Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 14

Lösungshinweise

(1) Berechne die folgenden (z. T. unbestimmten bzw. uneigentlichen) Integrale:

(a) $\int_0^\infty x^2\, e^{-2x}\, dx$ (b) $\int \frac{x^3+x^2+1}{x^3-x}\, dx$ (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \cos^3 x\, dx$ (d) $\int_{-1}^{1} \frac{x^7}{\cos^7 x}\, dx$

Lösung: (a) Wir bestimmen eine Stammfunktion mittels zweimaliger partieller Integration. Dabei verwenden wir, dass $-\frac{1}{2}e^{-2x}$ eine Stammfunktion von e^{-2x} ist.

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-2x}\, dx &= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \int 2x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \int xe^{-2x}\, dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} \\ &= -\frac{1}{2}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)e^{-2x}.\end{aligned}$$

Einsetzen der Integralgrenzen liefert

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a x^2e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2}\left(\lim_{a\to\infty}\left(a^2+a+\frac{1}{2}\right)e^{-2a} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4},$$

da $\lim_{a\to\infty}\left(a^2+a+\frac{1}{2}\right)e^{-2a} = 0$.

(b) Wir führen zuerst eine Polynomdivision durch:

$$\frac{x^3+x^2+1}{x^3-x} = \frac{x^3-x+x^2+x+1}{x^3-x} = 1 + \frac{x^2+x+1}{x^3-x}.$$

Mit $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ liefert eine Partialbruchzerlegung

$$1 + \frac{x^2+x+1}{x^3-x} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}.$$

Dann ist

$$\int\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right) dx = x - \log|x| + \frac{3}{2}\log|x-1| + \frac{1}{2}\log|x+1|$$

eine Stammfunktion, denn $\log|x|$ ist eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$.

(c) Die Substitution $u = \sin(x)$ und die Identität $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ liefern

$$\int \sin^8(x)\cos^3(x)\, dx = \int u^8(1-u^2)\, du = \frac{1}{9}u^9 - \frac{1}{11}u^{11} = \frac{1}{9}\sin^9(x) - \frac{1}{11}\sin^{11}(x).$$

Es folgt

$$\int_0^{\pi/2} \sin^8(x)\cos^3(x)\, dx = \frac{1}{9} - \frac{1}{11} = \frac{2}{99}.$$

(d) Die Funktion $f(x) = \frac{x^7}{\cos^7(x)}$ ist antisymmetrisch, d. h. es gilt $f(-x) = -f(x)$. Daher liefert die Substitution $u = -x$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\, dx &= \int_{-1}^{0} f(x)\, dx + \int_0^1 f(x)\, dx = -\int_1^0 f(-u)\, du + \int_0^1 f(x)\, dx \\ &= -\int_0^1 f(u)\, du + \int_0^1 f(x)\, dx = 0.\end{aligned}$$

(2) Es sei $f\colon \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige und monoton fallende Funktion.

(a) Zeige, dass das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ das gleiche Konvergenzverhalten wie die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ hat, d. h. es sind entweder beide konvergent oder beide divergent.

(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^a}$?

Gilt die Aussage von (a) auch ohne die Voraussetzung, dass f monoton fallend ist?

Lösung: (a) Da f stetig ist, ist f auf jedem Intervall der Form $[1,a]$ mit $a > 1$ integrierbar. Wegen $f \geq 0$ sind die Abbildungen

$$\mathbb{N} \ni N \mapsto F_1(N) := \sum_{n=1}^N f(n) \in \mathbb{R}$$

und

$$\mathbb{R}_{\geq 1} \ni a \mapsto F_2(a) := \int_1^a f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

monoton wachsend. Also existiert der Grenzwert $\sum\limits_{n=1}^\infty f(n)$ genau dann, wenn F_1 beschränkt ist und $\int_1^\infty f(x)\,dx$ existiert genau dann, wenn F_2 beschränkt ist.
Da f monoton fallend ist, gilt $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [n, n+1]$, also

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n).$$

Es folgt für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} F_1(N) = \sum_{n=1}^N f(n) = f(1) + \sum_{n=1}^{N-1} f(n+1) \leq f(1) + \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \\ = f(1) + \int_1^N f(x)\,dx = f(1) + F_2(N) \end{aligned}$$

und für alle $a \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ mit nächstgrößerer ganzer Zahl N

$$F_2(a) \leq F_2(N) = \int_1^N f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n) = F_1(N-1).$$

Also ist F_1 genau dann beschränkt, wenn F_2 beschränkt ist.
Anmerkung: Aus den Rechnungen lässt sich sogar

$$\sum_{n=2}^\infty f(n) \leq \int_1^\infty f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^\infty f(n)$$

schließen.

(b) Für $a \leq 1$ gilt $\frac{1}{n^a} \geq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, also konvergieren die Reihen nach dem Minoratenkriterium nicht. Sei nun $a > 1$. Zu $f\colon \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x) = \frac{1}{x^a}$ ist $F(x) = \frac{1}{1-a} x^{1-a}$ eine Stammfunktion. Wegen $1 - a < 0$ existiert der Grenzwert

$$\lim_{r\to\infty} \int_1^r f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty} \left[\frac{1}{1-a} x^{1-a}\right]_1^r = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{1-a}(r^{1-a} - 1) = \frac{1}{a-1}.$$

Da f monoton fallend ist, existiert nach (a) somit auch $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^a}$.

Ohne die Monotonie ist die Aussage im Allgemeinen falsch: Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ f(x) = 1 - \cos(2\pi x)$$

erfüllt $f(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also existiert der Grenzwert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$, aber wegen

$$\int_1^a f(x)\,dx = \left[x - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\right]_1^a = a - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi a) - 1 \xrightarrow{a\to\infty} \infty$$

existiert das Integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ nicht.

(3) Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Man zeige:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\,x^n\,dx = 0$.

(b) Gilt $f(x) = f(1-x)$ für alle $x \in [0,1]$, so ist $\int_0^1 x\,f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx$.

Lösung: (a) Da f auf einem abgeschlossenen Intervall stetig ist, ist f durch ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$ beschränkt. Also

$$\Big|\int_0^1 f(x)\,x^n\,dx\Big| \le \int_0^1 |f(x)|\,x^n\,dx \le c\int_0^1 x^n\,dx = \frac{c}{n+1} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

(b) Mit der Substitution $u = 1-x$ erhält man

$$\int_0^1 x\,f(x)\,dx = -\int_1^0 (1-u)f(1-u)\,du = \int_0^1 (1-u)\,f(u)\,du = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 x\,f(x)\,dx.$$

Addition des letzten Integrals und Division durch 2 liefert die Behauptung.