Andreas Gathmann und Julia Amann Sommersemester 2022

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 6

Abgabe: Freitag, 10. Juni bis 12:00

(1) (a) Berechne den Realteil, Imaginärteil und Betrag der komplexen Zahlen

$$z_1 = \frac{1+2\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}} \qquad \text{und} \qquad z_2 = \left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2022}.$$

(b) Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 + 2\mathrm{i}z + 2 - 4\mathrm{i} = 0$.

(c) Bestimme und skizziere die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die $2\,\mathrm{Im}\,z \cdot \mathrm{Im}\,\frac{1}{z} = 1$ gilt.

(2) Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Beweise, dass $(a_n)_n$ genau dann gegen die komplexe Zahl a konvergiert, wenn die Folgen $(\mathrm{Re}\,a_n)_n$ und $(\mathrm{Im}\,a_n)_n$ ihrer Real- und Imaginärteile gegen $\mathrm{Re}\,a$ bzw. $\mathrm{Im}\,a$ konvergieren.

(3) (a) Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Man zeige: Gibt es ein $q \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $q < 1$, so dass

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so ist $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge.

(b) Für ein fest gegebenes $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| < \frac{1}{4}$ definieren wir nun eine komplexe Folge $(a_n)_n$ rekursiv durch

$$a_0 = 0 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = a_n^2 + c \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass $(a_n)_n$ konvergiert.
(Hinweis: Zeige zunächst, dass $\frac{1}{4} + |c|$ eine obere Schranke für die Beträge aller Folgenglieder ist.)

Das Cauchy-Kriterium (also die Aussage, dass eine Folge in $\mathbb{K}$ genau dann konvergiert, wenn sie eine Cauchyfolge ist) darf dabei in dieser Aufgabe schon verwendet werden, auch wenn es erst in der kommenden Woche in der Vorlesung bewiesen wird.

(4) Untersuche die folgenden Mengen auf Abzählbarkeit:

(a) die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{Q}$;

(b) die Menge aller unendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$.