Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 6

Abgabe: Donnerstag, 5. Dezember bis 16:00 Uhr

(1) (a) Berechne $\limsup\limits_{n\to\infty} \left| 3 + \frac{1}{n} + \mathrm{i}^n \right|^2$.

(b) Man zeige: Sind $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei reelle Folgen mit $a_n \to a > 0$ und $b_n \to \infty$, so folgt auch $a_n b_n \to \infty$.

(Dies ist also der Fall „$a \cdot \infty = \infty$“ der Grenzwertsätze, der in der Vorlesung nicht bewiesen wurde.)

(2) (a) Man sagt, dass eine Folge $(a_n)_n$ den (uneigentlichen) Häufungspunkt ∞ hat, wenn es eine Teilfolge von $(a_n)_n$ mit uneigentlichem Grenzwert ∞ gibt.

Zeige, dass $(a_n)_n$ genau dann den Häufungspunkt ∞ hat, wenn $(a_n)_n$ nach oben unbeschränkt ist, und schließe daraus, dass jede reelle Folge einen evtl. uneigentlichen Häufungspunkt besitzt.

(b) Es sei $(a_n)_n$ eine beschränkte Folge. Zeige, dass $(a_n)_n$ genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn jede konvergente Teilfolge von $(a_n)_n$ gegen a konvergiert.

(3) (a) Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei beschränkte Folgen positiver Zahlen. Zeige, dass

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(b) Gib ein Beispiel dafür an, dass in (a) im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

(c) Beweise, dass in (a) jedoch stets die Gleichheit gilt, wenn $(a_n)_n$ oder $(b_n)_n$ konvergent ist.

(4) Untersuche die folgenden Mengen auf Abzählbarkeit:

(a) die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$;

(b) die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ (also die Potenzmenge $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ von $\mathbb{N}$).