Andreas Gathmann und Oliver Bachtler Wintersemester 2024/25

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 1

Abgabe: Donnerstag, 31. Oktober bis 16:00 Uhr

Alle Antworten sind zu begründen!

(1) Wie lautet die Negation der folgenden Aussagen? Formuliere außerdem die Aussage (a) in Worten (also analog zu (b)) sowie die Aussage (b) mit Quantoren und anderen mathematischen Symbolen (also analog zu (a)).

(a) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m$.

(b) Zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen gibt es noch eine weitere reelle Zahl.

(c) Sind M, N, R Mengen mit $R \subset N \subset M$, so ist $M \backslash N \subset M \backslash R$.

(2) (a) Untersuche die Abbildung $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto 3x+2$ auf Injektivität und Surjektivität.

(b) Untersuche die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (xy, x+1)$ auf Injektivität und Surjektivität.

(c) Man zeige: Sind $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to R$ zwei Abbildungen und ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

(3) Für diese Aufgabe nennen wir eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \dots$

- *monoton wachsend*, wenn gilt: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow f(x) \le f(y)$;
- *irgendwann konstant*, wenn gilt: $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : x \le y \Rightarrow f(x) = f(y)$;
- *interessant*, wenn gilt: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : x < y$ und $f(x) < f(y)$.

Man zeige:

(a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist interessant.

(b) Für die Eigenschaften „monoton wachsend“ und „irgendwann konstant“ gilt, dass mit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch deren Summenfunktion

$$f+g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)+g(x)$$

diese Eigenschaft hat.

(c) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, aber nicht interessant, so ist f irgendwann konstant.

(4) Man beweise oder widerlege: Für alle Mengen $A \subset M$ und $A' \subset M'$ gibt es Teilmengen B und C von M sowie B' und C' von M', so dass

$$(M \times M') \backslash (A \times A') = (B \times B') \cupdot (C \times C').$$

Könnt ihr die Aussage durch eine Skizze veranschaulichen?

Bitte werft eure Lösungen ins Postfach eurer Übungsgruppe neben Raum 48-210 oder gebt sie online als PDF-Datei im Abgabebaustein des OLAT-Kurses ab. Die Abgabe ist in Zweiergruppen (bevorzugt) oder allein möglich.