Andreas Gathmann und Oliver Bachtler Wintersemester 2024/25

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 5

Abgabe: Donnerstag, 28. November bis 16:00 Uhr

(1) Bestimme die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\binom{n}{3}}, \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-n\right), \qquad \text{(c)} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

(2) (a) Zeige, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_n$ mit

$$a_0 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n+6} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

konvergiert, und berechne ihren Grenzwert.

(b) Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ konvergiert.
(Der Grenzwert der Folge muss nicht bestimmt werden.)

(3) (a) Bestimme die Häufungspunkte der Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = \frac{(-1)^n n^2}{(2n+3)^2}$.

(b) Es seien $a \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_n$ eine reelle Folge mit $a_n \neq a$ für alle n.
Zeige, dass a genau dann ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$ ist, wenn in jeder ε-Umgebung von a mindestens ein Folgenglied liegt.

(4) Zu einer gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ definieren wir die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ ihrer Mittelwerte durch

$$b_n := \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Man zeige: Ist $(a_n)_n$ konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, so ist auch $(b_n)_n$ konvergent mit demselben Grenzwert a.

(Hinweis: Zur Vereinfachung der Rechnung ist es nützlich, die Aussage zunächst für eine Nullfolge $(a_n)_n$ zu beweisen, und den allgemeinen Fall dann darauf zurückzuführen.)