Andreas Gathmann und Julia Amann Sommersemester 2022

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 9

Abgabe: Freitag, 1. Juli bis 12:00

(1) Es sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion von einem abgeschlossenen Intervall in sich. Man zeige:

(a) Die Funktion f hat einen Fixpunkt, d. h. es gibt ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = x$.

(b) Ist f darüber hinaus monoton wachsend, so konvergiert die rekursiv definierte Folge $(x_n)_n$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ für jeden Startwert $x_0 \in [a,b]$ gegen einen Fixpunkt von f.

(2) (a) Zeige, dass die Funktion

$$f\colon [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 1-x & \text{falls } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

genau im Punkt $a = \frac{1}{2}$ stetig ist.

(b) Beweise, dass jede bijektive, monoton wachsende Funktion $f\colon [a,b] \to [c,d]$ zwischen abgeschlossenen reellen Intervallen stetig ist.

(3) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{für alle } x,y \in \mathbb{R}$$

gilt. Zeige, dass es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d. h. dass f eine lineare Funktion ist.
(Hinweis: Zeige die Aussage zunächst für alle $x \in \mathbb{N}$, dann für $x \in \mathbb{Z}$, dann für $x \in \mathbb{Q}$, und schließlich für $x \in \mathbb{R}$.)
Bleibt diese Aussage richtig, wenn man überall $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzt?

(4) Zeige, dass es keine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, unter der jede reelle Zahl genau zwei Urbilder hat.