Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 10

Abgabe: Donnerstag, 18. Januar bis 16:00 Uhr

(1) (a) Zu einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}$ mit $D \subset \mathbb{K}$ definieren wir die *Supremumsnorm*

$$\|f\|_{\sup} := \sup\{|f(x)| : x \in D\} \quad \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Zeige, dass eine Funktionenfolge $(f_n)_n$ auf D genau dann gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn $\|f_n - f\|_{\sup} \to 0$ für $n \to \infty$.

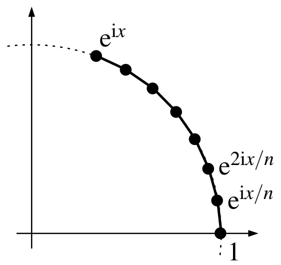
(b) Zeige, dass die Funktionenfolge $(f_n)_n$ mit $f_n(x) = \frac{n \log x}{1+n \log x}$ zwar nicht auf $\mathbb{R}_{\geq 1}$, aber für alle $a > 1$ auf $\mathbb{R}_{\geq a}$ gleichmäßig konvergiert.

(2) (a) Berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

(b) Es sei $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wir wollen zeigen, dass die „Bogenlänge“ entlang des Einheitskreises von 1 nach $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \in \mathbb{C}$ gleich x ist und $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ damit als der Punkt auf dem Einheitskreis aufgefasst werden kann, der mit der positiven reellen Achse den Winkel x „im Bogenmaß“ einschließt.

Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ unterteilen wir den Kreisbogen dazu wie im Bild durch die Zwischenpunkte $e^{\mathrm{i}kx/n}$ mit $k = 0, \dots, n$. Die Länge des geraden Streckenzuges, der diese Punkte der Reihe nach miteinander verbindet, ist dann $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)x/n} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx/n}\right|$.

Zeige, dass $\lim\limits_{n \to \infty} L_n = x$.



(3) Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}$ mit $D \subset \mathbb{K}$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es ein $L \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x-y|$$

für alle $x, y \in D$. Man nennt L in diesem Fall eine *Lipschitz-Konstante* für f. Man zeige:

(a) Ist f Lipschitz-stetig, so ist f auch gleichmäßig stetig.

(b) Die Wurzelfunktion $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig.

(4) (Koeffizientenvergleich für Potenzreihen)

Es sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe über $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius mindestens $r > 0$.

(a) Zeige mit vollständiger Induktion: Ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < r$, so gilt bereits $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (d. h. ist der Wert der Reihe gleich 0 für alle diese x, so sind bereits alle Koeffizienten der Reihe gleich 0).

(b) Man zeige: Ist $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ eine weitere Potenzreihe mit Konvergenzradius mindestens r und gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < r$, so ist bereits $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.