Andreas Gathmann und Jonas Frank Wintersemester 2023/24

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 12

Abgabe: Donnerstag, 1. Februar bis 16:00 Uhr

(1) (a) Berechne die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{\tan(3x)}; \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right).$$

(b) Es sei $f\colon D\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall D.
Zeige mit der Regel von de l'Hôpital: Ist $a\in D$, so dass f auf $D\backslash\{a\}$ differenzierbar ist und der Grenzwert $s:=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x)$ existiert, so ist f auch in a differenzierbar mit Ableitung $f'(a)=s$.

(2) Untersuche die Funktionenfolge $(f_n)_n$ mit $f_n\colon \mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^{n+1}\mathrm{e}^{-nx}$ auf gleichmäßige Konvergenz.

(3) Zeige, dass für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die folgenden drei Bedingungen äquivalent sind:

(a) Für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt $f''(x)\geq 0$.
(b) Für alle $x,y\in\mathbb{R}$ gilt $f(y)\geq f(x)+f'(x)\cdot(y-x)$.
(c) Für alle $x,y\in\mathbb{R}$ und $\lambda\in[0,1]$ gilt $(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)\geq f((1-\lambda)x+\lambda y)$.

Eine Funktion, die diese Bedingungen erfüllt, heißt *konvex*. Was bedeuten die drei Bedingungen anschaulich?

(4) Es sei

$$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x\neq 0,\\ 0 & \text{für } x=0.\end{cases}$$

Zeige, dass f unendlich oft differenzierbar ist, und dass die Taylor-Reihe $T_{f,0}$ die Nullfunktion ist (also insbesondere zwar überall konvergiert, aber außer im Nullpunkt nirgends mit f übereinstimmt). Skizziere auch den Graphen von f.

(Hinweis: Man zeige mit vollständiger Induktion, dass alle Ableitungen von f in 0 gleich 0 und für $x\neq 0$ von der Form $\frac{p(x)}{q(x)}\exp(-\frac{1}{x^2})$ für gewisse Polynomfunktionen p und q sind.)