Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 11

Abgabe: Donnerstag, 25. Januar bis 16:00 Uhr

(1) (a) Zeige, dass
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$
für alle $x, y \in \mathbb{R}$, für die diese Ausdrücke definiert sind.

(b) Skizziere die Funktion
$$f\colon \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arctan x + \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$
und begründe dabei alle wesentlichen qualitativen Merkmale des Funktionsgraphen.

(2) Finde $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so dass die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^m \sin \frac{1}{x^n} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \ \dots$

(a) unstetig ist.

(b) stetig, aber nicht differenzierbar ist.

(c) differenzierbar mit unbeschränkter Ableitung ist.

(d) differenzierbar mit beschränkter, aber unstetiger Ableitung ist.

(e) differenzierbar mit stetiger Ableitung ist.

(Hinweis: Ihr dürft in dieser Aufgabe bereits verwenden, dass $\sin' = \cos$; dies wird in der Vorlesung noch gezeigt.)

(3) Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Man zeige:

(a) Ist $f'(a) > 0$ und $f'(b) < 0$, so gibt es ein $x \in (a,b)$ mit $f'(x) = 0$.
(Hinweis: Ihr dürft bereits Lemma 10.21 aus dem alten Skript verwenden, das zu Beginn der Stunde am 23. Januar gezeigt wird: Hat f auf dem offenen Intervall (a,b) ein lokales Extremum, so ist die Ableitung dort gleich 0.)

(b) Für alle c zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f'(x) = c$.
(Ableitungen erfüllen also den Zwischenwertsatz, obwohl sie nach Aufgabe 2 nicht stetig sein müssen.)

(4) Es seien $D \subset \mathbb{R}$ ohne isolierte Punkte und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ferner seien $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ zwei Folgen in D, die $x_n \neq y_n$ für alle n erfüllen und gegen denselben Punkt $a \in D$ konvergieren.

(a) Man zeige: Gibt es eine Nullfolge $(h_n)_n$, so dass $x_n = a - h_n$ und $y_n = a + h_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a)$.

(b) Zeige an einem Beispiel aus Aufgabe 2, dass im Allgemeinen nicht $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a)$ gelten muss.