Andreas Gathmann und Oliver Bachtler Wintersemester 2024/25

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 12

Abgabe: Donnerstag, 30. Januar bis 16:00 Uhr

(1) (a) Berechne die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{\tan(3x)}; \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right).$$

(b) Es sei $f\colon D\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall D.
Zeige mit der Regel von de l'Hôpital: Ist $a\in D$, so dass f auf $D\backslash\{a\}$ differenzierbar ist und der Grenzwert $s:=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x)$ existiert, so ist f auch in a differenzierbar mit Ableitung $f'(a)=s$.

(2) Untersuche die Funktionenfolge $(f_n)_n$ mit $f_n\colon \mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^{n+1}\mathrm{e}^{-nx}$ auf gleichmäßige Konvergenz.

(3) Es sei $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Man zeige:

(a) Ist $f'(a)>0$ und $f'(b)<0$, so gibt es ein $x\in(a,b)$ mit $f'(x)=0$.

(b) Für alle c zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ gibt es ein $x\in[a,b]$ mit $f'(x)=c$. (Ableitungen erfüllen also den Zwischenwertsatz, obwohl sie nach Aufgabe 2 von Blatt 11 nicht stetig sein müssen.)

(4) Es sei

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x\neq 0,\\ 0 & \text{für } x=0.\end{cases}$$

Zeige, dass f unendlich oft differenzierbar ist mit $f^{(n)}(0)=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Skizziere auch den Graphen von f.

(Die in der kommenden Vorlesungsstunde eingeführte Taylor-Reihe $T_{f,0}$ ist damit also überall konvergent und gleich der Nullfunktion, stimmt also außer im Nullpunkt nirgends mit f überein. Hinweis: Man zeige mit vollständiger Induktion, dass alle Ableitungen von f in 0 gleich 0 und für $x\neq 0$ von der Form $\frac{p(x)}{q(x)}\exp(-\frac{1}{x^2})$ für gewisse Polynomfunktionen p und q sind.)