Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 11

Abgabe: Donnerstag, 23. Januar bis 16:00 Uhr

(1) (a) Zeige, dass $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, für die diese Ausdrücke definiert sind.

(b) Skizziere die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arctan x + \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

und begründe dabei alle wesentlichen qualitativen Merkmale des Funktionsgraphen.

(2) Finde $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so dass die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^m \sin \frac{1}{x^n} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ ...

(a) unstetig ist.
(b) stetig, aber nicht differenzierbar ist.
(c) differenzierbar mit unbeschränkter Ableitung ist.
(d) differenzierbar mit beschränkter, aber unstetiger Ableitung ist.
(e) differenzierbar mit stetiger Ableitung ist.

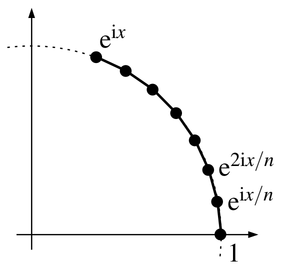
(Hinweis: Ihr dürft in dieser Aufgabe bereits verwenden, dass $\sin' = \cos$ gilt und die Ableitung einer Verkettung $x \mapsto g(h(x))$ gleich $x \mapsto g'(h(x)) \cdot h'(x)$ ist; dies wird in der Vorlesung noch gezeigt.)

(3) (a) Berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

(b) Es sei $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wir wollen zeigen, dass die „Bogenlänge" entlang des Einheitskreises von 1 nach $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \in \mathbb{C}$ gleich x ist und $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ damit als der Punkt auf dem Einheitskreis aufgefasst werden kann, der mit der positiven reellen Achse den Winkel x „im Bogenmaß" einschließt.

Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ unterteilen wir den Kreisbogen dazu wie im Bild durch die Zwischenpunkte $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx/n}$ mit $k = 0, \dots, n$. Die Länge des geraden Streckenzuges, der diese Punkte der Reihe nach miteinander verbindet, ist dann $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)x/n} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx/n}\right|$.

Zeige, dass $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = x$.



(4) Es seien $D \subset \mathbb{R}$ ohne isolierte Punkte und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeige, dass für jedes $a \in D$ und $c \in \mathbb{R}$ die folgenden beiden Bedingungen äquivalent sind:

(a) Die Funktion f ist differenzierbar in a mit $f'(a) = c$.

(b) Für zwei beliebige gegen a konvergente Folgen $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ in D mit $x_n \leq a \leq y_n$ und $x_n \neq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = c.$$