Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 14

(keine Abgabe)

(1) Berechne die folgenden (z. T. unbestimmten bzw. uneigentlichen) Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty x^2\,\mathrm{e}^{-2x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+1}{x^3-x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x\cos^3 x\,dx$ (d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^7}{\cos^7 x}\,dx$

(2) Es sei $f\colon \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige und monoton fallende Funktion.

(a) Zeige, dass das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ das gleiche Konvergenzverhalten wie die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ hat, d. h. es sind entweder beide konvergent oder beide divergent.

(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^a}$?

Gilt die Aussage von (a) auch ohne die Voraussetzung, dass f monoton fallend ist?

(3) Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Man zeige:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\,x^n\,dx = 0.$

(b) Gilt $f(x) = f(1-x)$ für alle $x \in [0,1]$, so ist $\displaystyle\int_0^1 x\,f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx.$