

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 14

(keine Abgabe)

- (1) Berechne die folgenden (z. T. unbestimmten bzw. uneigentlichen) Integrale:

$$(a) \int_0^{\infty} x^2 e^{-2x} dx \quad (b) \int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^3 - x} dx \quad (c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \cos^3 x dx \quad (d) \int_{-1}^1 \frac{x^7}{\cos^7 x} dx$$

- (2) Es sei $f: \mathbb{R}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige und monoton fallende Funktion.

- (a) Zeige, dass das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x) dx$ das gleiche Konvergenzverhalten wie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ hat, d. h. es sind entweder beide konvergent oder beide divergent.
- (b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$?

Gilt die Aussage von (a) auch ohne die Voraussetzung, dass f monoton fallend ist?

- (3) Es sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Man zeige:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) x^n dx = 0$.

(b) Gilt $f(x) = f(1-x)$ für alle $x \in [0, 1]$, so ist $\int_0^1 x f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx$.