Andreas Gathmann und Oliver Bachtler Wintersemester 2024/25

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 10

Abgabe: Donnerstag, 16. Januar bis 16:00 Uhr

(1) (a) Zu einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}$ mit $D \subset \mathbb{K}$ definieren wir die *Supremumsnorm*

$$\|f\|_{\sup} := \sup\{|f(x)| : x \in D\} \quad \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Zeige, dass eine Funktionenfolge $(f_n)_n$ auf D genau dann gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn $\|f_n - f\|_{\sup} \to 0$ für $n \to \infty$.

(b) Zeige, dass die Funktionenfolge $(f_n)_n$ mit $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+nx^2}$ zwar nicht auf $\mathbb{R}$ und auch nicht auf $\mathbb{R}_{>0}$, aber für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$ auf $\mathbb{R}_{\geq a}$ gleichmäßig konvergiert.

(2) Es sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion von einem abgeschlossenen Intervall in sich. Man zeige:

(a) Die Funktion f hat einen Fixpunkt, d. h. es gibt ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = x$.

(b) Ist f darüber hinaus monoton wachsend, so konvergiert die rekursiv definierte Folge $(x_n)_n$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ für jeden Startwert $x_0 \in [a,b]$ gegen einen Fixpunkt von f.

(3) Man zeige:

(a) Die Wurzelfunktion $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig.

(b) Sind $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei Lipschitz-stetige Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall, dann ist auch $f \cdot g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig.

(4) Zeige, dass es keine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, unter der jede reelle Zahl genau zwei Urbilder hat.