Andreas Gathmann und Jonas Frank Wintersemester 2023/24

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 4

Abgabe: Donnerstag, 23. November bis 16:00 Uhr

(1) Untersuche, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und berechne sie im Fall der Existenz:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}, \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)^2}{(n+1)^3}, \qquad \text{(c)} \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n}.$$

(2) Zeige direkt nach der Grenzwertdefinition (also ohne die Verwendung von Grenzwertsätzen):

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+3}{n^2-n} = 2$.

(b) Es sei $(a_n)_n$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0$.

Konvergiert dann die Folge $(a_{2n})_n$, so konvergiert auch die Folge $(a_n)_n$.

(3) Es sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Zeige, dass für $s \in \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $s = \sup A$.

(b) s ist eine obere Schranke für A, und es gibt eine Folge $(a_n)_n$ von Elementen aus A mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s$.

(4) Zu einer gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ definieren wir die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ ihrer Mittelwerte durch

$$b_n := \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Man zeige: Ist $(a_n)_n$ konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, so ist auch $(b_n)_n$ konvergent mit demselben Grenzwert a.

(Hinweis: Zur Vereinfachung der Rechnung ist es nützlich, die Aussage zunächst für eine Nullfolge $(a_n)_n$ zu beweisen, und den allgemeinen Fall dann darauf zurückzuführen.)