Andreas Gathmann und Jonas Frank Wintersemester 2023/24

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 5

Abgabe: Donnerstag, 30. November bis 16:00 Uhr

(1) (a) Bestimme die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-n\right), \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}.$$

(b) Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei Folgen mit $a_n \to a > 0$ und $b_n \to \infty$. Zeige, dass dann $a_n b_n \to \infty$ gilt.

(Dies ist also der Fall „$a \cdot \infty = \infty$“ der Grenzwertsätze, der in der Vorlesung nicht bewiesen wurde.)

(2) (a) Zeige, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_n$ mit

$$a_0 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n+6} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

konvergiert, und berechne ihren Grenzwert.

(b) Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ konvergiert.

(Der Grenzwert der Folge muss nicht bestimmt werden.)

(3) Es seien $a \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_n$ eine reelle Folge mit $a_n \neq a$ für alle n.

Zeige, dass a genau dann ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$ ist, wenn in jeder ε-Umgebung von a mindestens ein Folgenglied liegt.

(4) In dieser Aufgabe wollen wir beweisen, dass jede nicht-negative reelle Zahl c für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ eine eindeutige k-te Wurzel besitzt. Wir definieren dazu für ein gegebenes $c > 0$ und $k \in \mathbb{N}_{>0}$ rekursiv die Folge $(a_n)_n$ durch

$$a_0 := 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)\,a_n + \frac{c}{a_n^{k-1}}\right) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Man beweise nun:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_{n+1}^k \geq c$.

(b) Die Folge $(a_n)_n$ ist ab dem zweiten Folgenglied monoton fallend.

(c) Zu jeder Zahl $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt es ein eindeutiges $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a^k = c$. Wir nennen dieses a die *k-te Wurzel aus c* und schreiben sie als $\sqrt[k]{c}$.