

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 7

Abgabe: Donnerstag, 12. Dezember bis 16:00 Uhr

- (1) (a) Berechne den Realteil, Imaginärteil und Betrag von $z = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2025}$.
- (b) Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 + 2iz + 2 - 4i = 0$.
- (c) Bestimme und skizziere die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die $2 \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} \frac{1}{z} = 1$ gilt.
- (2) Zeige, dass eine komplexe Folge $(a_n)_n$ genau dann gegen $a \in \mathbb{C}$ konvergiert, wenn die Folgen $(\operatorname{Re} a_n)_n$ und $(\operatorname{Im} a_n)_n$ ihrer Real- und Imaginärteile gegen $\operatorname{Re} a$ bzw. $\operatorname{Im} a$ konvergieren.
- (3) Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in \mathbb{K} . Man zeige: Gibt es ein $q \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $q < 1$, so dass

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so ist $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge.

- (4) Für ein fest gegebenes $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| < \frac{1}{4}$ definieren wir eine komplexe Folge $(a_n)_n$ rekursiv durch

$$a_0 = 0 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = a_n^2 + c \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass $(a_n)_n$ konvergiert.

(Hinweis: Zeige zunächst, dass $\frac{1}{4} + |c|$ eine obere Schranke für die Beträge aller Folgenglieder ist.)