Andreas Gathmann und Jonas Frank Wintersemester 2023/24

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 1

Abgabe: Donnerstag, 2. November bis 16:00 Uhr

Die Verkettung $g \circ f$ in Aufgabe (2c) sowie Bild und Urbild $f(A)$ bzw. $f^{-1}(A)$ in Aufgabe 3 werden am Anfang der Vorlesung vom 27. Oktober eingeführt.

Alle Antworten sind zu begründen!

(1) Wie lautet die Negation der folgenden Aussagen? Formuliere außerdem die Aussage (a) in Worten (also analog zu (b)) sowie die Aussage (b) mit Quantoren und anderen mathematischen Symbolen (also analog zu (a)).

(a) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m.$

(b) Zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen gibt es noch eine weitere reelle Zahl.

(c) Sind M,N,R Mengen mit $R \subset N \subset M$, so ist $M \backslash N \subset M \backslash R$.

(2) (a) Untersuche die Abbildung $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto 3x+2$ auf Injektivität und Surjektivität.

(b) Untersuche die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (xy, x+1)$ auf Injektivität und Surjektivität.

(c) Man zeige: Sind $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to R$ zwei Abbildungen und ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

(3) Welche der Relationen $\subset$ bzw. $\supset$ können im Folgenden für das Symbol $\square$ eingesetzt werden, so dass allgemein wahre Aussagen entstehen? Gib jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Für jede Abbildung $f\colon M \to N$ und alle $A,B \subset M$ gilt $f(A) \cap f(B) \,\square\, f(A \cap B)$.

(b) Für jede Abbildung $f\colon M \to N$ und alle $A,B \subset N$ gilt $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \,\square\, f^{-1}(A \cap B)$.

(4) Man beweise oder widerlege: Für alle Mengen $A \subset M$ und $A' \subset M'$ gibt es Teilmengen B und C von M sowie B' und C' von M', so dass

$$(M \times M') \backslash (A \times A') = (B \times B') \,\dot\cup\, (C \times C').$$

Könnt ihr die Aussage durch eine Skizze veranschaulichen?

Bitte werft eure Lösungen ins Postfach eurer Übungsgruppe neben Raum 48-210 oder gebt sie online als PDF-Datei im Abgabebaustein des OLAT-Kurses ab. Die Abgabe ist in Zweiergruppen (bevorzugt) oder allein möglich.