Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 7

Abgabe: Donnerstag, 14. Dezember bis 16:00 Uhr

(1) (a) Untersuche die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ auf Konvergenz.

(b) Untersuche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+\mathrm{i}}{3}\right)^n$ auf Konvergenz, und berechne im Fall der Konvergenz den Grenzwert in der Form $x+\mathrm{i}y$ mit $x,y \in \mathbb{R}$.

(2) (a) Zeige, dass eine komplexe Folge $(a_n)_n$ genau dann gegen $a \in \mathbb{C}$ konvergiert, wenn die Folgen $(\operatorname{Re} a_n)_n$ und $(\operatorname{Im} a_n)_n$ ihrer Real- und Imaginärteile gegen $\operatorname{Re} a$ bzw. $\operatorname{Im} a$ konvergieren.

(b) Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Man zeige: Gibt es ein $q \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $q < 1$, so dass

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so ist $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge.

(3) Für ein fest gegebenes $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| < \frac{1}{4}$ definieren wir eine komplexe Folge $(a_n)_n$ rekursiv durch

$$a_0 = 0 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = a_n^2 + c \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass $(a_n)_n$ konvergiert.
(Hinweis: Zeige zunächst, dass $\frac{1}{4} + |c|$ eine obere Schranke für die Beträge aller Folgenglieder ist, und benutze dann Aufgabe (2b).)

(4) Zeige die folgende Verallgemeinerung des Leibniz-Kriteriums ins Komplexe: Ist $(a_n)_n$ eine reelle, monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| = 1$ und $x \neq 1$.

(Hinweis: Untersuche die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1) x^n$.)