

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 13

(keine Abgabe)

- (1) (a) Berechne das Taylor-Polynom $T_{f,1}^2$ für die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ und zeige die Restgliedabschätzung $|f(x) - T_{f,1}^2(x)| \leq \frac{1}{20}$ für alle $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.
(b) Berechne $f^{(10)}(0)$ sowie das Taylor-Polynom $T_{f,0}^{10}$ für die Funktion $f(x) = \frac{\cos(x^5)}{1-2x^6}$.
- (2) Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit $f'' = f$ sowie $f(0) = f'(0) = 1$. Berechne die Taylor-Reihe von f mit Entwicklungspunkt 0 und zeige durch eine Restgliedabschätzung, dass $f = \exp$ die Exponentialfunktion ist.
- (3) Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Man zeige:
 - (a) Für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ gilt $\text{OS}(|f|, Z) - \text{US}(|f|, Z) \leq \text{OS}(f, Z) - \text{US}(f, Z)$.
 - (b) Ist f monoton, so ist f integrierbar.