Andreas Gathmann und Oliver Bachtler Wintersemester 2024/25

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 8

Abgabe: Donnerstag, 19. Dezember bis 16:00 Uhr

(1) Untersuche die folgenden reellen Reihen auf Konvergenz (bei (c) in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$):

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(3+(-1)^n)^n}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}\,x^n.$$

Eine Berechnung des Grenzwerts im Fall der Konvergenz ist nicht erforderlich.

(2) Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ reelle Folgen mit $b_n \neq 0$ für alle n und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} =: c > 0.$$

Zeige, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann absolut konvergent ist, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent ist.

(3) Es sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge. Man zeige:

(a) Ist a_n der Quotient von zwei Polynomen in n, so macht weder das Quotienten- noch das Wurzelkriterium eine Aussage über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(b) Macht das Wurzelkriterium keine Aussage über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, so macht auch das Quotientenkriterium keine Aussage darüber.

(4) Zeige die folgende Verallgemeinerung des Leibniz-Kriteriums ins Komplexe: Ist $(a_n)_n$ eine reelle, monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| = 1$ und $x \neq 1$.

(Hinweis: Untersuche die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-1)\,x^n$.)