Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 3

Abgabe: Donnerstag, 14. November bis 16:00 Uhr

(1) Berechne und skizziere die Menge aller $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, für die $\frac{2xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{2}$ gilt.

(2) Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir das Polynom

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1.$$

Man zeige:

(a) Ist n ungerade, so hat f genau eine Nullstelle. Was ist ihre Vielfachheit?

(b) Ist n gerade, so hat f keine Nullstelle.

(3) Für alle $n,p \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $s_p(n) := \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + \cdots + n^p$ die Summe der p-ten Potenzen aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.

(a) Beweise für alle $n,p \in \mathbb{N}$ die Formel

$$\binom{p+1}{0} s_0(n) + \binom{p+1}{1} s_1(n) + \cdots + \binom{p+1}{p} s_p(n) = (n+1)^{p+1} - 1.$$

(b) Zeige mit Teil (a), dass s_2 ein Polynom in n ist, und berechne dieses Polynom mit Hilfe von (a) explizit.
Ist s_p für alle $p \in \mathbb{N}$ ein Polynom in n?

(4) Zeige die folgenden Ungleichungen für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$:

(a) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$; (b) $\left(\frac{n}{3}\right)^n \leq n!$.