Andreas Gathmann und Oliver Bachtler Wintersemester 2024/25

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 4

Abgabe: Donnerstag, 21. November bis 16:00 Uhr

(1) Bestimme Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (sofern sie existieren) der Menge

$$M = \left\{ \frac{m+n}{mn} : m,n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \quad \subset \mathbb{R}.$$

(2) Bestimme die folgenden Grenzwerte und beweise sie direkt mit der Grenzwertdefinition (also ohne die Verwendung von Grenzwertsätzen):

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}, \quad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2-n}, \quad \text{(c)} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

(3) Für zwei Mengen $A,B \subset \mathbb{R}$ setzen wir

$$A+B := \{x+y : x \in A, y \in B\} \quad \text{und} \quad A \cdot B := \{xy : x \in A, y \in B\}.$$

Man beweise:

(a) Sind A und B nicht leer und nach oben beschränkt, so gilt $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

(b) Sind $A,B \subset \mathbb{R}_{>0}$ nicht leer und nach oben beschränkt, so gilt $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$.

Gib ferner ein Beispiel dafür an, dass die Aussage (b) ohne die Voraussetzung $A,B \subset \mathbb{R}_{>0}$ im Allgemeinen falsch ist.

(4) Es sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Zeige, dass für $s \in \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $s = \sup A$.

(b) s ist eine obere Schranke für A, und es gibt eine Folge $(a_n)_n$ von Elementen aus A mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s$.