Andreas Gathmann und Julia Amann Sommersemester 2022

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 4

Abgabe: Freitag, 27. Mai bis 12:00

(1) Untersuche, ob die folgenden Grenzwerte in $\mathbb{R}$ existieren, und bestimme sie im Fall der Existenz:

$$\text{(a)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{2n}{2}}{\binom{3n}{3}}, \qquad \text{(b)}\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)^2}{(n+1)^3}, \qquad \text{(c)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n}.$$

(2) (a) Zeige, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_n$ mit

$$a_0 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

konvergiert, und berechne ihren Grenzwert.

(b) Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$ konvergiert.
(Der Grenzwert der Folge muss nicht bestimmt werden.)

(3) Es seien $a \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_n$ eine reelle Folge mit $a_n \neq a$ für alle n.
Zeige, dass a genau dann ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$ ist, wenn in jeder ε-Umgebung von a mindestens ein Folgenglied liegt.

(4) In dieser Aufgabe wollen wir beweisen, dass jede nicht-negative reelle Zahl c für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ eine eindeutige k-te Wurzel besitzt. Wir definieren dazu für ein gegebenes $c > 0$ und $k \in \mathbb{N}_{>0}$ rekursiv die Folge $(a_n)_n$ durch

$$a_0 := 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)\,a_n + \frac{c}{a_n^{k-1}}\right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Man beweise nun:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_{n+1}^k \geq c$.

(b) Die Folge $(a_n)_n$ ist ab dem zweiten Folgenglied monoton fallend.

(c) Zu jeder Zahl $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt es ein eindeutiges $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a^k = c$. Wir nennen dieses a die *k-te Wurzel aus c* und schreiben sie als $\sqrt[k]{c}$.

Zusatzaufgabe für alle, die sich für die „Konvergenzgeschwindigkeit" dieser Folge interessieren: Berechnet doch einmal mit Hilfe eines Computers, wie viele Folgenglieder man benötigt, um auf diese Weise die Zahl $\sqrt[3]{2}$ auf 50 Nachkommastellen genau zu bestimmen.