Andreas Gathmann und Julia Amann Sommersemester 2022

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 1

Abgabe: Freitag, 6. Mai bis 12:00

(1) Wie lautet die Negation der folgenden Aussagen? Formuliere außerdem die Aussage (a) in Worten (also analog zu (b)) sowie die Aussage (b) mit Quantoren und anderen mathematischen Symbolen (also analog zu (a)).

(a) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m$.

(b) Zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen gibt es noch eine weitere reelle Zahl.

(c) Sind M, N, R Mengen mit $R \subset N \subset M$, so ist $M \backslash N \subset M \backslash R$.

(2) (a) Untersuche die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto 3x+2$ auf Injektivität und Surjektivität.

(b) Untersuche die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (xy, x+1)$ auf Injektivität und Surjektivität.

(c) Man zeige: Sind $f : M \to N$ und $g : N \to R$ zwei Abbildungen und ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

(3) Welche der Relationen $\subset$ bzw. $\supset$ können im Folgenden für das Symbol $\square$ eingesetzt werden, so dass allgemein wahre Aussagen entstehen? Gib jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Für jede Abbildung $f : M \to N$ und alle $A, B \subset M$ gilt $f(A) \cap f(B) \ \square\ f(A \cap B)$.

(b) Für jede Abbildung $f : M \to N$ und alle $A, B \subset N$ gilt $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \ \square\ f^{-1}(A \cap B)$.

(4) Man beweise oder widerlege: Für alle Mengen $A \subset M$ und $A' \subset M'$ gibt es Teilmengen B und C von M sowie B' und C' von M', so dass

$$(M \times M') \backslash (A \times A') = (B \times B') \cup\!\!\!\cdot\ (C \times C').$$

Könnt ihr die Aussage durch eine Skizze veranschaulichen?

Ihr könnt die Übungsaufgaben gerne in beliebig großen Gruppen bearbeiten. Da aber jeder für sich lernen muss, mathematische Argumente korrekt selbst aufzuschreiben, kann die Abgabe der Lösungen nur allein oder in Zweiergruppen erfolgen. Um den Arbeitsaufwand dabei sowohl für euch als auch für die Übungsleiter beim Korrigieren in Grenzen zu halten, solltet ihr möglichst zu zweit abgeben. Dabei sollten dann natürlich beide einen vergleichbaren Beitrag sowohl beim Finden als auch beim Aufschreiben der Lösungen geleistet haben. Zudem wird erwartet, dass beide in der Lage sind, in der Übungsstunde ihre gemeinsam gefundenen Lösungen an der Tafel zu erklären.

Bitte werft eure Lösungen ins Postfach eures Übungsgruppenleiters neben Raum 48-210 oder gebt sie online als PDF-Datei im Abgabebaustein des OLAT-Kurses ab.