Andreas Gathmann und Julia Amann Sommersemester 2022

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 8

Abgabe: Freitag, 24. Juni bis 12:00

(1) Untersuche die folgenden reellen Reihen auf Konvergenz (bei (c) in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$):

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(3+(-1)^n)^n}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} x^n.$$

Eine Berechnung des Grenzwerts im Fall der Konvergenz ist nicht erforderlich.

(2) (a) Es sei $|q| < 1$. Berechne das Cauchy-Produkt $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2$, und damit den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n q^n$.

(b) Zeige, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ konvergiert, aber dass die Formel des Cauchy-Produkts für den Ausdruck

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$$

nicht gilt.

(3) Man zeige: Jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in $\mathbb{K}$ hat denselben Konvergenzradius wie ihre „formale Ableitung“ $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, konvergiert aber nicht notwendig für die gleichen x.

(4) Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Man zeige:

(a) Ist a_n der Quotient von zwei Polynomen in n, so machen weder das Quotienten- noch das Wurzelkriterium eine Aussage über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(b) Macht das Wurzelkriterium keine Aussage über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, so macht auch das Quotientenkriterium keine Aussage darüber.