Andreas Gathmann und Jonas Frank Wintersemester 2023/24

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 3

Abgabe: Donnerstag, 16. November bis 16:00 Uhr

(1) (a) Berechne und skizziere die Menge aller $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, für die $\frac{2xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{2}$ gilt.

(b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$?

(2) Bestimme Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (sofern sie existieren) der Menge

$$M = \left\{ \frac{k^2+n}{n^2} : k,n \in \mathbb{N}_{>0} \text{ mit } k \leq n \right\} \quad \subset \mathbb{R}.$$

(3) Für alle $n,p \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $s_p(n) := \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + \cdots + n^p$ die Summe der p-ten Potenzen aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.

(a) Beweise für alle $n,p \in \mathbb{N}$ die Formel

$$\binom{p+1}{0} s_0(n) + \binom{p+1}{1} s_1(n) + \cdots + \binom{p+1}{p} s_p(n) = (n+1)^{p+1} - 1.$$

(b) Zeige mit Hilfe von (a), dass s_2 ein Polynom in n ist, und berechne dieses Polynom explizit. Ist s_p für alle $p \in \mathbb{N}$ ein Polynom in n?

(4) Für zwei Mengen $A,B \subset \mathbb{R}$ setzen wir

$$A+B := \{x+y : x \in A, y \in B\} \quad \text{und} \quad A \cdot B := \{xy : x \in A, y \in B\}.$$

Man beweise:

(a) Sind A und B nicht leer und nach oben beschränkt, so gilt $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

(b) Sind $A,B \subset \mathbb{R}_{>0}$ nicht leer und nach oben beschränkt, so gilt $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$.

Gib ferner ein Beispiel dafür an, dass die Aussage (b) ohne die Voraussetzung $A,B \subset \mathbb{R}_{>0}$ im Allgemeinen falsch ist.