Andreas Gathmann und Oliver Bachtler Wintersemester 2024/25

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 2

Abgabe: Donnerstag, 7. November bis 16:00 Uhr

(1) (a) Zeige mit vollständiger Induktion, dass $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = \frac{2n+1}{n+1}.$$

(Hinweis: Die Aufgabe ist sowohl mit als auch ohne vollständige Induktion lösbar.)

(2) Zu einer Menge M mit $|M| \geq 2$ sei

$$V = \{f\colon f \text{ ist eine Abbildung von } M \text{ nach } \mathbb{R}\}$$

die Menge aller reellwertigen Funktionen auf M. Für $f, g \in V$ definieren wir die Addition $f+g$ und Multiplikation $f \cdot g$ dieser Funktionen punktweise durch

$$f+g\colon M \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)+g(x) \qquad \text{und} \qquad f \cdot g\colon M \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \cdot g(x).$$

(a) Zeige, dass V mit dieser Addition eine abelsche Gruppe ist.

(b) Ist V mit dieser Addition und Multiplikation ein Körper?

(3) Es sei M die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Wir definieren die folgende Relation auf M: Es sei

$$f \sim g \;\Leftrightarrow\; \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ gibt es ein } c \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ mit } g(x) = c \cdot f(x).$$

Man zeige:

(a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Die Relation $\sim$ besitzt unendlich viele Äquivalenzklassen.

(4) (a) Bestimme alle reellen Polynome f mit $x\,f(x+1) = (x-1)\,f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimme alle reellen Polynome f mit $x\,f(x-1) = (x-1)\,f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(Hinweis: Untersuche die Nullstellen von f.)