Andreas Gathmann und Jonas Frank Wintersemester 2023/24

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 8

Abgabe: Donnerstag, 21. Dezember bis 16:00 Uhr

(1) Untersuche die folgenden reellen Reihen auf Konvergenz (bei (c) in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$):

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(3+(-1)^n)^n}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} x^n.$$

Eine Berechnung des Grenzwerts im Fall der Konvergenz ist nicht erforderlich.

(2) Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ reelle Folgen mit $b_n \neq 0$ für alle n und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} =: c > 0.$$

Zeige, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann absolut konvergent ist, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent ist.

(3) (a) Es sei $|q| < 1$. Berechne das Cauchy-Produkt $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2$, und damit den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n\,q^n$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Zeige in diesem Fall, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zwar konvergiert, aber dass ihr Cauchy-Produkt mit sich selbst

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

divergiert.

(4) Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{K}$

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

gilt.
(Hinweis: Eine Möglichkeit besteht darin, durch eine geeignete Abschätzung zu zeigen, dass

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

mit $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.)