Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 2

Abgabe: Donnerstag, 9. November bis 16:00 Uhr

(1) (a) Zeige mit vollständiger Induktion, dass $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = \frac{2n+1}{n+1}.$$

(Hinweis: Dieser Aufgabenteil ist sowohl mit als auch ohne vollständige Induktion lösbar.)

(2) Es sei $a \in \mathbb{R}$ fest gegeben. Wir definieren auf $\mathbb{R}^2$ eine „Addition“ und „Multiplikation“ durch

$$(x_1,x_2) + (y_1,y_2) := (x_1+y_1, x_2+y_2) \quad \text{und} \quad (x_1,x_2) \cdot (y_1,y_2) := (x_1y_1 + ax_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Man prüft leicht durch explizite Rechnung nach, dass $\mathbb{R}^2$ mit dieser Addition eine kommutative Gruppe mit neutralem Element $(0,0)$ ist, dass auch die Multiplikation kommutativ ist, und dass diese beiden Operationen das Distributivgesetz erfüllen – ihr solltet euch kurz überlegen, warum das so ist, braucht das aber nicht aufzuschreiben. Man zeige stattdessen:

(a) Die Multiplikation ist assoziativ und besitzt ein neutrales Element.

(b) Im Fall $a = -1$ ist $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ein Körper, im Fall $a = 1$ jedoch nicht.
(Für $a = -1$ ist $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ der sogenannte Körper der komplexen Zahlen, den wir später in der Vorlesung noch genau untersuchen werden.)

(3) Es sei M die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Wir definieren die folgende Relation auf M: Es sei

$$f \sim g \;\Leftrightarrow\; \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ gibt es ein } c \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ mit } g(x) = c \cdot f(x).$$

Man zeige:

(a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Die Relation $\sim$ besitzt unendlich viele Äquivalenzklassen.

(4) (a) Bestimme alle reellen Polynome f mit $x\,f(x+1) = (x-1)\,f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimme alle reellen Polynome f mit $x\,f(x-1) = (x-1)\,f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(Hinweis: Untersuche die Nullstellen von f.)