Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 9

Abgabe: Donnerstag, 11. Januar bis 16:00 Uhr

(1) (a) Berechne den Funktionsgrenzwert $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ für gegebene $m,n \in \mathbb{N}_{>0}$.

(b) Zeige durch direktes Nachprüfen der Definition, dass die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ stetig ist.

(2) (a) Es seien $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeige, dass f genau dann in a stetig ist, wenn f in a „linksseitig und rechtsseitig stetig" ist, also dass

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x\le a}} f(x) = f(a) \text{ und } \lim_{\substack{x\to a\\ x\ge a}} f(x) = f(a).$$

(b) Beweise, dass jede bijektive, monoton wachsende Funktion $f\colon [a,b] \to [c,d]$ zwischen abgeschlossenen reellen Intervallen stetig ist.

(3) Es sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion von einem abgeschlossenen Intervall in sich. Man zeige:

(a) Die Funktion f hat einen Fixpunkt, d. h. es gibt ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = x$.

(b) Ist f darüber hinaus monoton wachsend, so konvergiert die rekursiv definierte Folge $(x_n)_n$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ für jeden Startwert $x_0 \in [a,b]$ gegen einen Fixpunkt von f.

(4) Zeige, dass es keine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, unter der jede reelle Zahl genau zwei Urbilder hat.

Das Team der GdM1:Analysis
wünscht euch frohe Weihnachten
und einen guten Rutsch
ins neue Jahr!