *Zahlen*, Springer-Verlag (1988)
[Fi] G. Fischer, *Lineare Algebra*, Vieweg-Verlag (2002)
[Fo1] O. Forster, *Analysis 1*, Vieweg-Verlag (2011)
[Fo2] O. Forster, *Analysis 2*, Vieweg-Verlag (2010)
[G] A. Gathmann, *Algebraische Strukturen*, Vorlesungsskript RPTU Kaiserslautern (2023), https://agag-gathmann.math.rptu.de/ags
[GK] G.-M. Greuel, T. Keilen, *Lineare Algebra I und II*, Vorlesungsskript TU Kaiserslautern (1999), www.math.uni-tuebingen.de/~keilen/download/LectureNotes/linearealgebra.pdf
[J] K. Jänich, *Lineare Algebra*, Springer-Verlag (2010)
[K1] K. Königsberger, *Analysis 1*, Springer-Verlag (2003)
[K2] K. Königsberger, *Analysis 2*, Springer-Verlag (2003)
[M] T. Markwig, *Grundlagen der Mathematik*, Vorlesungsskript TU Kaiserslautern (2011), www.math.uni-tuebingen.de/~keilen/download/LectureNotes/grundlagen11.pdf

Index