Andreas Gathmann und Oliver Bachtler Wintersemester 2024/25

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 9

Abgabe: Donnerstag, 9. Januar bis 16:00 Uhr

(1) (a) Zeige durch direktes Nachprüfen der Definition, dass die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ stetig ist.

(b) Zeige, dass die Funktion

$$f\colon [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 1-x & \text{falls } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

genau im Punkt $a = \frac{1}{2}$ stetig ist.

(2) (a) Es seien $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeige, dass f genau dann in a stetig ist, wenn f in a „linksseitig und rechtsseitig stetig“ ist, also dass

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x\le a}} f(x) = f(a) \text{ und } \lim_{\substack{x\to a\\ x\ge a}} f(x) = f(a).$$

(b) Beweise, dass jede bijektive, monoton wachsende Funktion $f\colon [a,b] \to [c,d]$ zwischen abgeschlossenen reellen Intervallen stetig ist.

(3) (a) Es sei $|q| < 1$. Berechne das Cauchy-Produkt $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2$, und damit den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n q^n$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Zeige in diesem Fall, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zwar konvergiert, aber dass ihr Cauchy-Produkt mit sich selbst

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

divergiert.

(4) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{für alle } x,y \in \mathbb{R}$$

gilt. Zeige, dass es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d. h. dass f eine lineare Funktion ist. (Hinweis: Zeige die Aussage zunächst für alle $x \in \mathbb{N}$, dann für $x \in \mathbb{Z}$, dann für $x \in \mathbb{Q}$, und schließlich für $x \in \mathbb{R}$.)
Bleibt diese Aussage richtig, wenn man überall $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzt?

Das Team der Analysis
wünscht euch frohe Weihnachten
und einen guten Rutsch
ins neue Jahr!