

## Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 13

(keine Abgabe)

- (1)
  - (a) Berechne das Taylor-Polynom  $T_{f,1}^2$  für die Funktion  $f(x) = \sqrt{x}$  und zeige die Restgliedabschätzung  $|f(x) - T_{f,1}^2(x)| \leq \frac{1}{20}$  für alle  $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ .
  - (b) Berechne  $f^{(10)}(0)$  sowie das Taylor-Polynom  $T_{f,0}^{10}$  für die Funktion  $f(x) = \frac{\cos(x^5)}{1-2x^6}$ .
- (2) Es seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei beschränkte Funktionen,  $Z$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  und  $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Man zeige:
  - (a)  $\text{OS}(cf, Z) = c \cdot \text{OS}(f, Z)$ ;
  - (b)  $\text{OS}(f+g, Z) \leq \text{OS}(f, Z) + \text{OS}(g, Z)$ .
- (3) Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal differenzierbare Funktion mit  $f'' = f$  sowie  $f(0) = f'(0) = 1$ . Berechne die Taylor-Reihe von  $f$  mit Entwicklungspunkt 0 und zeige durch eine Restgliedabschätzung, dass  $f = \exp$  die Exponentialfunktion ist.
- (4) Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Man zeige:
  - (a) Für jede Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  gilt  $\text{OS}(|f|, Z) - \text{US}(|f|, Z) \leq \text{OS}(f, Z) - \text{US}(f, Z)$ .
  - (b) Ist  $f$  monoton, so ist  $f$  integrierbar.