# Grundlagen der Mathematik

Andreas Gathmann

Vorlesungsskript RPTU Kaiserslautern 2025/26

– vorläufige Version –

# Inhaltsverzeichnis (Grundlagen der Mathematik 1)


0. Einleitung und Motivation . . . . . 4

1. Etwas Logik und Mengenlehre . . . . . 7
*1.A Logik 7  1.B Mengenlehre 12*

2. Relationen und Funktionen . . . . . 16
*2.A Funktionen 16  2.B Äquivalenzrelationen 22*

3. Erste Eigenschaften der reellen Zahlen . . . . . 25
*3.A Gruppen und Körper 25  3.B Vollständige Induktion 31  3.C Polynomfunktionen 32*


## Grundlagen der Mathematik 1: Analysis


4. Weitere Eigenschaften der reellen Zahlen . . . . . 36
*4.A Potenzen in Körpern 36  4.B Geordnete Körper 39  4.C Supremum und Infimum 42*

5. Folgen und Grenzwerte . . . . . 48
*5.A Grenzwerte von Folgen 48  5.B Konvergenzkriterien für Folgen 55  5.C Limes superior und inferior 60  5.D Mächtigkeiten von Mengen 63*

6. Komplexe Zahlen . . . . . 66
*6.A Die Konstruktion der komplexen Zahlen 66  6.B Eigenschaften der komplexen Zahlen 69  6.C Reelle und komplexe Folgen 72*

7. Reihen . . . . . 76
*7.A Grenzwerte von Reihen 76  7.B Konvergenzkriterien für Reihen 78  7.C Potenzreihen 85*

8. Stetigkeit . . . . . 91
*8.A Grenzwerte von Funktionen 91  8.B Eigenschaften stetiger Funktionen 97  8.C Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit 100*

9. Spezielle Funktionen . . . . . 107
*9.A Logarithmen und allgemeine Potenzen 107  9.B Winkelfunktionen 110*

10. Differentialrechnung . . . . . 118
*10.A Ableitungen von Funktionen 118  10.B Extremwerte und der Mittelwertsatz 124*

11. Anwendungen der Differentialrechnung . . . . . 130
*11.A Die Regel von de l'Hôpital 130  11.B Taylor-Entwicklung 132*

12. Integralrechnung . . . . . 139
*12.A Das Riemann-Integral 139  12.B Stammfunktionen 147  12.C Integrationsregeln 151*


## Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra


13. Vektorräume . . . . . 157
*13.A Der Vektorraumbegriff 157  13.B Untervektorräume 161*

14. Basen und Dimension . . . . . 165
*14.A Lineare Unabhängigkeit und Basen 166  14.B Die Dimension von Vektorräumen 171*

15. Lineare Gleichungssysteme und Matrizen . . . . . 177
*15.A Matrizen 177  15.B Der Gauß-Algorithmus 184  15.C Algorithmen der linearen Algebra 188*

16. Lineare Abbildungen . . . . . 196
*16.A Morphismen von Vektorräumen 196  16.B Die Klassifikation endlich-dimensionaler Vektorräume 201  16.C Abbildungsmatrizen 204*

17. Komplemente und Quotientenräume . . . . . 212
*17.A Direkte Summen und Komplemente 212  17.B Quotientenräume 215*

18. Determinanten . . . . . 222
*18.A Die Konstruktion der Determinante 222  18.B Eigenschaften der Determinante 229*

# Inhaltsverzeichnis (Grundlagen der Mathematik 2)

## Grundlagen der Mathematik 2: Lineare Algebra


19. Endomorphismen . . . . . 233
*19.A Ähnliche Matrizen 233 19.B Eigenwerte 236 19.C Diagonalisierbarkeit 241*

20. Die Jordansche Normalform . . . . . 249
*20.A Haupträume 249 20.B Jordandiagramme 253 20.C Minimalpolynome 261*

21. Euklidische und unitäre Räume . . . . . 266
*21.A Bilinearformen 267 21.B Skalarprodukte 270 21.C Orthogonalität 277 21.D Dualräume 284 21.E Tensorprodukte 287*

22. Endomorphismen euklidischer und unitärer Räume . . . . . 292
*22.A Orthogonale und unitäre Abbildungen 292 22.B Selbstadjungierte Abbildungen 296 22.C Der Spektralsatz 299 22.D Die Singulärwertzerlegung 307*


## Grundlagen der Mathematik 2: Analysis


23. Topologische Grundbegriffe . . . . . 312
*23.A Normierte und metrische Räume 312 23.B Folgenkonvergenz in metrischen Räumen 317 23.C Offene und abgeschlossene Mengen 322 23.D Kompaktheit 328*

24. Stetigkeit in metrischen Räumen . . . . . 334
*24.A Stetige Abbildungen 334 24.B Eigenschaften stetiger Abbildungen 338 24.C Stetige Bilder kompakter Mengen 344 24.D Peano-Kurven 349*

25. Differenzierbarkeit im Mehrdimensionalen . . . . . 352
*25.A Differenzierbare Abbildungen 352 25.B Eigenschaften differenzierbarer Abbildungen 361*

26. Höhere Ableitungen . . . . . 366
*26.A Die mehrdimensionale Taylor-Entwicklung 367 26.B Extremwerte 373*

27. Implizite Funktionen . . . . . 377
*27.A Lokale Umkehrfunktionen 378*

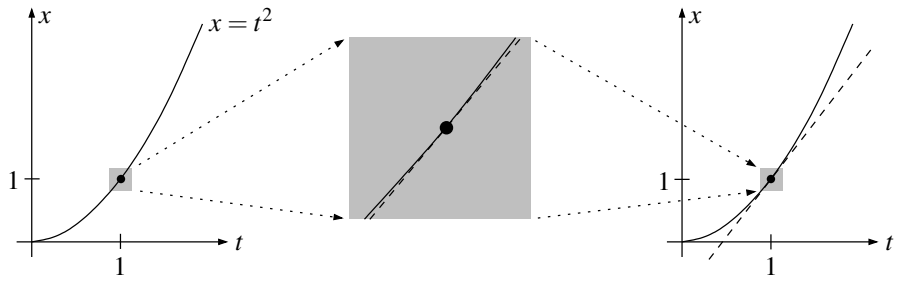
Literatur . . . . . 381
Index . . . . . 382

# 0. Einleitung und Motivation

In diesem Skript – so verspricht es der Titel – wollen wir uns die Grundlagen der Mathematik erarbeiten. Aber was ist das überhaupt, die „Grundlagen der Mathematik“? Es handelt sich hierbei um die Kombination zweier Themengebiete, die in der Tat das grundlegende Handwerkszeug für nahezu die gesamte Mathematik darstellen, nämlich

- der *Analysis*, d. h. der Untersuchung von Folgen und Grenzwerten, Stetigkeit, sowie der Differential- und Integralrechnung (zunächst in einer und im zweiten Semester dann auch in mehreren Variablen), und
- der *linearen Algebra*, d. h. der Theorie der Vektorräume, linearen Abbildungen und Gleichungssysteme.

Von beiden Gebieten habt ihr ja aus der Schule wahrscheinlich schon eine ungefähre Vorstellung. In der *Analysis* geht es grob gesagt darum, reelle Funktionen *lokal*, also in der Umgebung eines gewählten Punktes, zu untersuchen, und aus diesen Untersuchungen dann wieder Aussagen über die gesamte Funktion zurückzugewinnen. Betrachten wir z. B. ein Auto, das sich entlang einer geraden Strecke bewegt. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Position $x$ des Autos nach der Zeit $t$ (in geeigneten Einheiten) durch die Gleichung $x = t^2$ beschrieben werden kann, so dass die Bewegung durch die Kurve im folgenden Bild links dargestellt wird:




Wir wollen diese Bewegung nun nur in einer kleinen Umgebung eines fest gewählten Zeitpunkts, z. B. des Zeitpunkts $t = 1$ (und damit auch $x = 1$) betrachten. Im Bild oben haben wir diese Umgebung grau markiert und in der Mitte stark vergrößert dargestellt. Wir sehen, dass die Kurve in dieser Umgebung fast wie eine *Gerade* aussieht; wir haben diese Gerade gestrichelt eingezeichnet und im Bild rechts auch außerhalb der gewählten Umgebung fortgesetzt. Geometrisch ist diese Gerade natürlich einfach die *Tangente* an die Kurve an der Stelle $t = 1$. Physikalisch repräsentiert die Steigung dieser Geraden die *Geschwindigkeit* des Autos zum betrachteten Zeitpunkt, denn sie gibt ja gerade an, in welchem Verhältnis sich dort die Strecke $x$ mit der Zeit $t$ verändert. Aus der Schule wisst ihr auch schon, wie man diese Steigung ausrechnet: Man muss dazu die gegebene Funktion $t^2$ *differenzieren* – so dass man die Ableitung $2t$ erhält – und dort die betrachtete Stelle $t = 1$ einsetzen. Die Steigung ist in unserem Fall also gerade $2 \cdot 1 = 2$, und man rechnet sofort nach, dass $x = 2t - 1$ die Gleichung der oben eingezeichneten Tangente ist. Man sagt, dass die Gerade $x = 2t - 1$ eine *lineare Approximation* der ursprünglich gegebenen Funktion $x = t^2$ im Punkt $t = 1$ ist.

Wir können aus der Kenntnis der zurückgelegten Strecke zu jedem Zeitpunkt also die Geschwindigkeit des Autos durch Differenzieren bestimmen. Man kann sich natürlich auch die umgekehrte Frage stellen: Angenommen, der Kilometerzähler eures Autos ist kaputt, aber ihr beobachtet auf eurer Fahrt ständig eure Geschwindigkeit. Könnt ihr dann am Ende der Fahrt trotzdem ausrechnen, wie weit ihr gefahren seid? Dies ist offensichtlich die „Umkehrung“ des Differenzierens – und auch hier wisst ihr aus der Schule natürlich schon, dass dies auf die *Integralrechnung* führen wird.

In der Praxis bewegt man sich mit dem Auto aber nicht immer nur auf einer geraden Strecke, und demzufolge braucht man für die Beschreibung solch einer Bewegung (und natürlich auch vieler anderer natürlich auftretender Prozesse) mehrere Variablen. Wir werden daher auch Abbildungen betrachten, die mehrere Variablen auf mehrere andere abbilden, wie z. B. die folgende Vorschrift, die zwei reelle Zahlen $y_1$ und $y_2$ in Abhängigkeit von zwei anderen $x_1$ und $x_2$ ausdrückt:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 \cos x_1 \\ y_2 &= x_1 \mathrm{e}^{x_2} - x_2 \end{aligned}$$

Genau wie oben werden wir uns auch hier wieder die Frage stellen, ob wir diese (in diesem Fall recht komplizierte) Funktion in der Nähe eines gegebenen Punktes nicht vielleicht durch eine einfache *lineare* Abhängigkeit annähern können. In der Tat ist dies möglich: Wir werden sehen, dass z. B. in einer kleinen Umgebung des Nullpunkts $(x_1, x_2) = (0,0)$ die obige Vorschrift näherungsweise die gleichen Ergebnisse liefert wie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Auch wenn diese Gleichungen natürlich viel einfacher als die ursprünglichen sind, sollte offensichtlich sein, dass auch solche linearen Gleichungssysteme bei wachsender Zahl von Variablen (und in der Praxis sind Hunderte oder Tausende von Variablen keine Seltenheit) recht kompliziert werden können. Wir werden daher einen wesentlichen Teil dieser Vorlesung mit der *linearen Algebra*, also dem Studium derartiger linearer Gleichungssysteme, verbringen. Um dabei überhaupt erst einmal den Notationsaufwand in Grenzen zu halten, tut man dabei gut daran, die Start- und Zielvariablen nicht alle einzeln hinzuschreiben, sondern sie zu sogenannten *Vektoren* zusammenzufassen. In der Tat kann man in dieser Sichtweise die lineare Algebra als das Studium von linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen beschreiben.

Wenn wir dann die linearen Abbildungen zwischen mehreren Variablen gut genug verstanden haben, können wir uns im zweiten Teil der Analysis schließlich daran machen, die Differential- und Integralrechnung auf den Fall von mehreren Variablen auszuweiten.

Wir haben damit jetzt relativ kurz umrissen, welcher mathematische Stoff uns in dieser Vorlesung erwartet. Es wird in diesem Skript aber nicht nur darum gehen, mathematische Resultate kennenzulernen. Mindestens ebenso wichtig ist es, das „mathematische Denken“ zu lernen, d. h. die Fähigkeit zu entwickeln, mit abstrakten Konzepten umzugehen, exakte logische Schlüsse zu ziehen und Beweise zu führen. Anders als in der Schule oder im Studium z. B. ingenieurswissenschaftlicher Fächer werden wir genau darauf achten, eine „wasserdichte“ Theorie aufzubauen: Jeder neue Begriff bzw. jeder neue Satz wird nur unter Verwendung des bisher Bekannten exakt definiert bzw. bewiesen. So sind z. B. Formulierungen in dem Stil „eine Funktion wird durch eine Gerade angenähert“ oder „eine Funktion heißt stetig, wenn man sie zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen“ als Veranschaulichung unserer Ideen zwar sehr sinnvoll, als exakte mathematische Formulierung jedoch schlichtweg unbrauchbar. Wir werden daher in dieser Vorlesung viel exakter arbeiten als ihr es wahrscheinlich aus der Schule gewohnt seid, und es ist wichtig, dass ihr diese exakte Denkweise verinnerlicht und anzuwenden lernt. Die Mathematik ist ein riesiges Gebäude – viel größer und komplexer als ihr es euch wahrscheinlich im Moment vorstellen könnt – das ständig höher gebaut wird, indem schon bewiesene Sätze auf neue Fälle angewendet oder wieder für neue Beweise verwendet werden. Wir starten gerade beim Fundament dieses Gebäudes und können es uns da wirklich nicht leisten herumzupfuschen.

Diese konsequent logische und exakte Herangehensweise ist zwar am Anfang wahrscheinlich ungewohnt, hat jedoch für euch auch einen Vorteil: Etwas überspitzt formuliert erzählen wir euch während des gesamten Studiums eigentlich nur Dinge, die logisch aus dem folgen, was ihr ohnehin schon wusstet. Dadurch ist die Mathematik wahrscheinlich das Studienfach, in dem man am wenigsten auswendig lernen muss – in dem es aber im Gegenzug auch am meisten auf das *Verständnis* des Stoffes ankommt. Je besser euer Verständnis für die Mathematik wird, um so mehr Dinge werden euch letztlich einfach „klar“ werden, so dass es euch dann auch viel leichter fällt, sie zu lernen.

Dieses Verständnis für die Mathematik bekommt man aber natürlich nur durch intensiven und *aktiven* Umgang mit dem Stoff, weswegen neben dem Studium der Vorlesung auch die Bearbeitung der Übungsaufgaben besonders wichtig ist.

Heißt das alles nun, dass wir nur mit logischen Argumenten die Mathematik sozusagen „aus dem Nichts“ aufbauen können? Nein, das geht natürlich nicht ... von nichts kommt nichts. Man muss am Anfang immer gewisse Dinge als gegeben annehmen, also Aussagen als wahr voraussetzen, die man nicht mehr beweist bzw. beweisen kann, und auf denen dann die gesamte Theorie beruht. Derartige Annahmen bezeichnet man als **Axiome**. Natürlich versucht man in der Mathematik, mit möglichst wenigen und sehr elementaren Axiomen auszukommen, die hoffentlich niemand anzweifeln würde. In der modernen Mathematik ist es üblich, hierfür die grundlegenden Prinzipien der Logik und Mengenlehre zu verwenden (zu denen wir auch gleich in Kapitel 1 Genaueres sagen werden).

In dieser Vorlesung wollen wir uns das Leben allerdings etwas leichter machen und zusätzlich auch die *Existenz und elementaren Eigenschaften der reellen Zahlen* axiomatisch voraussetzen (um welche Eigenschaften es sich hierbei handelt, werden wir natürlich genau angeben). Man kann zwar nur aus den Axiomen der Logik und Mengenlehre beweisen, dass die reellen Zahlen existieren und dass sie die erwarteten Eigenschaften haben, der Beweis wäre zu diesem frühen Zeitpunkt im Studium aber sehr verwirrend und würde euch auch keine großartigen neuen Erkenntnisse bringen. In diesem Sinne starten wir also sozusagen doch nicht ganz beim Fundament unseres „Gebäudes Mathematik“, sondern bereits im ersten Stock.

Im weiteren Verlauf ist dieses Skript dann wie im Inhaltsverzeichnis angegeben in mehrere Teile gegliedert. Diese bauen der Reihe nach aufeinander auf, mit einer Ausnahme: Nach den in jedem Fall benötigten grundlegenden Anfangskapiteln 1 bis 3 sind die Teile „Grundlagen der Mathematik 1: Analysis“ (Kapitel 4 bis 12) und „Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra“ (Kapitel 13 bis 18) *unabhängig voneinander* und können somit in beliebiger Reihenfolge oder auch parallel studiert werden.

Aber jetzt genug der Vorrede ... beginnen wir nun also unser Studium der Mathematik mit den „Grundlagen der Grundlagen“, den für uns wesentlichen Prinzipien der Logik und Mengenlehre.

# 1. Etwas Logik und Mengenlehre

Bevor wir mit dem eigentlichen Inhalt der Vorlesung beginnen, müssen wir in diesem Kapitel kurz die exakte mathematische Sprache beschreiben, in der wir unsere Ergebnisse formulieren werden: die der Logik und Mengenlehre. Zentral hierbei sind die Begriffe der *Aussage* (in der Logik) und der *Menge* (in der Mengenlehre).

Da wir es hier mit den ersten beiden Begriffen überhaupt zu tun haben, die in der Mathematik vorkommen, können wir sie natürlich nicht durch bereits bekannte Dinge definieren oder mit bereits bekannten Resultaten ihre Eigenschaften herleiten. Wir müssen sie daher (wie schon in der Einleitung erwähnt) axiomatisch voraussetzen. Wir müssen *voraussetzen*, dass es sinnvoll ist, über logische Aussagen und deren Wahrheit zu reden, dass Mengen überhaupt existieren, dass man Mengen vereinigen und schneiden kann, aus ihnen Elemente auswählen kann, und noch einiges mehr. Wenn ihr euch zum Beispiel auf den Standpunkt stellt, dass ihr nicht an die Existenz von Mengen glaubt, wird euch niemand widerlegen können. Allerdings zweifelt ihr damit dann auch die Existenz der gesamten Mathematik an, wie sie heutzutage betrieben wird – und aus der Tatsache, dass ihr in dieser Vorlesung sitzt, schließe ich einmal, dass das nicht der Fall ist.

Glücklicherweise sind die Dinge, die wir benötigen, jedoch allesamt anschaulich sofort einleuchtend. Ich möchte es euch (und mir) daher ersparen, an dieser Stelle eine vollständige und präzise axiomatische Formulierung der Logik und Mengenlehre hinzuschreiben, zumal das momentan sicher mehr verwirren als helfen würde und außerdem gerade im Bereich der Logik auch zu sehr in die Philosophie abdriften würde. Stattdessen wollen wir uns in diesem (für den Rest der Vorlesung sehr untypischen) ersten Kapitel damit begnügen, die für uns wichtigsten Prinzipien und Notationen sowie beliebte Fehlerquellen in verständlicher Sprache zu erklären, auch wenn ein paar Dinge (insbesondere die Begriffsfestlegung – „Definition“ möchte ich es eigentlich gar nicht nennen – einer Aussage und einer Menge) dadurch recht schwammig klingen werden. Außerdem werden wir in Beispielen zur besseren Verdeutlichung bereits hier die reellen Zahlen und ihre einfachsten Eigenschaften (die euch sicherlich bekannt sein werden) benutzen, auch wenn wir diese erst später formalisieren werden. Da es sicher niemanden von euch verwirren wird, werden wir auch die Schreibweise „$x \in \mathbb{R}$“ für „$x$ ist eine reelle Zahl“ schon verwenden, bevor sie in den Notationen 1.12 und 1.14 offiziell eingeführt wird. Ab Kapitel 2 werden wir dann mit dem strukturierten Aufbau der Grundlagen der Mathematik beginnen, also alle Definitionen mit bereits eingeführten Notationen präzise formulieren und alle Aussagen aus vorherigen exakt beweisen.

## 1.A Logik

Beginnen wir also mit der Logik. Unter einer **Aussage** verstehen wir (grob gesagt) ein sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist (wobei wir in der Mathematik natürlich letztlich daran interessiert sind, *wahre* Aussagen herzuleiten – wenn wir später mathematische Sätze formulieren, ist damit also stets gemeint, dass die dort gemachte Aussage wahr ist). Wichtig sind auch sprachliche Gebilde, in denen freie **Variablen**, also Platzhalter, vorkommen, und die erst beim Einsetzen von Werten für diese Variablen Aussagen liefern. Man bezeichnet sie als **Aussageformen**.

**Beispiel 1.1.**

(a) $1+1=2$ ist eine wahre, $1+1=3$ eine falsche, und $1+1$ überhaupt keine Aussage.

(b) $x+1=2$ ist eine Aussageform, die beim Einsetzen von $x=1$ in eine wahre, beim Einsetzen jeder anderen reellen Zahl in eine falsche Aussage übergeht.

**Bemerkung 1.2.** Als Variablen in Aussageformen kann man beliebige Symbole benutzen. Üblich sind neben den normalen lateinischen Klein- und Großbuchstaben auch die griechischen Buchstaben, die wir zur Erinnerung hier auflisten:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A $\alpha$<br>alpha | B $\beta$<br>beta | $\Gamma$ $\gamma$<br>gamma | $\Delta$ $\delta$<br>delta | E $\varepsilon$<br>epsilon | Z $\zeta$<br>zeta | H $\eta$<br>eta | $\Theta$ $\vartheta$<br>theta |
| I $\iota$<br>iota | K $\kappa$<br>kappa | $\Lambda$ $\lambda$<br>lambda | M $\mu$<br>my | N $\nu$<br>ny | $\Xi$ $\xi$<br>xi | O $o$<br>omikron | $\Pi$ $\pi$<br>pi |
| P $\rho$<br>rho | $\Sigma$ $\sigma$<br>sigma | T $\tau$<br>tau | Y $\upsilon$<br>ypsilon | $\Phi$ $\varphi$<br>phi | X $\chi$<br>chi | $\Psi$ $\psi$<br>psi | $\Omega$ $\omega$<br>omega |

Oft verziert man Buchstaben auch noch mit einem Symbol oder versieht sie mit einem Index, um neue Variablen zu erhalten: So sind z. B. $x, x', \tilde{x}, \bar{x}, x_1, x_2, \ldots$ alles Symbole für verschiedene Variablen, die zunächst einmal nichts miteinander zu tun haben (aber möglichst für irgendwie miteinander zusammenhängende Objekte eingesetzt werden sollten, wenn man den Leser nicht vollends verwirren will).

**Notation 1.3** (Zusammengesetzte Aussagen)**.** Sind $A$ und $B$ Aussagen, so lassen sich daraus wie folgt neue bilden:

| Symbol | Wahrheitstafel | | | | Bedeutung |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | w | f | w | f | |
| $B$ | w | w | f | f | |
| $\neg A$ | f | w | | | nicht $A$ |
| $A \wedge B$ | w | f | f | f | $A$ und $B$ |
| $A \vee B$ | w | w | w | f | $A$ oder $B$ (oder beides): „nicht-ausschließendes Oder“ |
| $A \Leftrightarrow B$ | w | f | f | w | $A$ und $B$ sind gleichbedeutend / *äquivalent*, bzw. $A$ genau dann, wenn $B$ |
| $A \Rightarrow B$ | w | w | f | w | aus $A$ folgt $B$, bzw. wenn $A$ dann $B$ |

Die sogenannte **Wahrheitstafel** in den mittleren vier Spalten ist dabei die eigentliche Definition der neuen zusammengesetzten Aussagen. Sie gibt in Abhängigkeit der Wahrheit von $A$ und $B$ (in den ersten beiden Zeilen) an, ob die zusammengesetzte Aussage wahr oder falsch ist.

Bemerkenswert ist hierbei wohl nur die Folgerungsaussage $A \Rightarrow B$, die keine Aussage über die Richtigkeit von $A$ oder $B$separat macht, sondern nur sagt, dass $B$ wahr ist, wenn auch $A$ es ist. Ist hingegen $A$ falsch, so ist die Folgerungsaussage $A \Rightarrow B$ stets wahr („aus einer falschen Voraussetzung kann man alles folgern“). So ist z. B. $0 = 1 \;\Rightarrow\; 2 = 3$ eine wahre Aussage. Wie schon erwähnt wollen wir uns in der Mathematik aber natürlich in der Regel mit wahren Aussagen beschäftigen, und neue wahre Aussagen aus alten herleiten. Gerade in Beweisen ist die übliche Verwendung der Notation $A \Rightarrow B$ daher, dass $A$ eine bereits als wahr erkannte Aussage ist, und wir damit nun schließen wollen, dass auch $B$ wahr ist.

**Bemerkung 1.4** (Beweise mit Wahrheitstafeln)**.** Wollen wir kompliziertere zusammengesetzte Aussagen miteinander vergleichen, so können wir dies auch mit Hilfe von Wahrheitstafeln tun. So ist für zwei Aussagen $A$ und $B$ z. B.

$$A \Rightarrow B \quad \text{äquivalent zu} \quad (\neg A) \vee B,$$

denn wenn wir in der Wahrheitstafel

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | w | f | w | f |
| $B$ | w | w | f | f |
| $\neg A$ | f | w | f | w |
| $(\neg A) \vee B$ | w | w | f | w |

mit Hilfe der Definitionen von $\neg$ und $\vee$ aus Notation 1.3 zunächst $\neg A$ und dann $(\neg A) \vee B$ berechnen, sehen wir, dass das Ergebnis mit $A \Rightarrow B$ übereinstimmt. Nach der Bemerkung aus Notation 1.3 ist dies auch anschaulich klar: Die Folgerungsaussage $A \Rightarrow B$ ist ja genau dann wahr, wenn $A$ falsch (also $\neg A$ wahr) ist, oder wenn $B$ wahr ist (oder beides).

Genauso zeigt man die ebenfalls einleuchtende Aussage, dass

$$A \Leftrightarrow B \quad \text{äquivalent zu} \quad (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

ist – was auch die übliche Art ist, wie man eine Äquivalenz zeigt: Man zeigt separat die beiden Folgerungen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$.

**Notation 1.5.** Folgerungen („$\Rightarrow$“) und Äquivalenzen („$\Leftrightarrow$“) sind natürlich zwei verschiedene Dinge, die man nicht durcheinanderwerfen darf (auch wenn das in der Schule wahrscheinlich manchmal nicht so genau genommen wird). Es hat sich jedoch in der Mathematik eingebürgert, bei *Definitionen* von Begriffen durch eine äquivalente, definierende Eigenschaft die Sprechweise „wenn“ anstatt des eigentlich korrekten „genau dann, wenn“ zu verwenden: So würde man z. B. als Definition des Begriffs einer geraden Zahl hinschreiben

„Eine ganze Zahl $x$ heißt gerade, wenn $\frac{x}{2}$ eine ganze Zahl ist“,

obwohl man genau genommen natürlich meint

„Eine ganze Zahl $x$ heißt *genau dann* gerade, wenn $\frac{x}{2}$ eine ganze Zahl ist“.

Eine gewöhnliche Folgerungsaussage wie z. B. die wahre Aussage

„Wenn eine ganze Zahl $x$ positiv ist, dann ist auch $x+1$ positiv“

ist dagegen immer nur in einer Richtung zu verstehen; hier wird also nicht behauptet, dass mit $x+1$ auch $x$ immer positiv sein muss (was ja auch falsch wäre).

**Notation 1.6** (Quantoren)**.** Natürlich kann man nicht nur zwei, sondern auch mehrere Aussagen wie in Notation 1.3 mit „und“ bzw. „oder“ verknüpfen – also die neue Aussage konstruieren, dass *jede* bzw. *mindestens eine* der ursprünglichen Aussagen wahr ist. Am einfachsten notiert man dies mit einer Aussageform $A$, in der eine freie Variable $x$ vorkommt. Wir schreiben dies dann auch als $A(x)$ und setzen

| Symbol | Bedeutung |
|---|---|
| $\forall x\colon A(x)$ | für alle $x$ gilt $A(x)$ (also eine „und“-Verknüpfung aller Aussagen $A(x)$) |
| $\exists x\colon A(x)$ | es gibt ein $x$ mit $A(x)$ (also eine „oder“-Verknüpfung aller Aussagen $A(x)$) |

Die beiden Symbole $\forall$ und $\exists$ bezeichnet man als **Quantoren**. Beachte, dass diese beiden Quantoren *nicht* miteinander vertauschbar sind: So besagt z. B. die Aussage

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon\ y > x$$

„zu jeder reellen Zahl $x$ gibt es eine Zahl $y$, die größer ist“ (was offensichtlich wahr ist), während die Umkehrung der beiden Quantoren die Aussage

$$\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon\ y > x$$

„es gibt eine reelle Zahl $y$, die größer als jede reelle Zahl $x$ ist“ liefern würde (was ebenso offensichtlich falsch ist). Der Unterschied besteht einfach darin, dass im ersten Fall zuerst das $x$ gewählt werden muss und dann ein $y$ dazu existieren muss (das von $x$ abhängen darf), während es im zweiten Fall *dasselbe* $y$ für alle $x$ sein müsste.

**Bemerkung 1.7.** Jede Aussage lässt sich natürlich auf viele Arten aufschreiben, sowohl als deutscher Satz als auch als mathematische Formel. Die gerade eben betrachtete Aussage könnte man z. B. auf die folgenden (absolut gleichwertigen) Arten aufschreiben:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon\ y > x$.

(b) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y > x$.

(c) Zu jeder reellen Zahl gibt es noch eine größere.

Welche Variante man beim Aufschreiben wählt, ist weitestgehend Geschmackssache. Die Formulierung einer Aussage als deutscher Satz hat den Vorteil, dass wir sie oft leichter verstehen können, weil wir die deutsche Sprache schon länger kennen als die mathematische. Wenn wir uns jedoch erst einmal an die mathematische Sprache gewöhnt haben, wird auch sie ihre Vorzüge bekommen:

Sie ist deutlich kürzer und besser logisch strukturiert. Wir werden im Folgenden beide Schreibweisen mischen und jeweils diejenige wählen, mit der unsere Aussagen (hoffentlich) am einfachsten verständlich werden.

Wenn wir mathematische Symbole verwenden, müssen wir diese aber auch stets in ihrer korrekten Notation und nicht als „Abkürzungen“ für deutsche Wörter verwenden: Man würde die Aussage „2 und 4 sind gerade Zahlen“ sicher niemals schreiben als „$2 \wedge 4$ sind gerade Zahlen“, und analog genauso wenig „Es gilt $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$“ als „Es gilt $x^2 \geq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$“.

**Bemerkung 1.8** (Negationen)**.** Es ist wichtig zu wissen, wie man von einer Aussage das Gegenteil, also die Negation bzw. „Verneinung“ bildet. Da hierbei oft Fehler gemacht werden, wollen wir die allgemeinen Regeln hierfür im Folgenden kurz auflisten. Dabei könnte man (a), (b) und (c) wieder schnell mit Wahrheitstafeln zeigen; die Regeln (d) und (e) sind wie in Notation 1.6 analog zu (b) und (c) für die Verknüpfung mehrerer Aussagen:

(a) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$: Ist es falsch, dass $A$ falsch ist, so bedeutet dies genau, dass $A$ wahr ist.

(b) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$: Das Gegenteil von „$A$ und $B$ sind richtig“ ist „$A$ oder $B$ ist falsch“.

(c) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$: Das Gegenteil von „$A$ oder $B$ ist richtig“ ist „$A$ und $B$ sind falsch“.

(d) $\neg(\forall x\colon A(x)) \Leftrightarrow \exists x\colon \neg A(x)$: Das Gegenteil von „für alle $x$ gilt $A(x)$“ ist „es gibt ein $x$, für das $A(x)$ falsch ist“.

(e) $\neg(\exists x\colon A(x)) \Leftrightarrow \forall x\colon \neg A(x)$: Das Gegenteil von „es gibt ein $x$, für das $A(x)$ gilt“ ist „für alle $x$ ist $A(x)$ falsch“.

Man kann also sagen, dass eine Verneinung dazu führt, dass „und“ mit „oder“ sowie „für alle“ mit „es gibt“ vertauscht werden. So ist z. B. das Gegenteil der Aussage

„In Frankfurt haben *alle* Haushalte Strom *und* fließendes Wasser“

die Aussage

„In Frankfurt *gibt es* einen Haushalt, der keinen Strom *oder* kein fließendes Wasser hat“.

**Beispiel 1.9.**

(a) Wollen wir eine Folgerung $A \Rightarrow B$ verneinen, so können wir sie zunächst mit Bemerkung 1.4 zu $(\neg A) \vee B$ umformen, und erhalten nach Bemerkung 1.8 als Umkehrung dann $A \wedge \neg B$. Dies ist auch anschaulich einleuchtend: Die Folgerungsaussage „wenn $A$ dann $B$“ ist genau dann falsch, wenn die Voraussetzung $A$ zwar gilt, die Behauptung $B$ aber nicht. Wir sehen also:

$$\boxed{\text{Die Verneinung einer Folgerung } A \Rightarrow B \text{ ist } A \wedge \neg B}$$

(und nicht etwa $A \Rightarrow \neg B$, wie man vielleicht denken könnte).

(b) Eine oft vorkommende Anwendung der Regeln für die Verneinung von Aussagen ist der sogenannte **Widerspruchsbeweis** bzw. Beweis durch **Kontraposition**. Nach Bemerkung 1.4 gesehen ist die Folgerung $A \Rightarrow B$ („aus $A$ folgt $B$“) gleichbedeutend mit $(\neg A) \vee B$. Damit ist diese Aussage nach Bemerkung 1.8 (a) auch äquivalent zu $(\neg(\neg B)) \vee (\neg A)$, also zu $\neg B \Rightarrow \neg A$. Mit anderen Worten: Haben wir eine Schlussfolgerung $A \Rightarrow B$ zu beweisen, so können wir genauso gut $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ zeigen, d. h. *wir können annehmen, dass die zu zeigende Aussage B falsch ist und dies dann zu einem Widerspruch führen bzw. zeigen, dass dann auch die Voraussetzung A falsch sein muss.*

**Beispiel 1.10.** Hier sind zwei Beispiele für die Anwendung der Prinzipien aus Bemerkung 1.8 und Beispiel 1.9 – und auch unsere ersten Beispiele dafür, wie man Beweise von Aussagen exakt aufschreiben kann.

(a) Einen Beweis durch Widerspruch könnte man z. B. so aufschreiben:

*Behauptung:* Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $2x+1 > 0$ oder $2x-1 < 0$.

*Beweis:* Angenommen, die Behauptung wäre falsch, d. h. (nach Bemerkung 1.8 (c) und (d)) es gäbe ein $x \in \mathbb{R}$ mit

$$2x+1 \leq 0 \quad (1) \qquad \text{und} \qquad 2x-1 \geq 0 \quad (2).$$

Für dieses $x$ würde dann folgen, dass

$$0 \overset{(1)}{\geq} 2x+1 = 2x-1+2 \overset{(2)}{\geq} 0+2 = 2.$$

Dies ist aber ein Widerspruch. Also war unsere Annahme falsch und somit die zu beweisende Aussage richtig. □

Das dabei verwendete Symbol „□“ ist die übliche Art, das Ende eines Beweises zu kennzeichnen. Zur Verdeutlichung haben wir die beiden Ungleichungen mit (1) und (2) markiert, um später angeben zu können, wo sie verwendet werden.

(b) Manchmal weiß man von einer Aussage aufgrund der Aufgabenstellung zunächst einmal noch nicht, ob sie wahr oder falsch ist. In diesem Fall muss man sich dies natürlich zuerst überlegen – und, falls die Aussage falsch ist, ihre Negation beweisen. Als Beispiel dafür betrachten wir die Aufgabe

Man beweise oder widerlege: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $2x+1 < 0$ oder $2x-1 > 0$.

In diesem Fall merkt man schnell, dass die Aussage falsch sein muss, weil die Ungleichungen schon für den Fall $x = 0$ nicht stimmen. Man könnte als Lösung der Aufgabe unter Beachtung der Negationsregeln aus Bemerkung 1.8 also aufschreiben:

*Behauptung:* Die Aussage ist falsch, d. h. es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $2x+1 \geq 0$ und $2x-1 \leq 0$.

*Beweis:* Für $x = 0$ ist $2x+1 = 1 \geq 0$ und $2x-1 = -1 \leq 0$. □

Beachte, dass dies ein vollständiger Beweis ist: *Um eine allgemeine Aussage zu widerlegen, genügt es, ein Gegenbeispiel dafür anzugeben.*

**Bemerkung 1.11.** Bevor wir unsere kurze Auflistung der für uns wichtigen Prinzipien der Logik beenden, wollen wir noch kurz auf ein paar generelle Dinge eingehen, die man beim Aufschreiben mathematischer Beweise oder Rechnungen beachten muss.

Dass wir bei unseren logischen Argumenten sauber und exakt arbeiten – also z. B. nicht Folgerungen, die keine Äquivalenzen sind, in der falschen Richtung verwenden, „für alle“ mit „es gibt“ verwechseln oder Ähnliches – sollte sich von selbst verstehen. Die folgende kleine Geschichte hilft vielleicht zu verstehen, was damit gemeint ist.

> Ein Ingenieur, ein Physiker und ein Mathematiker fahren mit dem Zug nach Frankreich und sehen dort aus dem Fenster des Zuges ein schwarzes Schaf.
>
> Da sagt der Ingenieur: „Oh, in Frankreich sind die Schafe schwarz!“
>
> Darauf der Physiker: „Nein ... wir wissen jetzt nur, dass es in Frankreich mindestens ein schwarzes Schaf gibt.“
>
> Der Mathematiker: „Nein ... wir wissen nur, dass es in Frankreich mindestens ein Schaf gibt, das auf mindestens einer Seite schwarz ist.“

Es gibt aber noch einen weiteren sehr wichtigen Punkt, der leider oft nicht beachtet wird: In der Regel werden wir beim Aufschreiben sowohl Aussagen notieren wollen, die wir erst noch zeigen wollen (um schon einmal zu sagen, worauf wir hinaus wollen), als auch solche, von denen wir bereits wissen, dass sie wahr sind (z. B. weil sie für die zu zeigende Behauptung als wahr vorausgesetzt werden oder weil sie sich logisch aus irgendetwas bereits Bekanntem ergeben haben). Es sollte offensichtlich sein, dass wir Aussagen mit derartig verschiedenen Bedeutungen für die Argumentationsstruktur nicht einfach zusammenhangslos hintereinander schreiben dürfen, wenn noch jemand in der Lage sein soll, die Argumente nachzuvollziehen. Betrachten wir z. B. noch einmal unseren

Beweis aus Beispiel 1.10 (a) oben, so wäre eine Art des Aufschreibens in folgendem Stil (wie man es leider oft sieht)

$$\begin{array}{ll} 2x+1>0 \text{ oder } & 2x-1<0 \\ 2x+1\leq 0 & 2x-1\geq 0 \\ 0\geq 2x+1=2x-1+2\geq 0+2=2 & \end{array}$$

völlig inakzeptabel, obwohl hier natürlich letztlich die gleichen Aussagen stehen wie oben. Kurz gesagt:

> Von *jeder* aufgeschriebenen Aussage muss für den Leser *sofort* und *ohne eigenes Nachdenken* ersichtlich sein, welche Rolle sie in der Argumentationsstruktur spielt: Ist es z. B. eine noch zu zeigende Behauptung, eine Annahme oder eine Folgerung (und wenn ja, aus was)?

Dies bedeutet allerdings nicht, dass wir ganze Aufsätze schreiben müssen. Eine (schon recht platzoptimierte) Art, den Beweis aus Beispiel 1.10 (a) aufzuschreiben, wäre z. B.

> Angenommen, es gäbe ein $x\in\mathbb{R}$ mit $2x+1\leq 0$ und $2x-1\geq 0$.
> Dann wäre $0\geq 2x+1=2x-1+2\geq 0+2=2$, Widerspruch. □

01

## 1.B Mengenlehre

Nachdem wir die wichtigsten Regeln der Logik behandelt haben, wenden wir uns jetzt der Mengenlehre zu. Die gesamte moderne Mathematik basiert auf diesem Begriff der Menge, der ja auch schon aus der Schule hinlänglich bekannt ist. Zur Beschreibung, was eine Menge ist, zitiert man üblicherweise die folgende Charakterisierung von Georg Cantor (1845–1918):

> „Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen."

Die in einer Menge zusammengefassten Objekte bezeichnet man als ihre **Elemente**.

**Notation 1.12.**

(a) Wir schreiben $x\in M$, falls $x$ ein Element der Menge $M$ ist, und $x\notin M$ andernfalls.

(b) Die einfachste Art, eine Menge konkret anzugeben, besteht darin, ihre Elemente in geschweiften Klammern aufzulisten, wobei es auf die Reihenfolge und Mehrfachnennungen nicht ankommt. So sind z. B. $\{1,2,3\}$ und $\{2,3,1,3\}$ zwei Schreibweisen für dieselbe Menge mit den drei Elementen 1, 2 und 3.

Beachte, dass die Elemente einer Menge nicht unbedingt Zahlen sein müssen – so ist z. B. $M=\{\{2,3\},\{1,3\}\}$ eine Menge mit zwei Elementen, die selbst wieder Mengen sind, nämlich $\{2,3\}$ und $\{1,3\}$. Mit der Notation aus (a) ist also z. B. $\{1,3\}\in M$. Insbesondere ist $M$ nicht dasselbe wie die Menge $\{1,2,3\}$.

(c) Man kann die Elemente einer Menge auch durch eine beschreibende Eigenschaft angeben: $\{x : A(x)\}$ bezeichnet die Menge aller Objekte $x$, für die die Aussage $A(x)$ wahr ist, wie z. B. in $\{x\in\mathbb{R} : x^2=1\}=\{-1,1\}$.

(d) Die Menge $\{\}$ ohne Elemente, die sogenannte **leere Menge**, bezeichnen wir mit $\emptyset$.

(e) Eine Menge $M$ heißt **Teilmenge** einer Menge $N$ (geschrieben $M\subset N$), wenn jedes Element von $M$ auch Element von $N$ ist, bzw. in der Quantorenschreibweise von Notation 1.6 wenn

$$\forall x\colon x\in M\Rightarrow x\in N.$$

Man sagt in diesem Fall auch, dass $N$ eine **Obermenge** von $M$ ist (geschrieben $N\supset M$).

Beachte, dass $M$ und $N$ dabei auch gleich sein können; in der Tat ist offensichtlich

$$M=N \quad \text{genau dann, wenn} \quad M\subset N \text{ und } N\subset M.$$

Oft wird man eine Gleichheit $M = N$ von Mengen auch so beweisen, dass man separat $M \subset N$ und $N \subset M$ zeigt.

Wenn wir ausdrücken wollen, dass $M$ eine Teilmenge von $N$ und nicht gleich $N$ ist, so schreiben wir dies als $M \subsetneq N$ und sagen, dass $M$ eine **echte Teilmenge** von $N$ ist. Es ist wichtig, dies von der Aussage $M \not\subset N$ zu unterscheiden, die bedeutet, dass $M$ keine Teilmenge von $N$ ist.

Achtung: Manchmal wird in der Literatur das Symbol „$\subset$“ für *echte* Teilmengen und „$\subseteq$“ für nicht notwendig echte Teilmengen verwendet.

(f) Hat eine Menge $M$ nur endlich viele Elemente, so nennt man $M$ eine **endliche Menge** und schreibt die Anzahl ihrer Elemente als $|M|$. Andernfalls setzt man formal $|M| = \infty$.

**Bemerkung 1.13** (Russellsches Paradoxon)**.** Die oben gegebene Charakterisierung von Mengen von Cantor ist aus mathematischer Sicht natürlich sehr schwammig. In der Tat hat Bertrand Russell kurz darauf bemerkt, dass sie sogar schnell zu Widersprüchen führt. Er betrachtet dazu

$$M = \{A : A \text{ ist eine Menge mit } A \notin A\}, \qquad (*)$$

also „die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten“. Sicherlich ist es eine merkwürdige Vorstellung, dass eine Menge sich selbst als Element enthalten könnte – im Sinne von Cantors Charakterisierung wäre die Definition $(*)$ aber zulässig. Fragen wir uns nun allerdings, ob sich die so konstruierte Menge $M$ selbst als Element enthält, so erhalten wir sofort einen Widerspruch: Wenn $M \in M$ gilt, so würde das nach der Definition $(*)$ ja gerade bedeuten, dass $M \notin M$ ist – und das wiederum, dass doch $M \in M$ ist. Man bezeichnet dies als das *Russellsche Paradoxon*.

Die Ursache für diesen Widerspruch ist, dass die Definition $(*)$ rückbezüglich ist: Wir wollen eine neue Menge $M$ konstruieren, verwenden dabei aber auf der rechten Seite der Definition *alle Mengen*, also u. a. auch die Menge $M$, die wir gerade erst definieren wollen. Das ist in etwa so, als würdet ihr im Beweis eines Satzes die Aussage des Satzes selbst verwenden – und das ist natürlich nicht zulässig.

Man muss bei der Festlegung, was Mengen sind und wie man sie bilden kann, also eigentlich viel genauer vorgehen, als es Cantor getan hat. Heutzutage verwendet man hierzu in der Regel das im Jahre 1930 aufgestellte Axiomensystem von Zermelo und Fraenkel, das genau angibt, wie man aus bekannten Mengen neue konstruieren darf: z. B. indem man sie schneidet oder vereinigt, oder aus bereits bekannten Mengen Elemente mit einer bestimmten Eigenschaft auswählt. Wir wollen dies hier in dieser Vorlesung aber nicht weiter thematisieren und uns mit der naiven Mengencharakterisierung von Cantor begnügen (sowie der Versicherung meinerseits, dass schon alles in Ordnung ist, wenn wir neue Mengen immer nur aus alten konstruieren und keine rückbezüglichen Definitionen hinschreiben). Genaueres zum Zermelo-Fraenkel-Axiomensystem könnt ihr z. B. in [E, Kapitel 13] nachlesen.

**Notation 1.14** (Reelle Zahlen)**.** Unser wichtigstes Beispiel für eine Menge ist die Menge der **reellen Zahlen**, die wir mit $\mathbb{R}$ bezeichnen werden. Wir wollen die Existenz der reellen Zahlen in dieser Vorlesung axiomatisch voraussetzen und begnügen uns daher an dieser Stelle damit zu sagen, dass man sie sich als die Menge der Punkte auf einer Geraden (der „Zahlengeraden“) vorstellen kann. Zusätzlich werden wir in den nächsten beiden Kapiteln die mathematischen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ exakt angeben (und ebenfalls axiomatisch voraussetzen) – und zwar genügend viele Eigenschaften, um $\mathbb{R}$ dadurch eindeutig zu charakterisieren.

Ich möchte hier noch einmal betonen, dass man die Existenz und die Eigenschaften der reellen Zahlen eigentlich nicht voraussetzen müsste: Man kann das auch allein aus den Axiomen der Logik und Mengenlehre herleiten! Dies wäre jedoch relativ aufwendig und würde euch im Moment mehr verwirren als helfen, daher wollen wir hier darauf verzichten. Wer sich trotzdem dafür interessiert, kann die Einzelheiten hierzu in [E, Kapitel 1 und 2] nachlesen.

Außer den reellen Zahlen sind vor allem noch die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ wichtig:

(a) die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ der **natürlichen Zahlen** (Achtung: In der Literatur wird die 0 manchmal nicht mit zu den natürlichen Zahlen gezählt!);

(b) die Menge $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ der **ganzen Zahlen**;

(c) die Menge $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ der **rationalen Zahlen**.

Offensichtlich sind diese Mengen ineinander enthalten: Es gilt $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$. Teilmengen von $\mathbb{R}$, die durch Ungleichungen gegeben sind, schreiben wir in der Regel, indem wir die Ungleichungsbedingung als Index an das Symbol $\mathbb{R}$ schreiben, z. B. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ für die Menge $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ aller nicht-negativen Zahlen.

**Notation 1.15.** Sind $M$ und $N$ Mengen, so bezeichnen wir mit ...

(a) $M \cap N := \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}$ die **Schnittmenge** von $M$ und $N$. Gilt $M \cap N = \emptyset$, so sagen wir, dass $M$ und $N$ **disjunkt** sind.

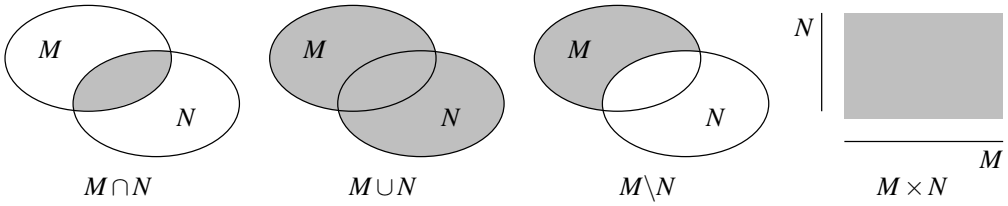
(b) $M \cup N := \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$ die **Vereinigungsmenge** von $M$ und $N$. Im Fall einer **disjunkten Vereinigung** mit $M \cap N = \emptyset$ schreiben wir statt $M \cup N$ auch $M \dot\cup N$.

(c) $M \setminus N := \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}$ die **Differenzmenge** von $M$ und $N$.

(d) $M \times N := \{(x, y) : x \in M, y \in N\}$ die **Produktmenge** bzw. das Produkt von $M$ und $N$. Die Schreibweise $(x, y)$ steht hierbei für ein **geordnetes Paar**, d. h. einfach für die Angabe eines Elements aus $M$ und eines aus $N$ (wobei es auch im Fall $M = N$ auf die Reihenfolge ankommt, d. h. $(x, y)$ ist genau dann gleich $(x', y')$ wenn $x = x'$ und $y = y'$). Im Fall $M = N$ schreibt man $M \times N = M \times M$ auch als $M^2$.

(e) $\mathscr{P}(M) := \{A : A \text{ ist Teilmenge von } M\}$ die **Potenzmenge** von $M$.

Das Symbol „:=“ bedeutet hierbei, dass der Ausdruck auf der linken Seite durch die rechte Seite definiert wird. Die Konstruktionen (a) bis (d) können durch die folgenden Bilder veranschaulicht werden. Natürlich sind sie auch für mehr als zwei Mengen möglich; aus der Schule kennt ihr zum Beispiel sicher den Fall $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.




Die Potenzmenge $\mathscr{P}(M)$ aller Teilmengen einer gegebenen Menge $M$ lässt sich dagegen nicht so einfach durch ein Bild darstellen. Es ist z. B.

$$\mathscr{P}(\{0,1\}) = \big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\big\}.$$

**Aufgabe 1.16.** Wie lautet die Negation der folgenden Aussagen? Formuliere außerdem die Aussage (a) in Worten (also analog zu (b)) sowie die Aussage (b) mit Quantoren und anderen mathematischen Symbolen (also analog zu (a)).

(a) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\colon\ n = 2m$.

(b) Zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen gibt es noch eine weitere reelle Zahl.

(c) Sind $M, N, R$ Mengen mit $R \subset N \subset M$, so ist $M \setminus N \subset M \setminus R$.

**Aufgabe 1.17.** Es seien $A$, $B$, $C$ Aussagen und $M$, $N$, $R$ Mengen. Man zeige:

(a) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ und $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

(b) $M \cup (N \cap R) = (M \cup N) \cap (M \cup R)$ und $M \cap (N \cup R) = (M \cap N) \cup (M \cap R)$.

**Aufgabe 1.18.** Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige gegebene $x$ und $M$ äquivalent zueinander? Zeige jeweils die Äquivalenz bzw. widerlege sie durch ein Gegenbeispiel.

(a) $x \in M$ (b) $\{x\} \subset M$ (c) $\{x\} \cap M \neq \emptyset$

(d) $\{x\} \in M$ (e) $\{x\} \setminus M = \emptyset$ (f) $M \setminus \{x\} = \emptyset$

**Aufgabe 1.19.** Man beweise oder widerlege: Für alle Mengen $A \subset M$ und $A' \subset M'$ gibt es Teilmengen $B$ und $C$ von $M$ sowie $B'$ und $C'$ von $M'$, so dass

$$(M \times M') \setminus (A \times A') = (B \times B') \cup (C \times C').$$

Könnt ihr die Aussage durch eine Skizze veranschaulichen?

# 2. Relationen und Funktionen

Nachdem wir Mengen eingeführt haben, wollen wir nun auch mehrere von ihnen miteinander in Beziehung setzen können. Das Grundkonzept hierfür ist das einer Relation.

**Definition 2.1** (Relationen)**.** Es seien $M$ und $N$ zwei Mengen. Eine **Relation** zwischen $M$ und $N$ ist eine Teilmenge $R$ des Produkts $M \times N$. Für $x \in M$ und $y \in N$ mit $(x,y) \in R$ sagen wir dann „*$x$ steht (bezüglich $R$) in Relation zu $y$*“. Ist $M = N$, so nennen wir $R$ auch eine *Relation auf $M$*.

**Bemerkung 2.2.** Um eine Relation $R$ anzugeben, also eine Teilmenge $R \subset M \times N$ zu definieren, müssen wir demzufolge einfach für alle Paare $(x,y)$ mit $x \in M$ und $y \in N$ festlegen, ob $(x,y) \in R$ gelten, also ob $x$ in Relation zu $y$ stehen soll.

Wie wir in diesem Kapitel sehen werden, werden Relationen in der Mathematik für sehr unterschiedliche Konzepte verwendet – z. B. um Zahlen miteinander zu vergleichen wie in Beispiel 2.3, um eine Menge auf eine andere abzubilden wie in Abschnitt 2.A, oder um die Elemente einer Menge nach bestimmten Kriterien zu Klassen zusammenzufassen wie in Abschnitt 2.B. Dementsprechend sind für die Aussage „$x$ steht bezüglich $R$ in Relation zu $y$“ auch je nach Anwendung ganz unterschiedliche Notationen üblich. Für allgemeine, nicht näher spezifizierte Relationen schreibt man hierfür oft $xRy$.

**Beispiel 2.3** (Kleiner-Relation)**.** Für $M = N = \mathbb{R}$ betrachten wir die Relation

$$R = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R} \text{ mit } x < y\},$$

für die $x$ also genau dann in Relation zu $y$ steht, wenn $x < y$ gilt. Man nennt $R$ deshalb auch die *Kleiner-Relation* auf $\mathbb{R}$. Die Notation „$xRy$“ aus Bemerkung 2.2 stimmt in diesem Fall also mit der Schreibweise „$x < y$“ überein, wenn man die Relation $R$ direkt mit dem Symbol „$<$“ bezeichnet. In der Tat ist es aus diesem Grund bei manchen Relationen üblich, sie gleich mit Symbolen statt mit Buchstaben zu benennen.

## 2.A Funktionen

Die mit Abstand wichtigsten Relationen sind ohne Zweifel die Funktionen, die ihr natürlich bereits hinlänglich aus der Schule kennt. Wir wollen sie hier nun exakt einführen und ihre ersten Eigenschaften untersuchen.

**Definition 2.4** (Funktionen)**.** Es seien $M$ und $N$ zwei Mengen.

(a) Eine **Funktion** oder **Abbildung** $f$ von $M$ nach $N$, geschrieben $f\colon M \to N$, ist eine Relation zwischen $M$ und $N$, bezüglich der jedes Element $x$ von $M$ zu *genau einem* Element $y$ von $N$ in Relation steht. Wir schreiben dies dann als $x \mapsto y$ oder $y = f(x)$ und sagen, $y$ ist das **Bild** von $x$ unter $f$ bzw. der **Wert** von $f$ in $x$.

(b) Für eine Funktion $f\colon M \to N$ bezeichnet man die Menge $M$ als **Definitionsmenge**, **Startmenge** oder **Startraum** von $f$. Die Menge $N$ heißt **Zielmenge** oder **Zielraum** von $f$.

**Bemerkung 2.5.**

(a) Um eine Funktion komplett festzulegen, müssen wir zuerst einmal den Start- und Zielraum angeben, und dann schließlich noch von jedem Element des Startraums sagen, auf welches Element des Zielraums es abgebildet wird. In welcher Form wir diese Zuordnung angeben – ob durch eine Formel, durch explizites Auflisten der Funktionswerte aller Elemente des Startraums, oder irgendwie anders – spielt dabei keine Rolle. So sind z. B.

$$f\colon \{0,1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x^2, \quad g\colon \{0,1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x^3, \quad h\colon \{0,1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

trotz ihrer verschieden aussehenden Vorschriften dieselbe Funktion (d. h. es gilt $f = g = h$), da alle drei den gleichen Start- und Zielraum haben und aus den gleichen Zuordnungen $0 \mapsto 0$ und $1 \mapsto 2$ bestehen. Mit anderen Worten sind zwei Funktionen $f, g\colon M \to N$ also genau dann gleich, wenn sie an jedem Punkt die gleichen Werte besitzen, also wenn gilt

$$\forall x \in M\colon\ f(x) = g(x).$$

(b) Man sieht leider oft, dass eine Funktion $f\colon M \to N$ als $f(x)$ geschrieben wird. Es ist wichtig zu verstehen, dass diese Notation gemäß Definition 2.4 falsch ist: Mit $f(x)$ wird *der Wert der Funktion $f$ in einem Punkt $x \in M$* bezeichnet. Somit ist $f(x)$ (für gegebenes $x$) ein Element von $N$, und damit ein ganz anderes mathematisches Objekt als die Funktion selbst, die wir nur mit $f$ bezeichnen und die eine Relation zwischen $M$ und $N$ ist. Dies mag auf den ersten Blick spitzfindig erscheinen – wir werden aber später noch oft Mengen sehen, deren Elemente Funktionen sind, und dann ist es natürlich wichtig, dies von der Menge ihrer Funktions*werte* zu unterscheiden.

**Beispiel 2.6.**

(a) Die Zuordnungen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{für } x \leq 0 \\ x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

sind in dieser Form keine zulässigen Funktionsdefinitionen, weil im Fall von $f$ der Zahl 0 kein gültiger Funktionswert zugeordnet wird und im Fall $g$ für die Zahl 0 zwei (sich widersprechende) Festlegungen des Funktionswertes gemacht werden. Dies lässt sich jedoch in beiden Fällen leicht reparieren, z. B. indem man die Festlegungen abändert in

$$f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}.$$

(b) Zu jeder Menge $M$ gibt es die **identische Abbildung**

$$\mathrm{id}_M\colon M \to M,\ x \mapsto x,$$

die jedes Element auf sich selbst abbildet.

(c) Ist $f\colon M \to N$ eine Abbildung und $A \subset M$ eine Teilmenge des Startraums, so erhält man durch die Einschränkung der Definitionsmenge von $M$ auf $A$ eine neue Abbildung, die wir mit

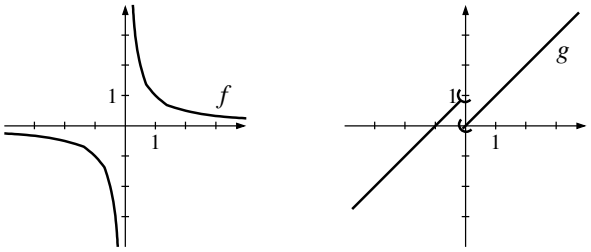
$$f|_A\colon A \to N,\ x \mapsto f(x)$$

bezeichnen und die die **Einschränkung** von $f$ auf $A$ genannt wird. Genauso kann man natürlich auch die Zielmenge $N$ auf eine Teilmenge $B$ einschränken, wenn $f$ nur Werte in $B$ annimmt. Es ist üblich, bei einer derartigen Einschränkung der Zielmenge immer noch den gleichen Namen für die Abbildung zu verwenden, also dann $f\colon M \to B$ zu schreiben (auch wenn es sich dabei um eine andere Funktion als das ursprüngliche $f\colon M \to N$ handelt).

**Bemerkung 2.7** (Graph einer Abbildung)**.** Zu einer Abbildung $f\colon M \to N$ heißt die Menge

$$\{(x, f(x)) : x \in M\} \quad \subset M \times N$$

der **Graph** von $f$. Sind $M$ und $N$ Teilmengen von $\mathbb{R}$, so ist dieser Graph also eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, und man kann ihn leicht zeichnen und dadurch die Abbildung veranschaulichen. Für die Abbildungen aus Beispiel 2.6 (a) sieht dies z. B. so aus:




Beachte, dass dieser Graph nach den Definitionen 2.1 und 2.4 eigentlich sogar genau das gleiche ist wie die Funktion selbst, nämlich die Teilmenge des Produkts $M \times N$, die aus den Paaren $(x,y)$ besteht, für die $x$ bezüglich $f$ in Relation zu $y$ steht, also $y = f(x)$ gilt. Der Begriff des Graphen soll hier also nur noch einmal deutlich machen, dass man sich die Funktion gerade wirklich als ein derart „grafisches“ Objekt vorstellt und nicht als eine „Zuordnung“ von $M$ nach $N$.

In der Definition 2.4 einer Abbildung $f\colon M \to N$ verlangen wir, dass jedem Element von $M$ genau ein Element von $N$ zugeordnet wird. Wir fordern jedoch nicht auch umgekehrt, dass jedes Element des Zielraums $N$ das Bild von genau einem Element von $M$ ist, oder dass es überhaupt als Bild eines Elements von $M$ auftritt. Abbildungen, die diese Eigenschaften dennoch besitzen, haben spezielle Namen, die wir jetzt einführen wollen.

**Definition 2.8** (Eigenschaften von Abbildungen)**.** Es sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung.

(a) Ist $y \in N$ und $x \in M$ mit $f(x) = y$, so heißt $x$ ein **Urbild** von $y$ unter $f$.

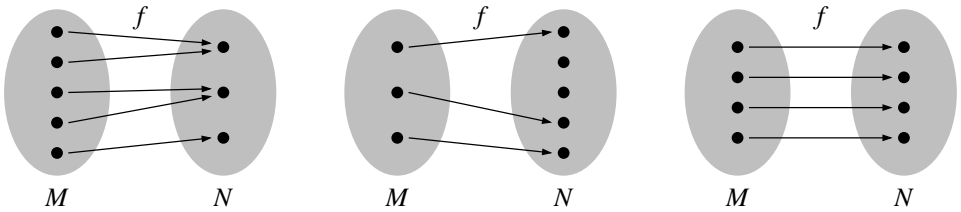
(b) Hat jedes $y \in N$ ...

- *mindestens* ein Urbild, so heißt $f$ **surjektiv**.

  In Quantoren bedeutet dies: $\forall\, y \in N\ \exists\, x \in M\colon\ f(x) = y$.
- *höchstens* ein Urbild, so heißt $f$ **injektiv**.

  In Quantoren bedeutet dies: $\forall\, x_1, x_2 \in M\colon\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. (Also: Haben zwei Elemente des Startraums das gleiche Bild, so müssen sie bereits dasselbe Element sein.)
- *genau* ein Urbild, ist $f$ also surjektiv und injektiv, so heißt $f$ **bijektiv**.

Im folgenden Bild sind diese Begriffe anschaulich dargestellt (wobei $M$ und $N$ endlich sind und nur aus den eingezeichneten Punkten bestehen).




02

**Beispiel 2.9.** Betrachten wir noch einmal die Funktionen aus Beispiel 2.6 (a), so ist die Funktion $f$ nicht surjektiv (und damit auch nicht bijektiv), da das Element 0 des Zielraums kein Urbild hat. Sie ist jedoch injektiv: Sind $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$, also $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$, so folgt durch Multiplikation mit $x_1 x_2$ sofort $x_1 = x_2$.

Die Funktion $g$ dagegen ist surjektiv: Eine Zahl $y \in \mathbb{R}$ hat als Urbild $x = y$ für $y \geq 0$, und $x = y - 1$ für $y < 0$. Sie ist allerdings nicht injektiv, denn es ist $g(-1) = g(0) = 0$.

Beachte, dass diese Eigenschaften auch an den Graphen in Bemerkung 2.7 ablesbar sind: Surjektivität bzw. Injektivität bedeuten gerade, dass jede horizontale Gerade auf der Höhe eines Wertes im Zielraum den Funktionsgraphen in mindestens bzw. höchstens einem Punkt schneidet. Wichtig ist

auch, dass diese Eigenschaften von der Wahl des Start- und Zielraums abhängen: So wird z. B. $f$ bijektiv, wenn man den Zielraum $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ersetzt, und $g$ injektiv, wenn man den Startraum auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ einschränkt (in der Notation von Beispiel 2.6 (c) also $g|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ betrachtet).

**Aufgabe 2.10.** Wie viele Abbildungen gibt es zwischen den Mengen $\{1,2,3,4\}$ und $\{1,2,3,4,5,6\}$? Wie viele von ihnen sind injektiv?

Bilder und Urbilder unter Abbildungen betrachtet man oft auch von ganzen Mengen statt nur von Punkten:

**Definition 2.11** (Bild und Urbild von Mengen)**.** Es sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung.

(a) Für $A \subset M$ heißt die Menge
$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} \quad \subset N$$
(also die Menge aller Bilder von Punkten in $A$) das **Bild** von $A$ unter $f$.

(b) Ist $B \subset N$, so heißt die Menge
$$f^{-1}(B) := \{x \in M : f(x) \in B\} \quad \subset M$$
(also die Menge aller Urbilder von Punkten in $B$) das **Urbild** von $B$ unter $f$.

**Bemerkung 2.12.** Die Grundidee der Notation in Definition 2.11 (a) ist: Schreiben wir als Argument einer Funktion $f\colon M \to N$ eine *Teilmenge* statt einem *Element* von $M$, so bedeutet dies, dass wir alle Werte $f(x)$ für $x \in M$ zusammen nehmen und diese wieder in einer Menge zusammenfassen. Diese Schreibweise verwendet man auch oft, wenn die Funktion aus einer Rechenverknüpfung besteht, wie z. B. in

$$\mathbb{N}+\tfrac{1}{2} := \left\{n+\tfrac{1}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \dots\right\} \quad \text{oder} \quad 3\mathbb{Z} := \{3n : n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}.$$

**Beispiel 2.13.** Für die Funktion $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ aus Beispiel 2.6 (a) ist $f(\mathbb{R}_{>0}) = \mathbb{R}_{>0}$ und $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

**Beispiel 2.14.** Zwischen den Konstruktionen von Bild und Urbild aus Definition 2.11 und den Mengenoperationen aus Abschnitt 1.B gibt es sehr viele Beziehungen. Um einmal exemplarisch zu sehen, wie derartige Beziehungen aussehen und bewiesen werden können, wollen wir nun zeigen, dass für jede Abbildung $f\colon M \to N$ und zwei beliebige Teilmengen $A, B \subset M$ stets
$$f(A)\backslash f(B) \subset f(A\backslash B) \tag{$*$}$$
gilt.

Zum Beweis müssen wir zeigen, dass jedes Element der linken Menge auch in der rechten Menge liegt. Es sei also $y \in f(A)\backslash f(B)$ beliebig. Insbesondere ist damit $y \in f(A)$, nach Definition 2.11 (a) also $y = f(x)$ für ein $x \in A$. Würde nun auch $x \in B$ gelten, so hätten wir wegen $y = f(x)$ auch $y \in f(B)$, im Widerspruch zu $y \in f(A)\backslash f(B)$. Also ist $x \notin B$, und damit $x \in A\backslash B$. Damit besagt $y = f(x)$ aber gerade $y \in f(A\backslash B)$. Insgesamt haben wir somit die behauptete Teilmengenbeziehung $(*)$ gezeigt.

Beachte allerdings, dass in $(*)$ im Allgemeinen keine Gleichheit gilt: Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ mit $A = \{-1, 1\}$ und $B = \{-1\}$ ist
$$f(A)\backslash f(B) = \{1\}\backslash\{1\} = \emptyset, \quad \text{aber} \quad f(A\backslash B) = f(\{1\}) = \{1\}.$$

**Aufgabe 2.15.** Beweise die folgenden Teilmengenbeziehungen und untersuche jeweils, ob auch die Gleichheit gilt.

(a) Für alle Mengen $M, A, B$ gilt $M\backslash(A \cup B) \subset (M\backslash A) \cap (M\backslash B)$.

(b) Ist $f\colon M \to N$ eine Abbildung und $A \subset N$, so ist $f\left(f^{-1}(A)\right) \subset A$.

**Aufgabe 2.16.** Es sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Finde für das Symbol $\square$ jeweils eine der Mengenbeziehungen $\subset, =, \supset$, so dass die folgenden Aussagen wahr werden, und beweise die so entstandenen Aussagen!

(a) $f(A) \cap f(B) \;\square\; f(A \cap B)$ für alle $A, B \subset M$.

(b) $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \square f^{-1}(A \cap B)$ für alle $A, B \subset N$.

Als Nächstes wollen wir nun die euch sicher bereits bekannte Verkettung, also die Hintereinanderausführung von Funktionen einführen.

**Definition 2.17** (Verkettung von Funktionen)**.** Es seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to R$ zwei Abbildungen (also so dass die Zielmenge von $f$ gleich der Startmenge von $g$ ist). Dann heißt die Abbildung

$$g \circ f\colon M \to R,\ x \mapsto g(f(x))$$

die **Verkettung** von $f$ und $g$.

**Bemerkung 2.18.** Bei der Verkettung zweier Funktionen kommt es natürlich auf die Reihenfolge an, allein schon weil in der Situation von Definition 2.17 in der Regel der Zielraum von $g$ ja nicht mit dem Startraum von $f$ übereinstimmt und die „umgekehrte Verkettung" $f \circ g$ damit gar nicht definierbar wäre. Beachte dabei, dass die Notation $g \circ f$ lautet, obwohl wir zuerst $f$ (von $M$ nach $N$) und dann $g$ (von $N$ nach $R$) anwenden – man liest $g \circ f$ daher manchmal auch als „$g$ nach $f$". Diese vielleicht etwas merkwürdig erscheinende Notation kommt einfach daher, dass die Buchstaben in der gleichen Reihenfolge stehen sollen wie bei der Abbildungsvorschrift $x \mapsto g(f(x))$.

Wir werden nun unser erstes *Lemma* beweisen – „Lemma" ist griechisch und bedeutet eigentlich „Annahme", aber in der Mathematik wird dieser Begriff für einen *Hilfssatz* verwendet, also für ein kleines Zwischenresultat, das vielleicht für sich genommen nicht übermäßig überraschend oder interessant ist, aber das in späteren Beweisen immer wieder nützlich sein wird. In unserem momentanen Fall geht es einfach darum, dass die Verkettung von Abbildungen *assoziativ* ist (siehe auch Definition 3.1):

**Lemma 2.19** (Assoziativität der Verkettung)**.** *Sind $f\colon M \to N$, $g\colon N \to R$ und $h\colon R \to S$ drei Abbildungen, so gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. (Man schreibt für diese Abbildung daher oft auch einfach $h \circ g \circ f$.)*

*Beweis.* Nach Definition 2.4 können wir die Gleichheit zweier Funktionen zeigen, indem wir für jedes Element der Startmenge nachweisen, dass sein Bild unter beiden Funktionen übereinstimmt. Dies rechnen wir nun einfach durch wiederholtes Einsetzen von Definition 2.17 nach: Es gilt

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

und

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

Da diese beiden Ausdrücke übereinstimmen, ist das Lemma bewiesen. □

Am Ende dieses Abschnitts wollen wir schließlich noch das Konzept von Umkehrfunktionen bijektiver Funktionen einführen.

**Definition 2.20** (Umkehrfunktionen)**.** Es sei $f\colon M \to N$ eine bijektive Funktion. Dann heißt

$$f^{-1}\colon N \to M,\ y \mapsto \text{das eindeutige Urbild von } y \text{ unter } f$$

die **Umkehrfunktion** bzw. **Umkehrabbildung** von $f$.

**Bemerkung 2.21.** Für die Umkehrfunktion $f^{-1}$ einer bijektiven Funktion $f\colon M \to N$ gilt nach Konstruktion offensichtlich $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N$.

Gibt es umgekehrt zu einer Funktion $f\colon M \to N$ eine Abbildung $g\colon N \to M$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$, so ist $f$ bijektiv:

- $f$ ist surjektiv: Ist $y \in N$ beliebig, so ist $x := g(y) \in M$ ein Urbild von $y$ unter $f$, denn es ist $f(x) = f(g(y)) = y$.
- $f$ ist injektiv: Sind $x_1, x_2 \in M$ mit $f(x_1) = f(x_2)$, so folgt durch Anwenden von $g$ sofort auch $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, und damit $x_1 = x_2$.

**Beispiel 2.22.** Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+1$ ist bijektiv, und ihre Umkehrabbildung ist $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x-1$. In der Tat gilt nämlich für alle $x \in \mathbb{R}$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = (x+1)-1 = x \quad \text{und} \quad (f \circ f^{-1})(x) = (x-1)+1 = x.$$

**Bemerkung 2.23** (Urbilder und Umkehrabbildungen)**.** Beachte, dass wir das Urbild einer Menge unter einer Abbildung $f\colon M \to N$ in Definition 2.11 (b) mit dem gleichen Symbol $f^{-1}$ bezeichnet haben wie (im Fall einer bijektiven Abbildung) die Umkehrabbildung aus Definition 2.20. Das ist vielleicht etwas unglücklich gewählt, aber in der Literatur so fest verankert, dass wir hier nicht davon abweichen wollen. Bei genauem Hinschauen kann man aber auch immer feststellen, was gemeint ist:

> Ist $f\colon M \to N$ eine Abbildung, so bezeichnet …
>
> … $f^{-1}(B)$ für eine *Menge* $B \subset N$ das *Urbild* von $B$ wie in Definition 2.11 (b); es existiert für jede Abbildung $f$.
>
> … $f^{-1}(y)$ für ein *Element* $y \in B$ den *Wert der Umkehrabbildung* bei $y$ wie in Definition 2.20; er existiert nur für bijektives $f$.

Letztlich hängen diese beiden Notationen aber auch eng miteinander zusammen: Ist $f$ bijektiv und ist $x \in M$ mit $f(x) = y$, so ist $f^{-1}(y) = x$ (mit $f^{-1}$ im Sinne der Umkehrabbildung) und $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$ (mit $f^{-1}$ im Sinne des Urbildes).

**Aufgabe 2.24.**

(a) Untersuche die Abbildung $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 3x+2$ auf Injektivität und Surjektivität.

(b) Untersuche die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (xy, x+1)$ auf Injektivität und Surjektivität.

(c) Man zeige: Sind $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to R$ surjektiv, so ist auch $g \circ f\colon M \to R$ surjektiv.

**Aufgabe 2.25.** Es seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to R$ bijektiv. Zeige, dass dann auch $f^{-1}\colon N \to M$ und $g \circ f\colon M \to R$ bijektiv sind.

**Aufgabe 2.26.** Man beweise oder widerlege:

(a) Sind $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to R$ zwei Abbildungen und ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch $f$ injektiv.

(b) Sind $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to R$ zwei Abbildungen und ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch $g$ injektiv.

**Aufgabe 2.27.** Es sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung zwischen nicht-leeren Mengen. Man zeige:

(a) $f$ ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $g\colon N \to M$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$.

(b) $f$ ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $g\colon N \to M$ gibt mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$.

**Aufgabe 2.28.** Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen. Man beweise:

$$f \text{ ist surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad \text{für alle } A, B \subset N \text{ mit } f^{-1}(A) = f^{-1}(B) \text{ gilt } A = B.$$

**Aufgabe 2.29.** Für diese Aufgabe nennen wir eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ …

- *monoton wachsend*, wenn gilt: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
- *irgendwann konstant*, wenn gilt: $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow f(x) = f(y)$;
- *interessant*, wenn gilt: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : x < y$ und $f(x) < f(y)$.

Man zeige:

(a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist interessant.

(b) Für die Eigenschaften „monoton wachsend“ und „irgendwann konstant“ gilt, dass mit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch deren Summenfunktion

$$f+g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)+g(x)$$

diese Eigenschaft hat.

(c) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, aber nicht interessant, so ist $f$ irgendwann konstant.

## 2.B Äquivalenzrelationen

Am Anfang dieses Kapitels haben wir allgemeine Relationen eingeführt, als einzigen Spezialfall davon aber bisher nur die Funktionen ausführlicher betrachtet. Wir wollen daher nun noch einen ganz anderen wichtigen Typ von Relationen studieren, die sogenannten Äquivalenzrelationen.

Angenommen, wir möchten eine Menge $M$ untersuchen, die uns zunächst einmal zu groß oder zu kompliziert erscheint. Es gibt dann zwei prinzipiell verschiedene Möglichkeiten, wie man daraus eine kleinere bzw. einfachere Menge machen kann:

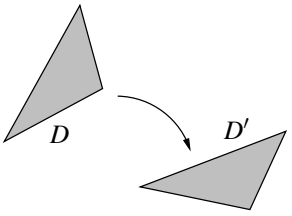
- Wir können uns auf eine Teilmenge von $M$ beschränken – dann schließen wir allerdings manche Elemente von $M$ von unserer Untersuchung aus.
- Wir können zwar alle Elemente von $M$ betrachten, aber manche von ihnen miteinander identifizieren bzw. zu Klassen zusammenfassen – d. h. sie als gleich bzw. „äquivalent“ ansehen, wenn sie für das zu untersuchende Problem ähnliche Eigenschaften haben.

Diese zweite Idee der Identifizierung ähnlicher Elemente führt zum Begriff der Äquivalenzrelationen. Sie klingt vielleicht zunächst etwas abstrakt, ist euch aber sicher schon an vielen Stellen begegnet. Hier sind zwei einfache Beispiele dafür.

**Beispiel 2.30.**

(a) Eine analoge Uhr vereinfacht die recht große Menge aller (vergangenen und zukünftigen) Zeitpunkte, die wir uns als Zeitachse $M = \mathbb{R}$ vorstellen können, indem sie nach jeweils 12 Stunden wieder dasselbe anzeigt. Sie identifiziert also zwei Zeitpunkte $x, y \in \mathbb{R}$ (gemessen in Stunden) miteinander, wenn $x - y$ ein ganzzahliges Vielfaches von 12 ist. Dadurch „verkleinert“ sie die ursprüngliche Zeitachse auf ein gut überschaubares Intervall von 12 Stunden – und wir alle wissen, dass uns ein Blick auf die Uhr in vielen Fällen ausreicht, wenn wir den aktuellen Zeitpunkt wissen wollen, auch wenn uns das nichts über das Datum oder die Tageszeit (vormittags oder nachmittags) sagt.

(b) Als „mathematischeres“ Beispiel können wir die Menge $M$ aller Dreiecke in der Ebene $\mathbb{R}^2$ betrachten.




Bekanntlich heißen zwei solche Dreiecke $D, D' \in M$ zueinander *kongruent*, wenn sie wie im Bild rechts durch eine Drehung und / oder Verschiebung auseinander hervorgehen – wir schreiben dies im Folgenden als $D \sim D'$. Zueinander kongruente Dreiecke werden oft miteinander identifiziert, nämlich immer dann, wenn es uns nur auf die Form bzw. Größe der Dreiecke, aber nicht auf ihre Lage in der Ebene ankommt.

Wenn wir z. B. sagen, dass die drei Seitenlängen ein Dreieck eindeutig bestimmen, dann meinen wir damit in Wirklichkeit, dass sie das Dreieck *bis auf Kongruenz* eindeutig bestimmen, also nur die Form und Größe festlegen, aber nicht die Lage des Dreiecks in $\mathbb{R}^2$. Formal kann man dies so ausdrücken: zu einem Dreieck $D$ nennt man

$$\overline{D} := \{D' \in M : D' \sim D\},$$

also die Menge aller zu $D$ kongruenten Dreiecke, die *Kongruenzklasse* von $D$. Die Menge aller dieser Kongruenzklassen bezeichnen wir mit

$$M/\sim \; := \; \{\overline{D} : D \in M\}.$$

Man kann dann z. B. sagen, dass die Seitenlängen eines Dreiecks ein eindeutiges Element in $M/\sim$ bestimmen, also eine eindeutige Kongruenzklasse von Dreiecken festlegen – nicht aber ein eindeutiges Element von $M$.

Mit der Idee dieser Beispiele im Kopf wollen wir nun den Begriff der Äquivalenzrelation exakt definieren.

**Definition 2.31** (Äquivalenzrelationen)**.** Es sei $\sim$ wie in Definition 2.1 eine Relation auf einer Menge $M$. Wie in Bemerkung 2.2 schreiben wir $x \sim y$, wenn $x$ und $y$ bezüglich $\sim$ in Relation stehen.

Man nennt $\sim$ eine **Äquivalenzrelation** auf $M$, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

(a) (**Reflexivität**) Für alle $x \in M$ gilt $x \sim x$.

(b) (**Symmetrie**) Sind $x, y \in M$ mit $x \sim y$, so gilt auch $y \sim x$.

(c) (**Transitivität**) Sind $x, y, z \in M$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$, so gilt auch $x \sim z$.

In diesem Fall sagt man statt $x \sim y$ auch, dass $x$ (bezüglich dieser Relation) zu $y$ **äquivalent** ist. Zu $x \in M$ heißt dann die Menge

$$\bar{x} := \{y \in M : y \sim x\}$$

aller Elemente, die zu $x$ äquivalent sind, die **Äquivalenzklasse** bzw. einfach **Klasse** von $x$; jedes Element dieser Menge nennt man einen **Repräsentanten** dieser Klasse. Die Menge aller Äquivalenzklassen schreiben wir als

$$M/\sim \; := \; \{\bar{x} : x \in M\}.$$

**Beispiel 2.32.**

(a) Das Beispiel 2.30 (a) einer analogen Uhr lässt sich mathematisch exakt wie folgt definieren: Auf $M = \mathbb{R}$ betrachten wir die Relation

$$x \sim y \; :\Leftrightarrow \; \text{es gibt ein } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } x - y = 12k. \qquad (*)$$

Dies ist in der Tat eine Äquivalenzrelation, denn für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

- Reflexivität: Es gilt $x - x = 12 \cdot 0 = 12k$ mit $k = 0 \in \mathbb{Z}$, also $x \sim x$.
- Symmetrie: Es gelte $x \sim y$, also $x - y = 12k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Durch Multiplikation mit $-1$ folgt dann auch $y - x = 12 \cdot (-k) = 12k'$ mit $k' := -k \in \mathbb{Z}$, und damit $y \sim x$.
- Transitivität: Es gelte $x \sim y$ und $y \sim z$, nach Definition der Relation also $x - y = 12k$ und $y - z = 12k'$ für gewisse $k, k' \in \mathbb{Z}$ (beachte, dass der Wert von $k$ in $(*)$ von $x$ und $y$ abhängt und wir daher für die Differenz $y - z$ eine neue Variable $k'$ brauchen). Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhalten wir $x - z = 12(k + k') = 12k''$ mit $k'' := k + k' \in \mathbb{Z}$, und damit $x \sim z$.

Die Äquivalenzklasse z. B. von $2 \in \mathbb{R}$ ist

$$\overline{2} = \{x \in \mathbb{R} : x \sim 2\} = \{x \in \mathbb{R} : \text{es gibt ein } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } x - 2 = 12k\} = \{2 + 12k : k \in \mathbb{Z}\},$$

also die Menge aller Zeitpunkte, zu denen die Uhr auf 2 steht. Jeder beliebige Zeitpunkt $x \in \mathbb{R}$, zu dem die Uhr auf 2 steht, ist ein Repräsentant dieser Klasse. Die Menge $M/\sim$ entspricht allen möglichen Ständen der Uhr; wir können sie uns anschaulich als einen „Kreis mit Umfang 12“ vorstellen.

(b) Die Kongruenz von Dreiecken aus Beispiel 2.30 (b) ist ebenfalls eine Äquivalenzrelation (es ist offensichtlich, dass sie die Eigenschaften aus Definition 2.31 erfüllt). Die Äquivalenzklassen sind in diesem Fall genau die Kongruenzklassen.

(c) Die Kleiner-Relation auf $\mathbb{R}$ aus Beispiel 2.3, also die Relation, für die für $x, y \in \mathbb{R}$ genau dann $x \sim y$ gilt, wenn $x < y$ ist, ist keine Äquivalenzrelation, da sie weder reflexiv noch symmetrisch ist.

Beachte, dass bei unseren Äquivalenzrelationen aus Beispiel 2.32 (a) und (b) jedes Element von $M$ in genau einer Äquivalenzklasse liegt: Zu jedem Zeitpunkt hat eine analoge Uhr genau einen Stand, und jedes Dreieck in der Ebene liegt in genau einer Kongruenzklasse. Dies beschreibt genau unsere Idee, dass wir die Elemente von $M$ auf eine bestimmte Art zu Klassen zusammenfassen wollen. Allgemein sind die Axiome einer Äquivalenzrelation aus Definition 2.31 anschaulich genau diejenigen, die man braucht, damit die Relation sinnvoll eine solche Identifizierung von Elementen zu Klassen beschreiben kann. Dies zeigt auch noch einmal der folgende zentrale Satz über Äquivalenzrelationen.

**Satz 2.33** (Eigenschaften von Äquivalenzrelationen)**.** *Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge $M$.*

(a) *Für $x,y \in M$ gilt $x \sim y$ genau dann, wenn $\overline{x} = \overline{y}$. (Zwei Elemente sind also genau dann äquivalent zueinander, wenn sie die gleiche Äquivalenzklasse bestimmen.)*

(b) *Jedes Element $x \in M$ liegt in genau einer Äquivalenzklasse (nämlich in $\overline{x}$). Insbesondere ist $M$ also die disjunkte Vereinigung aller Äquivalenzklassen. Man sagt dafür auch, dass die Äquivalenzklassen eine Partition von $M$ bilden.*

*Beweis.*

(a) Es seien $x,y \in M$.

„$\Rightarrow$“: Es gelte $x \sim y$. Ist dann $z \in M$ mit $z \in \overline{x}$, also $z \sim x$, so ist nach der Transitivität wegen $x \sim y$ auch $z \sim y$, also $z \in \overline{y}$. Damit gilt $\overline{x} \subset \overline{y}$. Da mit $x \sim y$ wegen der Symmetrie aber auch $y \sim x$ gilt, folgt analog auch umgekehrt $\overline{y} \subset \overline{x}$, und somit insgesamt $\overline{x} = \overline{y}$.

„$\Leftarrow$“: Es sei nun $\overline{x} = \overline{y}$. Wegen der Reflexivität ist $x \sim x$, also $x \in \overline{x} = \overline{y}$, und damit $x \sim y$.

(b) Wegen der Reflexivität liegt wie im Beweis von (a) jedes $x \in M$ in seiner eigenen Äquivalenzklasse $\overline{x}$. Liegt $x$ nun zusätzlich auch in $\overline{y}$ für ein $y \in M$, gilt also $x \sim y$, so folgt nach (a) sofort $\overline{x} = \overline{y}$. Also waren die beiden Äquivalenzklassen schon gleich, d. h. $x$ liegt in nur einer Äquivalenzklasse (nämlich in $\overline{x}$). □

**Aufgabe 2.34.** Es sei $M = \{n \in \mathbb{Z} : |n| \leq 100\} = \{-100, -99, \dots, 0, \dots, 99, 100\}$. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen auf $M$? Gib im Fall einer Äquivalenzrelation außerdem die Äquivalenzklasse $\overline{-34}$ explizit an.

(a) $x \sim y \;:\Leftrightarrow$ es gibt ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $x = 2^n y$.

(b) $x \sim y \;:\Leftrightarrow\; xy \geq 0$.

**Aufgabe 2.35.** Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{R}^2$? Im Fall einer Äquivalenzrelation berechne und skizziere man außerdem die Äquivalenzklassen von $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ und $(1,1) \in \mathbb{R}^2$.

(a) $(x,y) \sim (x',y') \;:\Leftrightarrow$ es gibt ein $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $x = a^2 x'$ und $y = ay'$;

(b) $(x,y) \sim (x',y') \;:\Leftrightarrow$ es gibt ein $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $x = ay'$ und $y = ax'$.

03

# 3. Erste Eigenschaften der reellen Zahlen

In Notation 1.14 haben wir bereits die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als „Menge der Punkte auf einer Geraden“ eingeführt. Man kann aber natürlich noch viel mehr Dinge mit den reellen Zahlen tun als sie als eine einfache Punktmenge zu betrachten: Man kann sie addieren, multiplizieren, die Größe von zwei Zahlen miteinander vergleichen, und noch einiges mehr. Wir wollen die Eigenschaften der reellen Zahlen in diesem und dem nächsten Kapitel exakt formalisieren, damit wir danach genau wissen, welche Eigenschaften von $\mathbb{R}$ wir in dieser Vorlesung axiomatisch voraussetzen. In der Tat werden diese Eigenschaften letztlich sogar ausreichen, um die reellen Zahlen eindeutig zu charakterisieren. Wir beginnen in diesem Kapitel aber zunächst einmal nur mit den „Grundrechenarten“, also mit der Addition und der Multiplikation sowie ihren Umkehrungen, der Subtraktion und Division.

## 3.A Gruppen und Körper

Die Eigenschaften von Verknüpfungen wie der Addition oder Multiplikation reeller Zahlen werden mathematisch durch die Begriffe einer Gruppe bzw. eines Körpers beschrieben, die wir jetzt einführen wollen.

**Definition 3.1** (Gruppen)**.** Eine **Gruppe** ist eine Menge $G$ zusammen mit einer „Verknüpfung“, d. h. einer Abbildung

$$*\colon G \times G \to G,\ (x,y) \mapsto x*y,$$

so dass die folgenden Eigenschaften (auch *Gruppenaxiome* genannt) gelten:

(a) (**Assoziativität**) Für alle $x,y,z \in G$ gilt $(x*y)*z = x*(y*z)$. Man schreibt diesen Ausdruck dann in der Regel auch einfach als $x*y*z$, weil die Reihenfolge der Klammerung ja egal ist.

(b) (Existenz eines neutralen Elements) Es gibt ein $e \in G$, für das $e*x = x*e = x$ für alle $x \in G$ gilt. Man nennt ein solches $e$ ein **neutrales Element**, und verlangt davon zusätzlich:

(c) (Existenz von inversen Elementen) Für alle $x \in G$ gibt es ein $x' \in G$ mit $x'*x = x*x' = e$. Man nennt $x'$ dann ein **inverses Element** zu $x$.

Wir bezeichnen eine solche Gruppe mit $(G,*)$. Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, welche Verknüpfung gemeint ist, schreiben wir oft auch einfach nur $G$ für die Gruppe.

Gilt zusätzlich zu den obigen Eigenschaften noch

(d) (**Kommutativität**) $x*y = y*x$ für alle $x,y \in G$,

so heißt $(G,*)$ eine **kommutative** oder **abelsche Gruppe**.

**Bemerkung 3.2.** Manchmal wird in der Definition einer Gruppe in Teil (b) lediglich $e*x = x$ und in Teil (c) lediglich $x'*x = e$ gefordert (man spricht dann auch von einem **linksneutralen** bzw. **linksinversen** Element). Man kann jedoch unter Verwendung der übrigen Gruppenaxiome zeigen, dass in diesem Fall automatisch auch $x*e = x$ und $x*x' = e$ gelten muss, also dass linksneutrale Elemente bereits immer neutrale und linksinverse Elemente immer inverse Elemente sind [G, Satz 1.7]. Die beiden Varianten der Definition einer Gruppe stimmen also letztlich überein.

**Beispiel 3.3.**

(a) $(\mathbb{R},+)$ ist eine abelsche Gruppe, denn die Addition ist (wie wir axiomatisch voraussetzen werden) eine Verknüpfung auf $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

- $(x+y)+z = x+(y+z)$ für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$;
- $0 \in \mathbb{R}$ ist ein neutrales Element, denn $0+x = x+0 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$;
- zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ist $-x \in \mathbb{R}$ ein inverses Element, denn $(-x)+x = x+(-x) = 0$;

- $x+y=y+x$ für alle $x,y\in\mathbb{R}$.

Auf die gleiche Art sind auch $(\mathbb{Q},+)$ und $(\mathbb{Z},+)$ abelsche Gruppen, jedoch nicht $(\mathbb{N},+)$: Hier existiert zwar noch ein neutrales Element 0, aber die Zahl $1\in\mathbb{N}$ hat kein Inverses mehr, denn es gibt kein $x\in\mathbb{N}$ mit $x+1=0$.

(b) $(\mathbb{R},\cdot)$ ist keine Gruppe: Die Multiplikation ist zwar assoziativ und kommutativ und hat das neutrale Element 1, aber die Zahl 0 hat kein Inverses – denn dies müsste ja eine Zahl $x\in\mathbb{R}$ sein mit $x\cdot 0=1$.

Nimmt man jedoch die 0 aus $\mathbb{R}$ heraus, so erhält man mit $(\mathbb{R}\backslash\{0\},\cdot)$ wieder eine abelsche Gruppe, bei der das neutrale Element 1 und das zu einem $x$ inverse Element $\frac{1}{x}$ ist. Genauso funktioniert dies für $(\mathbb{Q}\backslash\{0\},\cdot)$, aber z. B. nicht für $(\mathbb{Z}\backslash\{0\},\cdot)$: Hier gibt es zwar noch ein neutrales Element 1, aber die Zahl $2\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ hat kein Inverses mehr, denn es gibt kein $x\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ mit $2\cdot x=1$.

(c) Hier ist noch ein Beispiel von einem ganz anderen Typ: Es sei $M$ eine beliebige Menge und

$$G=\{f : f \text{ ist eine bijektive Abbildung von } M \text{ nach } M\}.$$

Da die Verkettung bijektiver Abbildungen nach Aufgabe 2.25 wieder bijektiv ist, definiert sie eine Verknüpfung auf $G$. In der Tat wird $G$ damit zu einer Gruppe, denn die Verkettung ist assoziativ nach Lemma 2.19, die Identität $\mathrm{id}_M$ ist ein neutrales Element, und zu einem $f\in G$ ist die Umkehrabbildung $f^{-1}$ aus Definition 2.20 ein inverses Element: Sie ist nach Aufgabe 2.25 selbst wieder bijektiv (also in $G$) und erfüllt $f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=\mathrm{id}_M$ nach Bemerkung 2.21. Im Allgemeinen ist diese Gruppe jedoch nicht kommutativ.

Wir wollen nun ein paar einfache Eigenschaften von Gruppen beweisen, u. a. dass die in Definition 3.1 geforderten neutralen und inversen Elemente eindeutig sind und wir daher in Zukunft auch von *dem* neutralen und *dem* zu einem gegebenen Element inversen Element sprechen können.

**Lemma 3.4** (Eigenschaften von Gruppen)**.** *Es seien $(G,*)$ eine Gruppe und $x,y\in G$.*

(a) *Es gibt genau ein neutrales Element (wie in Definition 3.1 (b)).*

(b) *Es gibt genau ein inverses Element zu $x$ (wie in Definition 3.1 (c)).*

(c) *Sind $x'$ und $y'$ die inversen Elemente zu $x$ bzw. $y$, so ist $y'*x'$ das inverse Element zu $x*y$.*

(d) *Ist $x'$ das inverse Element zu $x$, so ist $x$ das inverse Element zu $x'$ („das Inverse des Inversen ist wieder das Ausgangselement“).*

*Beweis.*

(a) Sind $e$ und $\tilde{e}$ neutrale Elemente, so folgt

$$\begin{aligned} e &= \tilde{e}*e && (\text{denn } \tilde{e} \text{ ist ein neutrales Element})\\ &= \tilde{e} && (\text{denn } e \text{ ist ein neutrales Element}). \end{aligned}$$

(b) Sind $x'$ und $\tilde{x}'$ inverse Elemente zu $x$, so gilt

$$\begin{aligned} x' &= e*x' && (e \text{ neutrales Element})\\ &= (\tilde{x}'*x)*x' && (\tilde{x}' \text{ ist ein inverses Element zu } x)\\ &= \tilde{x}'*(x*x') && (\text{Assoziativität})\\ &= \tilde{x}'*e && (x' \text{ ist ein inverses Element zu } x)\\ &= \tilde{x}' && (e \text{ neutrales Element}). \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$(y'*x')*(x*y)=y'*(x'*x)*y=y'*e*y=y'*y=e$$

und analog auch $(x*y)*(y'*x')=e$. Damit ist $y'*x'$ das inverse Element zu $x*y$.

(d) Die Gleichung $x'*x=x*x'=e$ besagt direkt, dass $x$ das inverse Element zu $x'$ ist. □

Wie wir in Beispiel 3.3 (a) und (b) gesehen haben, erlauben die reellen Zahlen *zwei* grundlegende Gruppenstrukturen: die Addition und (nach Herausnahme der 0) die Multiplikation. Diese beiden Strukturen sind jedoch nicht unabhängig voneinander, da sie durch das Distributivgesetz $(x+y)\cdot z = xz+yz$ für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$ miteinander verbunden sind. Eine derartige Kombination zweier Gruppenstrukturen bezeichnet man als einen Körper.

**Definition 3.5** (Körper)**.** Ein **Körper** ist eine Menge $K$ zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$+\colon K\times K\to K \quad \text{(genannt } \textit{Addition}\text{)} \qquad \text{und} \qquad \cdot\colon K\times K\to K \quad \text{(genannt } \textit{Multiplikation}\text{)},$$

so dass die folgenden Eigenschaften (auch *Körperaxiome* genannt) gelten:

(a) $(K,+)$ ist eine abelsche Gruppe. Wir bezeichnen ihr neutrales Element mit 0 und das zu einem $x \in K$ inverse Element mit $-x$.

(b) $(K\backslash\{0\},\cdot)$ ist ebenfalls eine abelsche Gruppe. Wir bezeichnen ihr neutrales Element mit 1 und das zu einem $x \in K\backslash\{0\}$ inverse Element mit $x^{-1}$.

(c) (**Distributivität**) Für alle $x,y,z \in K$ gilt $(x+y)\cdot z = (x\cdot z)+(y\cdot z)$.

Mit dieser Definition wollen wir nun also axiomatisch voraussetzen:

$$\boxed{\mathbb{R} \text{ ist ein Körper.}}$$

Um Verwirrungen zu vermeiden, werden wir die beiden Verknüpfungen in einem Körper immer mit den Symbolen „+“ und „$\cdot$“ bezeichnen. Ebenso werden wir (wie ihr es natürlich gewohnt seid) vereinbaren, dass man den Punkt bei der Multiplikation auch weglassen darf und bei ungeklammerten Ausdrücken zuerst die Multiplikationen und dann die Additionen ausgeführt werden, so dass man also z. B. die Distributivität aus Definition 3.5 (c) auch als $(x+y)z = xz+yz$ schreiben kann.

Es ist jedoch wichtig zu verstehen, dass wir ab jetzt *nicht* mehr voraussetzen werden, dass Addition und Multiplikation in einem Körper wie z. B. $\mathbb{R}$ genau die Verknüpfungen sind, „an die man als Erstes denken würde“ – was auch immer das heißen mag. Stattdessen sind es einfach irgendwelche zwei Verknüpfungen, die die Eigenschaften aus Definition 3.5 haben. Unsere zukünftigen Beweise über Körper wie z. B. $\mathbb{R}$ müssen wir also ausschließlich auf diesen Eigenschaften aufbauen.

Dieser axiomatische Zugang hat zwei Vorteile:

- Zum einen wissen wir dadurch genau, welche Eigenschaften der Grundrechenarten auf den reellen Zahlen wir eigentlich voraussetzen. Es sollte schließlich klar sein, dass wir eine *exakte* Mathematik nicht auf einer *anschaulichen* Vorstellung von $\mathbb{R}$ aufbauen können. Solltet ihr euch also z. B. später einmal dafür interessieren, wie man die Existenz der reellen Zahlen beweisen kann, so wüsstet ihr dann genau, was eigentlich zu beweisen ist: nämlich die Existenz einer Menge mit genau den Eigenschaften, die wir jetzt axiomatisch voraussetzen.
- Zum anderen werdet ihr im Laufe eures Studiums noch viele weitere Körper kennenlernen, z. B. in Kapitel 6 den sehr wichtigen Körper der komplexen Zahlen. Alle Resultate, die nur auf den Körperaxiomen aufbauen, übertragen sich dann also sofort auf diese neuen Fälle, ohne dass man sich darüber noch einmal neu Gedanken machen muss.

**Beispiel 3.6.**

(a) Neben $\mathbb{R}$ ist auch $\mathbb{Q}$ (mit den gleichen Verknüpfungen wie auf $\mathbb{R}$) ein Körper. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden mit diesen Verknüpfungen jedoch keinen Körper, da $(\mathbb{Z}\backslash\{0\},\cdot)$ nach Beispiel 3.3 (b) keine Gruppe ist. Ebenso ist $\mathbb{N}$ mit diesen Verknüpfungen kein Körper, da hier nach Beispiel 3.3 (a) bereits die Addition keine Gruppenstruktur liefert.

(b) Hier ist ein Beispiel für einen Körper, der sich ganz anders verhält als $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$: Wir definieren auf der Menge $K = \{g,u\}$ zwei Verknüpfungen durch die folgenden Tabellen.

| $+$ | $g$ | $u$ |
|---|---|---|
| $g$ | $g$ | $u$ |
| $u$ | $u$ | $g$ |

und

| $\cdot$ | $g$ | $u$ |
|---|---|---|
| $g$ | $g$ | $g$ |
| $u$ | $g$ | $u$ |

Dabei sind $g$ und $u$ einfach nur Namen für die beiden Elemente von $K$, die für „gerade“ und „ungerade“ stehen sollen und damit auch die Verknüpfungstafeln erklären: Wir haben z. B. $g+u$ als $u$ definiert, weil die Addition einer geraden und einer ungeraden Zahl eine ungerade Zahl ergibt.

Man kann zeigen, dass $K$ mit diesen beiden Verknüpfungen einen Körper bildet. Er wird in der Literatur mit $\mathbb{Z}_2$ bezeichnet, da seine Elemente die Reste ganzer Zahlen bei Division durch 2 beschreiben. Um zu beweisen, dass $\mathbb{Z}_2$ ein Körper ist, könnte man z. B. einfach die geforderten Eigenschaften für alle Elemente – es gibt ja nur zwei – explizit nachprüfen. In der Vorlesung „Algebraische Strukturen“ zeigt man allerdings, dass man die Körperaxiome hier auch viel eleganter direkt aus den Eigenschaften von $\mathbb{Z}$ folgern kann [G, Satz 7.10]. Wir wollen uns hier damit begnügen, die neutralen und inversen Elemente anzugeben:

- Das additive neutrale Element ist $g$, wie man leicht aus der Tabelle abliest. Im Sinne der Notationen von Definition 3.5 ist also $0 = g$. Wegen $g+g = u+u = g = 0$ sind die additiven inversen Elemente $-g = g$ und $-u = u$. Dies stimmt natürlich auch mit der Interpretation als gerade und ungerade Zahlen überein, da das Negative von einer geraden bzw. ungeraden Zahl ebenfalls wieder gerade bzw. ungerade ist.
- Das multiplikative neutrale Element in $\mathbb{Z}_2\backslash\{0\}$ ist $u$ – in der Tat ist es ja auch das einzige Element in $\mathbb{Z}_2\backslash\{0\}$. Gemäß der Notation von Definition 3.5 ist also $1 = u$.

Beachte, dass in diesem Körper $\mathbb{Z}_2$ die Gleichung $1+1 = u+u = g = 0$ gilt. Die Körperaxiome lassen es also zu, dass man bei fortgesetzter Addition der 1 irgendwann wieder zur 0 zurück kommt. Wir werden in dieser Vorlesung nicht viel mit dem Körper $\mathbb{Z}_2$ zu tun haben – wir haben ihn hier nur als Beispiel dafür angegeben, dass die Körperaxiome noch weit davon entfernt sind, die rationalen oder reellen Zahlen eindeutig zu charakterisieren.

Anschaulich kann man die Körperaxiome so interpretieren, dass ein Körper eine Menge ist, auf der „die vier Grundrechenarten existieren und die erwarteten Eigenschaften haben“. Wir wollen nun noch ein paar weitere dieser erwarteten Eigenschaften zeigen, die bereits aus den Körperaxiomen folgen und die wir dann beim Rechnen z. B. in $\mathbb{R}$ natürlich ständig benutzen werden.

**Bemerkung 3.7.** Es seien $K$ ein Körper und $x, y \in K$.

(a) Wenden wir Lemma 3.4 (c) und (d) auf die (kommutative) Addition und Multiplikation an, so sehen wir sofort, dass

$$-(x+y) = (-x)+(-y) \quad \text{und} \quad -(-x) = x$$

sowie für $x, y \neq 0$

$$(xy)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1} \quad \text{und} \quad (x^{-1})^{-1} = x.$$

(b) Etwas versteckt in Definition 3.5 steht in Teil (b) u. a. die Aussage, dass die Multiplikation überhaupt eine Verknüpfung auf $K\backslash\{0\}$ ist, also dass für $x, y \in K\backslash\{0\}$ auch $xy \in K\backslash\{0\}$ gilt. Äquivalent dazu bedeutet das:

$$\text{Ist } xy = 0, \text{ so gilt } x = 0 \text{ oder } y = 0.$$

**Lemma 3.8** (Eigenschaften von Körpern)**.** *In jedem Körper $K$ gilt für alle $x, y \in K$:*

(a) $0 \cdot x = 0$.

(b) $x \cdot (-y) = -(xy)$.

(c) *Für $x \neq 0$ ist* $-(x^{-1}) = (-x)^{-1}$.

*Beweis.*

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} 0 \cdot x &= (0+0) \cdot x && \text{(0 ist additives neutrales Element)} \\ &= 0 \cdot x + 0 \cdot x, && \text{(Distributivität)} \end{aligned}$$

woraus durch Addition des additiven Inversen von $0 \cdot x$ auf beiden Seiten die gewünschte Gleichung $0 = 0 \cdot x$ folgt.

(b) Es ist

$$\begin{aligned} x \cdot (-y) + xy &= x \cdot (-y + y) && \text{(Distributivität)} \\ &= x \cdot 0 && (-y \text{ ist additives Inverses zu } y) \\ &= 0 && \text{(nach (a))}, \end{aligned}$$

daher ist $x \cdot (-y)$ das additive Inverse zu $xy$, d. h. es gilt $x \cdot (-y) = -(xy)$.

(c) Doppeltes Anwenden von (b), einmal für den linken und einmal für den rechten Faktor, ergibt

$$(-(x^{-1})) \cdot (-x) = -(x^{-1} \cdot (-x)) = -(-(x^{-1} \cdot x)) = -(-1) \overset{3.7\,(a)}{=} 1.$$

Also ist $-(x^{-1})$ das multiplikative Inverse zu $-x$, d. h. es ist $-(x^{-1}) = (-x)^{-1}$. □

**Notation 3.9.** In einem Körper $K$ verwendet man üblicherweise die folgenden Notationen, von denen euch die meisten sicher bekannt sein werden:

(a) Für $x, y \in K$ setzt man $x - y := x + (-y)$. Ist $y \neq 0$, so setzt man $\frac{x}{y} := x \cdot y^{-1}$.

(b) Für $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert man die $n$-te **Potenz** von $x$ als

$$x^n := \underbrace{x \cdot \cdots \cdot x}_{n\text{-mal}},$$

wobei dieser Ausdruck für $n = 0$ als $x^0 := 1$ zu verstehen ist. Insbesondere legen wir also auch $0^0 := 1$ fest. Beachte, dass aus dieser Definition (und der Kommutativität der Multiplikation) unmittelbar die Potenzrechenregeln

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n} \quad \text{und} \quad (xy)^n = x^n \cdot y^n$$

für alle $x, y \in K$ folgen. Ist $x \neq 0$, so definiert man zusätzlich Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten durch $x^{-n} := (x^{-1})^n$.

Beachte, dass auch in einem beliebigen Körper $K$ die Exponenten einer Potenz stets *ganze Zahlen* sind und keine Elemente aus $K$. Eine Potenz $x^y$ für $x, y \in K$ lässt sich im Allgemeinen nicht definieren (auch wenn dies für $K = \mathbb{R}$ in vielen Fällen möglich ist, siehe Definition 9.7).

(c) Manchmal möchte man mehrere Elemente $x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ in einem Körper (oder allgemeiner in einer additiv geschriebenen abelschen Gruppe) aufsummieren, die durch eine ganzzahlige Laufvariable indiziert werden, die von einem $m \in \mathbb{Z}$ bis zu einem $n \in \mathbb{Z}$ (mit $n \geq m$) läuft. Man schreibt dies dann als

$$\sum_{i=m}^{n} x_i := x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_n$$

(also mit einem großen griechischen Sigma, das an das Wort „Summe“ erinnern soll). So steht z. B.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \tag{$*$}$$

für die Summe aller Quadratzahlen bis $n^2$. Natürlich ist der Name der Laufvariablen dabei egal, und der Ausdruck $(*)$ hängt nicht von einem $i$ ab (wie man auf der rechten Seite ja auch sieht). Außerdem kann man die Laufvariable verschieben, ohne den eigentlichen Ausdruck zu ändern: Setzt man z. B. $i = j + 1$, also $j = i - 1$, in der obigen Summe $(*)$, so läuft $j$ dort von 0 bis $n - 1$, wenn $i$ von 1 bis $n$ läuft, und wir können dieselbe Summe auch schreiben als

$$\sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

Natürlich kann man diesen Ausdruck nun auch wieder genauso gut mit dem Buchstaben $i$ statt $j$ als $\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^2$ schreiben, oder den Index um mehr als 1 in die eine oder andere Richtung verschieben. Also:

> Der Wert einer Summe ändert sich nicht, wenn man zur Laufvariablen im zu summierenden Ausdruck eine Konstante addiert, und dafür von der Ober- und Untergrenze der Summe diese Konstante abzieht.

Wir sagen in diesem Fall, dass die neue Darstellung der Summe durch eine **Indexverschiebung** (im Beispiel oben $i \mapsto i+1$) aus der alten hervorgeht.

04

Analog schreibt man

$$\prod_{i=m}^{n} x_i := x_m \cdot x_{m+1} \cdot x_{m+2} \cdot \cdots \cdot x_n$$

(mit einem großen griechischen Pi für das Produkt), wenn man die Körperelemente multiplizieren statt addieren möchte. Ist schließlich die Obergrenze einer Summe oder eines Produkts kleiner als die Untergrenze (man spricht dann von der **leeren Summe** bzw. dem **leeren Produkt**), so definiert man dies als

$$\sum_{i=m}^{n} x_i := 0 \quad \text{und} \quad \prod_{i=m}^{n} x_i := 1 \quad \text{für } n < m,$$

also als das additive bzw. multiplikative neutrale Element.

(d) Ist $n$ eine natürliche Zahl, so fasst man diese oft auch als das Element

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1+\cdots+1}_{n\text{-mal}}$$

von $K$ auf. Im Fall $K = \mathbb{R}$ ist dies dann einfach die natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ und liefert somit keine neue Notation, aber z. B. in $K = \mathbb{Z}_2$ aus Beispiel 3.6 (b) ist $2 = 1+1 = 0$.

**Aufgabe 3.10.** Zeige, dass in jedem Körper $K$ die üblichen Rechenregeln

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{xw+yz}{yw} \quad \text{und} \quad \frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{xz}{yw}$$

für Brüche gelten, wobei $x, y, z, w \in K$ mit $y, w \neq 0$.

**Aufgabe 3.11.** Es sei $a \in \mathbb{R}$ fest gegeben. Wir definieren auf $\mathbb{R}^2$ eine „Addition“ und „Multiplikation“ durch

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2) := (x_1+y_1, x_2+y_2) \quad \text{und} \quad (x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) := (x_1y_1 + ax_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Man prüft leicht durch explizite Rechnung nach, dass $\mathbb{R}^2$ mit dieser Addition eine kommutative Gruppe mit neutralem Element $(0,0)$ ist, dass auch die Multiplikation kommutativ ist, und dass diese beiden Operationen das Distributivgesetz erfüllen – ihr solltet euch kurz überlegen, warum das so ist, braucht das aber nicht aufzuschreiben. Man zeige stattdessen:

(a) Die Multiplikation ist assoziativ und besitzt ein neutrales Element.

(b) Im Fall $a = -1$ ist $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ein Körper, im Fall $a = 1$ jedoch nicht.

(Für $a = -1$ ist $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ der sogenannte Körper der komplexen Zahlen, den wir in Kapitel 6 noch genau untersuchen werden.)

**Aufgabe 3.12.** Zu einem Körper $K$ und einer Menge $D$ mit $|D| \geq 2$ sei

$$V = \{f : f \text{ ist eine Abbildung von } D \text{ nach } K\}$$

die Menge aller reellwertigen Funktionen auf $D$. Für $f, g \in V$ definieren wir die Addition $f+g$ und Multiplikation $f \cdot g$ dieser Funktionen punktweise durch

$$f+g\colon D \to K,\ x \mapsto f(x)+g(x) \quad \text{und} \quad f\cdot g\colon D \to K,\ x \mapsto f(x)\cdot g(x).$$

(a) Zeige, dass $V$ mit dieser Addition eine abelsche Gruppe ist.

(b) Ist $V$ mit dieser Addition und Multiplikation ein Körper?

## 3.B Vollständige Induktion

Häufig möchte man in der Mathematik Aussagen beweisen, die von einer natürlichen Zahl abhängen – z. B. bei Formeln, die Summen oder Produkte wie in Notation 3.9 mit variablen Unter- oder Obergrenzen beinhalten. Die einfachste und bekannteste solcher Aussagen ist vermutlich die folgende Formel für die Summe aller natürlichen Zahlen bis zu einer gegebenen Obergrenze.

**Satz 3.13** (**Summenformel von Gauß**). *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} k \;=\; \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Beispiel 3.14.** Für $n = 5$ ist z. B.

$$\sum_{k=1}^{5} k \;=\; 1+2+3+4+5 = 15 = \frac{5\cdot 6}{2}.$$

Um derartige Aussagen zu beweisen, ist oft das Beweisverfahren der **(vollständigen) Induktion** nützlich, das wir jetzt einführen wollen.

Angenommen, wir wollen (wie z. B. in Satz 3.13) eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beweisen. Dann können wir dies tun, indem wir die folgenden beiden Dinge zeigen:

(a) (**Induktionsanfang**) Die Aussage $A(0)$ ist wahr.

(b) (**Induktionsschritt**) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$, d. h. *wenn* die Aussage $A(n)$ für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ gilt (die „Induktionsannahme“ bzw. „Induktionsvoraussetzung“), *dann* gilt auch die Aussage $A(n+1)$ (der „Induktionsschluss“).

Haben wir diese beiden Dinge gezeigt, so folgt daraus nämlich die Gültigkeit von $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$: Die Aussage $A(0)$ haben wir mit dem Induktionsanfang gezeigt, und durch fortgesetztes Anwenden des Induktionsschritts $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für $n = 0, 1, 2, \dots$ erhalten wir dann auch

$$A(0) \Rightarrow A(1) \Rightarrow A(2) \Rightarrow A(3) \Rightarrow \cdots,$$

also die Gültigkeit von $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Derartige Induktionsbeweise sind immer dann sinnvoll, wenn die Aussagen $A(n)$ und $A(n+1)$ „ähnlich genug“ sind, so dass es beim Beweis von $A(n+1)$ hilft, die Gültigkeit von $A(n)$ voraussetzen zu dürfen.

Mit diesem Verfahren können wir nun die Summenformel aus Satz 3.13 beweisen:

*Beweis von Satz 3.13.* Wir zeigen die Formel mit Induktion über $n$.

*Induktionsanfang ($n = 0$):* Für $n = 0$ stimmen die beiden Seiten der zu zeigenden Gleichung überein, denn es ist

$$\sum_{k=1}^{0} k \;=\; 0 \;=\; \frac{0\cdot(0+1)}{2}.$$

*Induktionsschritt ($n \to n+1$):* Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass die zu beweisende Formel für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ richtig ist, d. h. dass

$$\sum_{k=1}^{n} k \;=\; \frac{n(n+1)}{2}$$

gilt. (Beachte, dass wir diese Gleichung nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ voraussetzen – dies wäre ja schon die gesamte zu zeigende Aussage!) Wir müssen zeigen, dass die entsprechende Gleichung dann auch für $n+1$ gilt, also dass

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \;=\; \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Dies ergibt sich nun leicht aus der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) && \text{(Abspalten des letzten Summanden für } k = n+1)\\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)}\\ &= (n+1)\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

Damit ist der Satz mit vollständiger Induktion bewiesen. □

**Bemerkung 3.15.** Offensichtlich erlaubt das Beweisverfahren der vollständigen Induktion die folgenden Abwandlungen:

(a) Im Induktionsschritt kann man, wenn es hilfreich ist, beim Beweis der Aussage $A(n+1)$ nicht nur die direkt vorangegangene Aussage $A(n)$, sondern *alle bereits gezeigten Aussagen* $A(0), A(1), \dots, A(n)$ voraussetzen.

(b) Möchte man die Aussage $A(n)$ nicht für alle $n \in \mathbb{N}$, sondern für alle $n \in \mathbb{Z}$ ab einem gewissen Startwert $n_0 \in \mathbb{Z}$ zeigen, so kann man als Induktionsanfang die Aussage $A(n_0)$ zeigen, und im Induktionsschritt dann die Folgerung $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für alle $n \geq n_0$.

**Aufgabe 3.16.** Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{(a)}\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}, \qquad \text{(b)}\ \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n+k}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}.$$

**Aufgabe 3.17.** Zeige mit vollständiger Induktion: Ist $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $a + \frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $a^n + \frac{1}{a^n} \in \mathbb{Z}$.

## 3.C Polynomfunktionen

Als erste Anwendung der Körpereigenschaften wollen wir zum Abschluss dieses Kapitels die euch sicher schon aus der Schule bekannten Polynomfunktionen behandeln – also die Funktionen, die sich aus den grundlegenden Körperoperationen Addition und Multiplikation bilden lassen.

**Definition 3.18** (Polynomfunktionen und Nullstellen)**.** Es seien $D$ eine Teilmenge eines Körpers $K$ und $f\colon D \to K$ eine Funktion.

(a) Ist $f$ von der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{für alle } x \in D$$

mit gewissen $a_0, \dots, a_n \in K$, so sagt man, dass $f$ eine **Polynomfunktion** mit **Koeffizienten** $a_0, \dots, a_n$ ist. Ist $n$ dabei so gewählt, dass der erste Koeffizient $a_n$ ungleich Null ist, so heißt $f$ eine Polynomfunktion vom **Grad** $n$ und mit **Leitkoeffizient** $a_n$. Ist der Leitkoeffizient 1, so heißt $f$ eine **normierte** Polynomfunktion.

Sind in der obigen Darstellung alle Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$ gleich 0 (und ist $f$ damit die Nullfunktion), so nennen wir $f$ formal eine Polynomfunktion vom Grad $-\infty$. In diesem Fall hat $f$ keinen Leitkoeffizienten.

(b) Ist $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = 0$, so nennt man $x_0$ eine **Nullstelle** von $f$.

Das Besondere an Nullstellen von Polynomfunktionen ist, dass man sie wie im folgenden Satz als Linearfaktoren abspalten kann.

**Satz 3.19** (Abspalten von Nullstellen in Polynomfunktionen)**.** *Es seien $K$ ein Körper, $D \subset K$ und $f\colon D \to K$ eine Polynomfunktion vom Grad $n \in \mathbb{N}$.*

(a) *Ist $x_0 \in D$ eine Nullstelle von $f$, so gibt es eine Polynomfunktion $g\colon D \to K$ vom Grad $n-1$ mit $f(x) = (x-x_0)\,g(x)$ für alle $x \in D$ (d. h. man kann „den Linearfaktor $x-x_0$ abspalten“).*

(b) *Die Funktion $f$ hat höchstens $n$ Nullstellen.*

*Beweis.* Wir zeigen die beiden Aussagen mit Induktion über $n$. Der Beweis von (a) ist dabei konstruktiv, d. h. er gibt auch ein Verfahren an, wie $g$ berechnet werden kann (siehe Beispiel 3.20).

Der Induktionsanfang für $n = 0$ ist trivial, denn $f$ ist dann eine Konstante ungleich 0 und hat somit keine Nullstellen. Für den Induktionsschluss nehmen wir an, dass die Aussagen des Satzes bis zu einem gegebenen $n$ gelten, und betrachten $f\colon D \to K$, $x \mapsto a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_1x + a_0$ vom Grad $n+1$, also mit $a_{n+1} \neq 0$.

(a) Wir definieren eine Polynomfunktion $\tilde{f}\colon D \to K$ durch

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &:= f(x) - a_{n+1}x^n(x-x_0)\\ &= a_{n+1}x_0x^n + a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0\end{aligned}$$

für alle $x$. Ist $\tilde{f}$ die Nullfunktion, so sind wir fertig, da dann ja $f(x) = a_{n+1}x^n(x-x_0)$ für alle $x \in D$ gilt. Andernfalls ist $\tilde{f}$ nach Konstruktion eine Polynomfunktion vom Grad höchstens $n$ (der $x^{n+1}$-Term hebt sich ja gerade heraus), die immer noch die Nullstelle $x_0$ hat. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann also eine Polynomfunktion $\tilde{g}\colon D \to K$ vom Grad höchstens $n-1$ mit $\tilde{f}(x) = (x-x_0)\,\tilde{g}(x)$ für alle $x \in D$, und somit ist

$$f(x) = a_{n+1}x^n(x-x_0) + \tilde{f}(x) = (x-x_0)\cdot\underbrace{(a_{n+1}x^n + \tilde{g}(x))}_{=:g(x)}$$

für alle $x \in D$, wobei $g$ offensichtlich vom Grad $n$ ist.

(b) Hat $f$ keine Nullstelle, so sind wir fertig. Andernfalls wählen wir eine Nullstelle $x_0$ von $f$ und schreiben $f(x) = (x-x_0)\,g(x)$ für alle $x \in D$ wie in (a) mit einer Polynomfunktion $g$ vom Grad $n$. Nach Induktionsvoraussetzung hat $g$ höchstens $n$ Nullstellen, und nach Bemerkung 3.7 (b) sind die Nullstellen von $f$ genau $x_0$ zusammen mit den Nullstellen von $g$. Also hat $f$ höchstens $n+1$ Nullstellen. Damit ist die Behauptung mit Induktion bewiesen. □

**Beispiel 3.20** (Polynomdivision)**.** Das Verfahren aus dem Beweis von Satz 3.19 (a) wird als *Polynomdivision* [G, Satz 10.19] bezeichnet: Man subtrahiert fortlaufend geeignete Vielfache von $x-x_0$ von $f$, so dass sich der jeweils höchste Term von $f$ weghebt, und sammelt die dabei verwendeten Faktoren in $g$. Das folgende Schema, das genauso aussieht wie eine normale schriftliche Division, verdeutlicht dieses Verfahren am Beispiel der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 3x - 4$ mit Nullstelle $x_0 = 1$, die wir als $f(x) = (x-1)\,g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ schreiben wollen. Das Ergebnis ist in diesem Fall $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+4$.

$$\begin{array}{lrcl}
f(x) \longrightarrow & (x^2+3x-4) & : (x-1) = & x+4 \longleftarrow g(x)\\
& -\,(x^2-\ x) & \longleftarrow \cdot x & \\
\hline
\tilde{f}(x) \longrightarrow & 4x-4 & & \\
& -\quad (4x-4) & \longleftarrow \cdot 4 & \\
\hline
& 0 & &
\end{array}$$

**Bemerkung 3.21.** Satz 3.19 liefert uns zwar die neue Funktion nach dem Abspalten des Linearfaktors, er sagt uns hingegen nicht, wie wir überhaupt erst einmal eine Nullstelle von $f$ finden können, oder ob es überhaupt Nullstellen gibt (die reelle Polynomfunktion $f(x) = x^2 + 1$ hat ja z. B. keine Nullstellen). In der Tat gibt es im Allgemeinen kein Verfahren, wie man Nullstellen von Polynomfunktionen exakt berechnen kann! Genauer gesagt gilt:

- Für Polynomfunktionen vom Grad höchstens 4 gibt es explizite Verfahren zur exakten Bestimmung der Nullstellen (für Grad 1 ist das klar, für Grad 2 gibt es die bekannte „$p$-$q$-Formel“ bzw. die quadratische Ergänzung, und für Grad 3 bzw. 4 sind die Formeln so lang, dass man im Allgemeinen nicht mehr mit ihnen arbeiten möchte).

- Für Polynomfunktionen vom Grad größer als 4 kann man beweisen(!), dass es keine derartigen Verfahren zur exakten Bestimmung der Nullstellen geben kann (das beweist man z. B. in der Vorlesung „Einführung in die Algebra“, die ihr im nächsten Studienjahr hören könnt). Aber:
- Für reelle Polynomfunktionen beliebigen Grades gibt es zumindest numerische Verfahren, die die Nullstellen (mit beliebiger Genauigkeit) näherungsweise bestimmen können.

Zum Schluss wollen wir nun noch zwei wichtige Konzepte für Polynomfunktionen untersuchen, die ihr beide im reellen Fall vielleicht schon aus der Schule kennt: den sogenannten Koeffizientenvergleich (also dass eine Polynomfunktion eindeutig ihre Koeffizienten bestimmt) und die Vielfachheit von Nullstellen. Es stellt sich jedoch heraus, dass man hierfür im allgemeinen Fall die Voraussetzung benötigt, dass die Definitionsmenge der betrachteten Funktionen unendlich viele Elemente besitzt.

**Lemma 3.22** (**Koeffizientenvergleich**). *Es seien $K$ ein Körper, $D \subset K$ mit $|D| = \infty$, und $f\colon D \to K$ eine Polynomfunktion mit zwei Darstellungen*

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 \quad \text{für alle } x \in D$$

*für gewisse $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in K$. (Beachte, dass wir dabei in beiden Darstellungen den gleichen höchsten Exponenten $n$ wählen können, da wir nicht $a_n \neq 0$ und $b_n \neq 0$ vorausgesetzt haben.)*

*Dann gilt bereits $a_i = b_i$ für alle $i = 0, \dots, n$. Es ist also nicht möglich, „eine Polynomfunktion auf zwei verschiedene Arten hinzuschreiben“.*

*Beweis.* Nach Voraussetzung ist die Polynomfunktion

$$D \to K,\ x \mapsto (a_n - b_n) x^n + \cdots + (a_1 - b_1) x + (a_0 - b_0) = f(x) - f(x) = 0$$

die Nullfunktion auf $D$. Da sie damit wegen $|D| = \infty$ unendlich viele Nullstellen besitzt, muss sie nach Satz 3.19 (b) vom Grad $-\infty$ sein. Also sind alle Koeffizienten dieser Polynomfunktion gleich 0, d. h. es ist $a_i = b_i$ für alle $i = 0, \dots, n$. □

**Bemerkung und Notation 3.23** (Polynome). Die Voraussetzung $|D| = \infty$ in Lemma 3.22 ist wirklich notwendig: So sind für $D = K = \mathbb{Z}_2$ wie in Beispiel 3.6 (b) z. B. $x \mapsto x$ und $x \mapsto x^2$ dieselbe Funktion, da sie beide 0 auf 0 und 1 auf 1 abbilden und in $\mathbb{Z}_2$ keine weiteren Elemente existieren.

In der Literatur bezeichnet man einen formalen Ausdruck der Form $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ mit $a_0, \dots, a_n \in K$ als ein **Polynom** über $K$ [G, Kapitel 9]. Jedes solche Polynom bestimmt natürlich eine Polynomfunktion von jeder Teilmenge $D$ von $K$ nach $K$, allerdings können verschiedene Polynome wie im eben angegebenen Beispiel durchaus dieselbe Polynomfunktion definieren: Über $\mathbb{Z}_2$ sind $x$ und $x^2$ verschiedene Polynome, sie bestimmen aber dieselbe Polynomfunktion.

Mit dieser Notation ist die Aussage von Lemma 3.22 also, dass Polynome und Polynomfunktionen im Fall von unendlichen Definitionsmengen dasselbe sind. Da wir Polynomfunktionen im Folgenden in der Regel nur in diesem Fall unendlicher Definitionsmengen benötigen, werden wir die Begriffe Polynom und Polynomfunktion oft synonym verwenden. Wegen der Eindeutigkeit der Koeffizienten sind dann auch der Grad (und der Leitkoeffizient) einer Polynomfunktion $f$ wie in Definition 3.18 (a) eindeutig bestimmt. Wir können daher eine Bezeichnung dafür einführen:

**Definition 3.24** (Grad eines Polynoms). Wir bezeichnen den **Grad** einer Polynomfunktion $f$ (mit unendlicher Definitionsmenge) mit $\deg f \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ (vom englischen Wort „degree“).

In den Fällen $\deg f = 1$ bzw. $\deg f = 2$ nennt man $f$ ein **lineares** bzw. **quadratisches Polynom**.

**Satz und Definition 3.25** (Vielfachheit von Nullstellen). *Es seien $K$ ein Körper, $D \subset K$ mit $|D| = \infty$ und $f\colon D \to K$ eine Polynomfunktion, die nicht die Nullfunktion ist. Dann lässt sich $f$ (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig als*

$$f(x) = g(x) \cdot (x - x_1)^{a_1} \cdot \cdots \cdot (x - x_k)^{a_k} \quad \text{für alle } x \in D$$

*schreiben, wobei $x_1, \dots, x_k \in D$ die verschiedenen Nullstellen von $f$ sind, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt, und $g$ ein Polynom ohne Nullstellen in $D$ ist. In dieser Darstellung nennt man $a_i$ für $i = 1, \dots, k$ die*

***Vielfachheit** der Nullstelle $x_i$ von $f$ (in der Literatur sind auch die Bezeichnungen **Ordnung** und **Multiplizität** der Nullstelle üblich).*

*Beweis.* Die Existenz einer solchen Darstellung ergibt sich sofort durch fortgesetztes Abspalten von Nullstellen gemäß Satz 3.19 (a). Wir zeigen nun die Eindeutigkeit mit Induktion über den Grad $n := \deg f$ des Polynoms. Dabei ist der Induktionsanfang für $n = 0$ trivial, denn dann hat $f$ keine Nullstellen, und es ist zwangsläufig $k = 0$ und $g = f$.

Für den Induktionsschritt $n \to n+1$ bemerken wir zuerst, dass $x_1, \dots, x_k$ natürlich in jedem Fall als die Nullstellen von $f$ eindeutig bestimmt sind. Wir nehmen also an, dass wir zwei Darstellungen

$$f(x) = g(x) \cdot (x-x_1)^{a_1} \cdot \dots \cdot (x-x_k)^{a_k} = h(x) \cdot (x-x_1)^{b_1} \cdot \dots \cdot (x-x_k)^{b_k}$$

eines Polynoms vom Grad $n+1$ wie in der Behauptung des Satzes haben. Im nullstellenfreien Fall $k = 0$ sind wir natürlich bereits fertig. Andernfalls liefert Division durch $x - x_1$ für alle $x \in D \setminus \{x_1\}$ (wir müssen $x_1$ hier herausnehmen, da wir sonst durch 0 teilen würden!)

$$\begin{aligned} &g(x) \cdot (x-x_1)^{a_1-1} \cdot (x-x_2)^{a_2} \cdot \dots \cdot (x-x_k)^{a_k} \\ &= h(x) \cdot (x-x_1)^{b_1-1} \cdot (x-x_2)^{b_2} \cdot \dots \cdot (x-x_k)^{b_k}. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Wir haben also wieder zwei Darstellungen eines Polynoms auf der immer noch unendlichen Menge $D \setminus \{x_1\}$. Da der Grad dieses Polynoms $n$ ist, müssen diese Darstellungen aber nach der Induktionsvoraussetzung bereits übereinstimmen. Also gilt $g = h$, $a_1 - 1 = b_1 - 1$, $a_2 = b_2$, …, $a_k = b_k$, und damit stimmen auch die beiden ursprünglichen Darstellungen von $f$ überein. □

**Aufgabe 3.26.** Bestimme die Nullstellen des reellen Polynoms $x^4 + 3x^3 - 4x$ und ihre Vielfachheiten.

**Aufgabe 3.27.** Es sei $f$ ein reelles Polynom mit $f(x) = x^3$ für alle $x \in \{1, 2, 3, \dots, 8\}$. Welchen Grad kann $f$ haben?

**Aufgabe 3.28.** Es sei $f$ das reelle Polynom mit $f(x) = (x^2 - x + 1)^{2025}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimme die Summe aller Koeffizienten von $f$.

(b) Bestimme die Summe aller Koeffizienten von geraden Potenzen von $x$ in $f$.

**Aufgabe 3.29.**

(a) Bestimme alle reellen Polynome $f$ mit $x\,f(x+1) = (x-1)\,f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimme alle reellen Polynome $f$ mit $x\,f(x-1) = (x-1)\,f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

05

# Grundlagen der Mathematik 1: Analysis

## 4. Weitere Eigenschaften der reellen Zahlen

Wir haben uns nun das elementare Handwerkszeug für diese Vorlesung erarbeitet und beginnen jetzt mit dem Studium der eindimensionalen Analysis. Wer sich auch (bzw. zurzeit nur) für die lineare Algebra interessiert, kann ab diesem Zeitpunkt auch zusätzlich (bzw. ausschließlich) den Teil „Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra“ in den Kapiteln 13 bis 18 durcharbeiten.

Hier in diesem Kapitel wollen wir zunächst nach den gerade behandelten elementaren Eigenschaften der reellen Zahlen noch ein paar weitere untersuchen, die vor allem in der Analysis nützlich sind. Unter anderem wird sich daraus am Ende dieses Kapitels auch eine vollständige Charakterisierung der reellen Zahlen ergeben.

### 4.A Potenzen in Körpern

Wir beginnen mit zwei weiteren oft vorkommenden Formeln zu Potenzen, die sich allein aus den Eigenschaften aus Abschnitt 3.A herleiten lassen und somit nicht nur in den reellen Zahlen, sondern sogar in beliebigen Körpern gelten. Mit der ersten – der sogenannten (endlichen) geometrischen Reihe – können wir den Wert einer Summe fortlaufender Potenzen eines Körperelements explizit berechnen.

**Satz 4.1** (**Endliche geometrische Reihe**). *Es seien $K$ ein Körper, $q \in K\backslash\{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

*Beweis.* Die Aussage ließe sich leicht mit Induktion über $n$ zeigen. Der folgende sehr einfache alternative Beweis hilft jedoch auch dabei, sich die Formel zu merken: Multiplizieren wir die gesuchte Summe $\sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+\cdots+q^n$ mit $1-q$, so heben sich fast alle Terme weg und wir erhalten sofort das gewünschte Ergebnis: Es ist

$$\begin{aligned}(1+q+q^2+\cdots+q^n)\cdot(1-q) &= 1+q+q^2+\cdots+q^n \\ &\quad -q-q^2-\cdots-q^n-q^{n+1} \\ &= 1-q^{n+1},\end{aligned}$$

und damit für $q \neq 1$ wie behauptet

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$ □

**Beispiel 4.2.** In $\mathbb{R}$ ist z. B.

$$1+2+4+8+16 = \sum_{k=0}^{4} 2^k \overset{4.1}{=} \frac{1-2^5}{1-2} = \frac{-31}{-1} = 31.$$

Die zweite Formel, die wir hier behandeln wollen, ist die sogenannte binomische Formel, die eine Verallgemeinerung der aus der Schule bekannten Formel $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ auf höhere Exponenten darstellt. Dazu benötigen wir zunächst die folgende Definition.

**Definition 4.3** (Fakultät und Binomialkoeffizienten)**.**

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i = 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n \quad \in \mathbb{N} \qquad \text{(gesprochen „}n\text{-}\textbf{Fakultät}\text{“)},$$

wobei 0! gemäß Notation 3.9 (c) als 1 zu verstehen ist.

(b) Für $k,n \in \mathbb{N}$ mit $k \le n$ definiert man ferner die **Binomialkoeffizienten**

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \text{(gesprochen „}n\text{ über }k\text{“)},$$

die so genannt werden, weil sie in der binomischen Formel in Satz 4.7 auftreten. Sie sind aufgrund der Definition zunächst positive rationale Zahlen; wir werden aber in Bemerkung 4.6 sehen, dass sie sogar natürliche Zahlen sind.

**Bemerkung 4.4.**

(a) Offensichtlich ist $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle $k,n \in \mathbb{N}$ mit $k \le n$.

(b) Man kann im definierenden Ausdruck für $\binom{n}{k}$ die Faktoren von 1 bis $n-k$ kürzen und erhält damit die alternative Darstellung der Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{1\cdot\dots\cdot(n-k)\cdot(n-k+1)\cdot\dots\cdot n}{(1\cdot\dots\cdot k)\cdot(1\cdot\dots\cdot(n-k))} = \frac{(n-k+1)\cdot\dots\cdot n}{1\cdot\dots\cdot k},$$

d. h. $\binom{n}{k}$ ist ein Bruch mit $k$ Zahlen im Zähler und $k$ Zahlen im Nenner, wobei man „im Zähler von $n$ nach unten und im Nenner von 1 nach oben zählt“. So ist z. B. $\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n$ und $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Die wichtigste Identität zwischen den Binomialkoeffizienten ist die folgende:

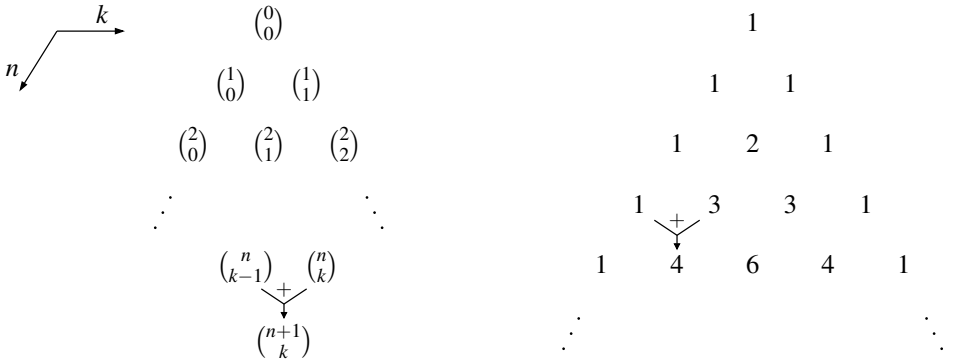
**Lemma 4.5.** *Für alle $n,k \in \mathbb{N}$ mit $1 \le k \le n$ gilt $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.*

*Beweis.* Dies ergibt sich durch einfaches Nachrechnen mit der Darstellung aus Bemerkung 4.4 (b):

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdot\dots\cdot n}{1\cdot\dots\cdot k} + \frac{(n-k+2)\cdot\dots\cdot n}{1\cdot\dots\cdot(k-1)} \\ &= \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdot\dots\cdot n + k\cdot(n-k+2)\cdot\dots\cdot n}{1\cdot\dots\cdot k} \\ &= \frac{(n+1)\cdot(n-k+2)\cdot\dots\cdot n}{1\cdot\dots\cdot k} \\ &= \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 4.6** (Pascalsches Dreieck)**.** Man kann die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ wie folgt in einem dreieckigen Schema, dem sogenannten **Pascalschen Dreieck**, anordnen.




Nach Bemerkung 4.4 (a) stehen auf den Schenkeln dieses Dreiecks nur Einsen, und nach Lemma 4.5 ergibt sich jede andere Zahl in diesem Diagramm als die Summe der beiden darüber stehenden. Insbesondere folgt daraus, dass alle Binomialkoeffizienten *natürliche* Zahlen sind – was aus der Definition aufgrund des Bruches ja nicht offensichtlich ist. Wir können sie damit für jeden Körper $K$ gemäß Notation 3.9 (d) als Elemente von $K$ auffassen (was wir gleich in Satz 4.7 auch tun werden).

Mit dieser Vorarbeit können wir nun die sehr wichtige binomische Formel beweisen. Ihr Name kommt übrigens von der lateinischen Vorsilbe „bi“ für „zwei“: Ein Binom ist eine Summe, die aus zwei Termen besteht, und die binomische Formel berechnet die Potenzen eines solchen Binoms. Beachte, dass die Binomialkoeffizienten in dieser Formel gemäß Notation 3.9 (d) als Elemente des Körpers $K$ aufgefasst werden.

**Satz 4.7 (Binomische Formel).** *Es seien $K$ ein Körper, $x,y \in K$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

**Beispiel 4.8.** Für $n = 2$ ergibt Satz 4.7 wie erwartet die bekannte Formel

$$(x+y)^2 = \binom{2}{0} x^0 y^2 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^2 y^0 = y^2 + 2xy + x^2.$$

*Beweis von Satz 4.7.* Wir beweisen die Formel mit Induktion über $n$. Für $n = 0$ sind beide Seiten der Gleichung 1; die Aussage ist in diesem Fall also richtig. Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, dass die Gleichung für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ richtig ist, und folgern daraus zunächst

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y) \cdot (x+y)^n \\
&= (x+y) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} && \text{(durch Ausmultiplizieren)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} && \text{(Indexverschiebung } k \mapsto k-1 \text{ in der} \\
& && \text{ersten Summe, siehe Notation 3.9 (c)).}
\end{aligned}$$

Lösen wir hier nun aus der ersten Summe den Term für $k = n+1$ und aus der zweiten den für $k = 0$ heraus, so können wir diesen Ausdruck auch schreiben als

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} \left[ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] \cdot x^k y^{n+1-k} + \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot x^k y^{n+1-k} + x^{n+1} + y^{n+1} && \text{(nach Lemma 4.5).}
\end{aligned}$$

Die letzten beiden Summanden $x^{n+1}$ und $y^{n+1}$ sind hier aber genau diejenigen, die sich in der vorderen Summe ergeben, wenn man $k = n+1$ bzw. $k = 0$ setzt. Also können wir die Summe über $k$ gleich über alle Werte von 0 bis $n+1$ laufen lassen und erhalten

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k},$$

also genau die zu zeigende Gleichung für die Potenz $n+1$. Die binomische Formel ist damit durch Induktion bewiesen. □

**Bemerkung 4.9** (Kombinatorische Deutung der Binomialkoeffizienten)**.** Man kann sich die binomische Formel natürlich auch so entstanden denken, dass man den Ausdruck

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y) \cdot \ldots \cdot (x+y)}_{n\text{-mal}}$$

nach dem Distributivgesetz ausmultipliziert. Im Fall $n = 3$ erhalten wir z. B. zunächst ohne Verwendung der Kommutativität der Multiplikation

$$\begin{aligned}
(x+y)^3 &= (x+y) \cdot (x+y) \cdot (x+y) \\
&= (x+y) \cdot (xx + xy + yx + yy) \\
&= xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy. && (*)
\end{aligned}$$

Insgesamt bekommen wir also eine Summe aus Produkten mit jeweils $n$ Faktoren $x$ oder $y$. Jede Möglichkeit, alle diese Faktoren separat als $x$ oder $y$ zu wählen, kommt dabei genau einmal vor. Fassen wir nun mit der Kommutativität der Multiplikation gleiche Terme zusammen, so erhalten wir den Term $x^k y^{n-k}$ also genau so oft, wie wir Möglichkeiten haben, aus den $n$ Faktoren die $k$ auszuwählen, die gleich $x$ sein sollen. In $(*)$ oben bekommen wir z. B. den Term $xy^2$ dreimal, nämlich aus $xyy$, $yxy$ und $yyx$. Nach der binomischen Formel ist der Vorfaktor von $x^k y^{n-k}$ in $(x+y)^n$ aber gerade $\binom{n}{k}$. Daher ist dieser Binomialkoeffizient genau die Anzahl der Möglichkeiten, aus $n$ Objekten (hier: Faktoren) $k$ auszuwählen (hier: diejenigen, bei denen wir $x$ gewählt haben). Man kann sich die binomische Formel also als algebraische Formulierung dieser kombinatorischen Aussage vorstellen.

**Aufgabe 4.10.**

(a) Beweise für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ die Gleichung

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

(b) Zeige mit Induktion über $n$, dass die Gleichung

$$x_1 + \cdots + x_n = d$$

für gegebenes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $d \in \mathbb{N}$ genau $\binom{n+d-1}{n-1}$ Lösungen $(x_1, \ldots, x_n)$ in *natürlichen* Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ besitzt.

**Aufgabe 4.11.** Für alle $n, p \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $s_p(n) := \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + \cdots + n^p$ die Summe der $p$-ten Potenzen aller natürlichen Zahlen von 1 bis $n$.

(a) Beweise für alle $n, p \in \mathbb{N}$ die Formel

$$\binom{p+1}{0} s_0(n) + \binom{p+1}{1} s_1(n) + \cdots + \binom{p+1}{p} s_p(n) = (n+1)^{p+1} - 1.$$

(b) Zeige mit Hilfe von (a), dass $s_2$ ein Polynom in $n$ ist, und berechne dieses Polynom explizit. Ist $s_p$ für alle $p \in \mathbb{N}$ ein Polynom in $n$?

**Aufgabe 4.12.** Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir das Polynom

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1.$$

Man zeige:

(a) Ist $n$ ungerade, so hat $f$ genau eine Nullstelle. Was ist ihre Vielfachheit?

(b) Ist $n$ gerade, so hat $f$ keine Nullstelle.

## 4.B Geordnete Körper

Wir haben bisher von den reellen Zahlen nur die Körpereigenschaften, also die Eigenschaften der vier Grundrechenarten ausgenutzt – und dabei z. B. in Beispiel 3.6 (b) gesehen, dass es außer den reellen Zahlen auch noch ganz andere (und in der Tat sogar sehr viele) Körper gibt. Wir müssen also noch weitere Eigenschaften auflisten, um die reellen Zahlen eindeutig zu charakterisieren. Dies wollen wir im Rest dieses Kapitels tun.

Eine Eigenschaft der reellen Zahlen, die wir bisher völlig vernachlässigt haben, ist, dass man sie *ordnen* kann, also dass man zwei Zahlen der Größe nach vergleichen kann. Die Eigenschaften dieser Ordnungsrelation werden im Begriff des sogenannten *geordneten Körpers* formalisiert.

**Definition 4.13** (Geordnete Körper)**.** Ein Körper $K$ heißt **geordneter** oder **angeordneter Körper**, wenn in ihm eine Menge $P \subset K$ (die „Menge der positiven Zahlen“) gegeben ist, so dass die folgenden drei Eigenschaften gelten:

(a) Für alle $x \in K$ gilt *genau* eine der drei Eigenschaften $x = 0$, $x \in P$ oder $-x \in P$. (Im zweiten Fall nennt man $x$ eine **positive** Zahl, im dritten eine **negative** Zahl.)

(b) Für alle $x, y \in P$ ist $x + y \in P$ („die Summe zweier positiver Zahlen ist positiv").

(c) Für alle $x, y \in P$ ist $xy \in P$ („das Produkt zweier positiver Zahlen ist positiv").

In diesem Fall schreibt man $x < y$ oder $y > x$ falls $y - x \in P$, und $x \leq y$ oder $y \geq x$ falls $y - x \in P$ oder $y = x$. (Insbesondere ist also $x > 0$ genau dann, wenn $x \in P$, und $x < 0$ genau dann, wenn $-x \in P$; außerdem gilt nach (a) für $x, y \in K$ stets genau eine der Aussagen $x = y$, $x < y$ oder $y < x$.)

**Beispiel 4.14.**

(a) $\mathbb{R}$ ist ein geordneter Körper (was wir hier wiederum axiomatisch voraussetzen wollen). Nennt man in der Teilmenge $\mathbb{Q}$ von $\mathbb{R}$ genau die Zahlen positiv, die es auch in $\mathbb{R}$ sind, so ist damit auch $\mathbb{Q}$ ein geordneter Körper.

(b) Der Körper $\mathbb{Z}_2$ aus Beispiel 3.6 (b) kann nicht zu einem geordneten Körper gemacht werden: Das Element $1 = u$ ist nicht gleich 0, also müsste nach Definition 4.13 (a) genau eine der beiden Eigenschaften $1 \in P$ und $-1 \in P$ gelten. Dies ist aber unmöglich, da wegen $1 + 1 = 0$ in $\mathbb{Z}_2$ die Gleichung $-1 = 1$ gilt.

**Bemerkung 4.15** (Partielle und totale Ordnungen)**.** Ist $K$ ein geordneter Körper, so ist $\leq$ wie in Definition 4.13 natürlich eine Relation auf $K$ im Sinne von Definition 2.1. Sie besitzt die folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in K$:

(a) **Reflexivität**: Es gilt $x \leq x$.

(b) **Antisymmetrie**: Ist $x \leq y$ und $y \leq x$, so folgt $x = y$.

(c) **Transitivität**: Gilt $x \leq y$ und $y \leq z$, so folgt auch $x \leq z$.

(d) **Totalität**: Es gilt (mindestens) eine der Aussagen $x \leq y$ und $y \leq x$. (Mit anderen Worten: „Zwei beliebige Elemente von $K$ sind stets miteinander vergleichbar.")

In der Tat folgt (a) unmittelbar aus Definition 4.13. Da $x \leq y$ nach Definition äquivalent zu $y - x \in P$ oder $y - x = 0$ ist, und $y \leq x$ zu $-(y - x) \in P$ oder $y - x = 0$, ergeben sich (b) und (d) außerdem aus Definition 4.13 (a). Die Aussage (c) schließlich ist trivial falls $x = y$ oder $y = z$; andernfalls gilt $y - x \in P$ oder $z - y \in P$, und damit $z - x = (y - x) + (z - y) \in P$, also $x < z$, nach Definition 4.13 (b).

Auf einer beliebigen Menge $K$ (die also nicht notwendig ein Körper ist) nennt man eine Relation $\leq$ mit den Eigenschaften (a), (b) und (c) eine **partielle Ordnung**. Gilt zusätzlich noch (d), so heißt $\leq$ eine **(totale) Ordnung** auf $K$. Jeder geordnete Körper $K$ liefert also eine totale Ordnung auf $K$.

Das Standardbeispiel für eine partielle Ordnung auf einer Menge ist die Teilmengenrelation auf der Potenzmenge $\mathscr{P}(M)$ einer beliebigen Menge $M$: Sind $A, B, C \in \mathscr{P}(M)$ Teilmengen von $M$, so gilt natürlich $A \subset A$; aus $A \subset B$ und $B \subset A$ folgt $A = B$; und aus $A \subset B$ und $B \subset C$ folgt $A \subset C$. Diese partielle Ordnung ist aber in der Regel nicht total: Für $M = \mathbb{N}$ sind die Teilmengen $A = \{0\}$ und $B = \{1\}$ nicht vergleichbar, denn es gilt weder $A \subset B$ noch $B \subset A$.

Wie schon bei den Körpern wollen wir nun auch hier für einen geordneten Körper kurz die wichtigsten Eigenschaften ableiten, die aus der Definition folgen (und die euch für die reellen Zahlen sicher bekannt sind). Wir werden sie im Folgenden verwenden, ohne jedes Mal darauf hinzuweisen.

**Lemma 4.16** (Eigenschaften geordneter Körper)**.** *Für alle $x, y, z$ in einem geordneten Körper $K$ gilt:*

(a) *Ist $x < y$, so folgt $x + z < y + z$.*

(b) *Ist $x < y$ und $z > 0$, so gilt auch $xz < yz$. Ist dagegen $x < y$ und $z < 0$, so folgt $xz > yz$.*
*(Ungleichungen drehen sich also bei der Multiplikation mit einer negativen Zahl um.)*

(c) *Gilt $x \neq 0$, so ist $x^2 > 0$. Insbesondere ist also $1 > 0$.*

(d) *Wenn $0 < x < y$, dann folgt $0 < y^{-1} < x^{-1}$.*

*Entsprechende Aussagen gelten natürlich auch für die nicht-strikten Ungleichungen $\leq$ bzw. $\geq$.*

*Beweis.*

(a) Ist $x < y$, also $y - x \in P$, so ist auch $(y+z) - (x+z) = y - x \in P$, also $x+z < y+z$.

(b) Gilt wieder $y - x \in P$ und $z \in P$, so folgt aus Definition 4.13 (c) auch $(y-x)z = yz - xz \in P$, also $xz < yz$. Ist hingegen $z < 0$, also $-z \in P$, so gilt diesmal $(y-x)(-z) = xz - yz \in P$, also $yz < xz$.

(c) Ist $x \in P$, so ist natürlich auch $x^2 \in P$ nach Definition 4.13 (c). Ist $-x \in P$, so folgt genauso $x^2 = (-x)^2 \in P$. Also ist für $x \neq 0$ in jedem Fall $x^2 > 0$. Insbesondere ist damit $1 = 1 \cdot 1 > 0$.

(d) Wegen $x > 0$ folgt aus (c) und Definition 4.13 (c) zunächst $x^{-1} = x \cdot (x^{-1})^2 \in P$, also $x^{-1} > 0$. Genauso ergibt sich $y^{-1} > 0$. Ist nun $x < y$, so folgt aus (b) durch Multiplikation mit der positiven Zahl $x^{-1}y^{-1}$ die Ungleichung $xx^{-1}y^{-1} < yx^{-1}y^{-1}$, also $y^{-1} < x^{-1}$, was zu zeigen war. □

06

**Notation 4.17** (Intervalle und Betrag)**.** Die folgenden Notationen verwendet man häufig in einem geordneten Körper $K$.

(a) Sind $a, b \in K$ mit $a \leq b$, so definiert man die folgenden Teilmengen von $K$:

- $[a,b] := \{x \in K : a \leq x \leq b\}$ (**abgeschlossene** bzw. **kompakte Intervalle**);
- $(a,b) := \{x \in K : a < x < b\}$ (**offene Intervalle**);
- $[a,b) := \{x \in K : a \leq x < b\}$ (**halboffene Intervalle**);
- $[a,\infty) := K_{\geq a} = \{x \in K : x \geq a\}$ (**uneigentliche Intervalle**);

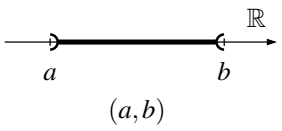
und analog natürlich $(a,b]$, $(a,\infty)$, $(-\infty,b]$ und $(-\infty,b)$. Wenn wir derartige Intervalle im Fall $K = \mathbb{R}$ graphisch darstellen, deuten wir wie im Bild unten meistens durch Rundungen an den Intervallgrenzen an, ob die Randpunkte mit dazugehören sollen oder nicht.

In der Literatur sind statt der runden Klammern oft auch „falsch herum geöffnete“ eckige Klammern üblich, also z. B. $[a,b[$ statt $[a,b)$.

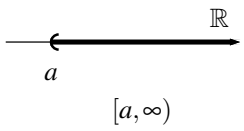
(b) Für $x \in K$ definieren wir den **Betrag** von $x$ als

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

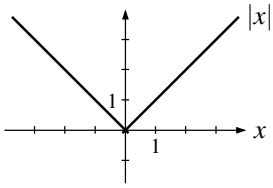
Insbesondere gilt also immer $|x| \geq 0$. Im Fall $K = \mathbb{R}$ sieht die Betragsfunktion natürlich wie im folgenden Bild rechts aus.



$(a,b)$



$[a,\infty)$




Die wichtigsten beiden Eigenschaften der Betragsfunktion sind ihre „Verträglichkeit“ mit Addition und Multiplikation:

**Lemma 4.18** (Eigenschaften der Betragsfunktion)**.** *Für alle $x, y$ in einem geordneten Körper $K$ gilt:*

(a) $|xy| = |x| \cdot |y|$. *Insbesondere ergibt sich daraus für $y = -1$, dass $|-x| = |x|$.*

(b) $x \leq |x|$.

(c) $|x+y| \leq |x| + |y|$. *Diese Ungleichung bezeichnet man als* ***Dreiecksungleichung*** *– wir werden in Bemerkung 6.10 (a) sehen, warum.*

*Beweis.*

(a) Wir machen eine Fallunterscheidung je nach Vorzeichen von $x$ und $y$. Ist z. B. $x \geq 0$ und $y \leq 0$, so ist $xy \leq 0$ und damit nach Definition des Betrages $|x| = x$, $|y| = -y$ und $|xy| = -xy$.

Zusammensetzen dieser Gleichungen ergibt die Behauptung $|xy| = -xy = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$. Die anderen Fälle der möglichen Vorzeichenverteilungen beweist man genauso.

(b) Für $x \leq 0$ ist $x \leq 0 \leq |x|$; für $x \geq 0$ ist $x = |x|$.

(c) Nach (b), angewendet auf $x$ und $y$, gilt (mit Lemma 4.16 (a))

$$x + y \leq |x| + |y|. \tag{1}$$

Wenden wir (b) hingegen auf $-x$ und $-y$ an, so folgt auch

$$-x - y \leq |-x| + |-y| \overset{\text{(a)}}{=} |x| + |y|. \tag{2}$$

Aber $|x+y|$ ist in jedem Fall eine der beiden Zahlen $x+y$ oder $-x-y$. Damit folgt die Behauptung $|x+y| \leq |x| + |y|$ aus (1) und (2). □

**Bemerkung 4.19** (Dreiecksungleichung nach oben und unten)**.** Die Dreiecksungleichung aus Lemma 4.18 (c) schätzt den Betrag $|x+y|$ einer Summe nach oben ab. Offensichtlich gilt im Allgemeinen keine Gleichheit, wie das Beispiel $x = 1$, $y = -1$ zeigt: Hier ist $|x+y| = 0 < 2 = |x| + |y|$.

Eine Abschätzung nach unten kann man erhalten, indem man Lemma 4.18 (c) auf die Zahlen $x+y$ und $-y$ anwendet: Man erhält dann nämlich $|x| = |(x+y) - y| \leq |x+y| + |-y| = |x+y| + |y|$ und damit $|x+y| \geq |x| - |y|$. Insgesamt haben wir also für alle $x, y \in K$

$$|x| - |y| \leq |x+y| \leq |x| + |y|.$$

Eine weitere Anwendung der Eigenschaften eines geordneten Körpers ist die folgende Ungleichung, die oftmals dann nützlich ist, wenn die Größe von Potenzen $x^n$ mit der von Produkten $n \cdot x$ verglichen werden soll.

**Satz 4.20** (**Bernoullische Ungleichung**)**.** *Es seien $K$ ein geordneter Körper, $x \in K$ mit $x \geq -1$, und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$.*

*Beweis.* Wir zeigen die Aussage mit Induktion über $n$. Das Bild rechts unten veranschaulicht die Ungleichung im Fall $K = \mathbb{R}$ und $n = 2$.

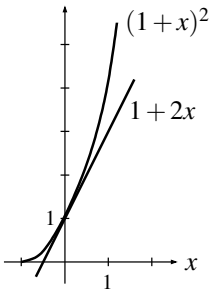
Der Induktionsanfang für $n = 0$ ist klar: dann sind beide Seiten gleich 1, die Ungleichung ist also erfüllt.

Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, dass

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

für alle $x \geq -1$ und ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Mit Lemma 4.16 (b) können wir diese Ungleichung mit der nach Voraussetzung nicht-negativen Zahl $1+x$ multiplizieren und erhalten

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2.$$




Nach Lemma 4.16 (c) ist nun $nx^2 \geq 0$ und damit $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$, was zu zeigen war. □

**Aufgabe 4.21.** Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ bzw. $n \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden Ungleichungen?

(a) $\dfrac{2xy}{x+y} \leq \dfrac{x+y}{2}$ (b) $\dfrac{4^n}{2n+1} < \binom{2n}{n} < 4^n$ (c) $n! < \left(\dfrac{n}{2}\right)^n$

## 4.C Supremum und Infimum

Wie bereits angekündigt wollen wir in diesem Abschnitt nun endlich eine eindeutige axiomatische Charakterisierung der reellen Zahlen angeben. Bisher haben wir nur gesehen, dass $\mathbb{R}$ ein geordneter Körper ist. Aber auch $\mathbb{Q}$ ist ein geordneter Körper, und daher müssen wir noch untersuchen, wie sich $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet. Anschaulich würden wir dies wohl so formulieren, dass die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen „Löcher“ auf der Zahlengeraden hat, also dass es Punkte wie z. B. $\sqrt{2}$ auf der Zahlengeraden gibt, die keiner rationalen Zahl entsprechen (siehe Lemma 4.36). Aber wie formuliert man so etwas exakt?

Um dies zu sehen, müssen wir genauer untersuchen, wann Teilmengen eines geordneten Körpers $K$ größte bzw. kleinste Elemente haben. Dazu können wir natürlich zunächst auf die offensichtliche Art das Maximum und Minimum zweier Elemente von $K$ definieren.

**Definition 4.22** (Maximum und Minimum endlich vieler Zahlen)**.** Für zwei Elemente $x$ und $y$ eines geordneten Körpers $K$ definieren wir das **Maximum** und **Minimum** durch

$$\max(x,y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y, \\ y & \text{falls } y \geq x \end{cases} \quad \text{und} \quad \min(x,y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \leq y, \\ y & \text{falls } y \leq x. \end{cases}$$

Analog kann man auch das Maximum und Minimum von mehr als zwei Zahlen definieren, *sofern es nur endlich viele sind.* Betrachten wir dagegen eine (unendliche) Teilmenge $M \subset K$, so können wir in der Regel nicht mehr erwarten, dass $M$ ein kleinstes bzw. größtes Element hat, allein schon weil die Menge dann in folgendem Sinne unbeschränkt sein kann:

**Definition 4.23** (Beschränkte Mengen)**.** Es sei $M$ eine Teilmenge eines geordneten Körpers $K$.

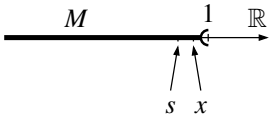
(a) Ein Element $s \in K$ heißt **obere Schranke** für $M$, wenn $x \leq s$ für alle $x \in M$. Existiert eine solche obere Schranke für $M$, so nennt man $M$ **nach oben beschränkt**. Analog definiert man den Begriff einer **unteren Schranke** bzw. einer **nach unten beschränkten** Menge.

(b) Die Menge $M$ heißt **beschränkt**, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist, oder – äquivalent dazu – wenn die Menge ihrer Beträge beschränkt ist, also wenn es ein $s \in K$ gibt mit $|x| \leq s$ für alle $x \in M$.

**Beispiel 4.24.** Es sei $M = \mathbb{R}_{<1}$ im geordneten Körper $\mathbb{R}$.

(a) Die Menge $M$ ist nach oben (aber nicht nach unten) beschränkt, denn $s = 1$ ist eine obere Schranke für $M$. Genauso ist auch $s = 2$ eine obere Schranke für $M$, auch wenn man anschaulich vielleicht sagen würde, dass diese Schranke „nicht so gut“ ist, weil $x \leq 2$ für alle $x \in M$ eine schwächere Aussage ist als $x \leq 1$ für alle $x \in M$.

(b) Ist $s \in M$, also $s < 1$, so gilt für den Mittelpunkt $x := \frac{s+1}{2}$ zwischen $s$ und 1 wie im Bild rechts natürlich




$$x = \frac{s+1}{2} > \frac{s+s}{2} = s \quad \text{und} \quad x = \frac{s+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1.$$

Hieraus ergeben sich sofort zwei einfache Folgerungen:

- Es gibt keine größte Zahl in $M$ (denn zu $s \in M$ liegt die größere Zahl $x$ wegen $x < 1$ ebenfalls noch in $M$).
- Die Menge $M$ ist aber nach (a) nach oben beschränkt, und die kleinste mögliche obere Schranke für $M$ ist 1 (denn $s < 1$ kann keine obere Schranke mehr sein, da $x > s$ ebenfalls noch in $M$ liegt).

Die Zahl 1 kann damit als „Obergrenze der Zahlen in $M$“ angesehen werden, auch wenn sie kein Element von $M$ und daher keine größte Zahl in $M$ ist. Dieses Konzept wollen wir jetzt exakt definieren.

**Definition 4.25** (Supremum und Infimum)**.** Es sei $M$ eine Teilmenge eines geordneten Körpers $K$.

(a) Eine Zahl $s \in K$ heißt ein **Supremum** von $M$, wenn $s$ eine „kleinste obere Schranke für $M$“ ist, d. h. wenn gilt:

- $s$ ist eine obere Schranke für $M$; und
- für jede obere Schranke $s'$ für $M$ gilt $s \leq s'$.

(b) Eine Zahl $s \in K$ heißt ein **Maximum** von $M$, wenn $s$ eine „obere Schranke für $M$ in $M$“ ist, d. h. wenn gilt:

- $s$ ist eine obere Schranke für $M$; und
- $s \in M$.

Analog heißt $s \in K$ ein **Infimum** von $M$, wenn $s$ eine größte untere Schranke für $M$ ist, und ein **Minimum**, wenn $s$ eine untere Schranke für $M$ in $M$ ist.

**Bemerkung und Notation 4.26** ($\sup M$, $\max M$, $\inf M$, $\min M$)**.**

(a) Jedes Maximum $s$ einer Menge $M$ ist auch ein Supremum von $M$: Ist dann nämlich $s' \in K$ eine weitere obere Schranke, so folgt wegen $s \in M$ natürlich sofort $s \leq s'$.

(b) Wenn die Menge $M$ ein Supremum besitzt, dann ist es eindeutig bestimmt: Sind nämlich $s_1$ und $s_2$ zwei kleinste obere Schranken, so folgt nach Definition 4.25 (a) sofort $s_1 \leq s_2$ (weil $s_1$ eine kleinste obere Schranke und $s_2$ auch eine obere Schranke ist) und $s_2 \leq s_1$ (weil $s_2$ Supremum und $s_1$ auch eine obere Schranke ist), also $s_1 = s_2$. Nach (a) ist damit auch ein Maximum von $M$ eindeutig bestimmt, falls es existiert.

Wenn ein Supremum oder Maximum von $M$ existiert, können wir also von *dem* Supremum bzw. *dem* Maximum von $M$ reden. Wir bezeichnen es dann mit $\sup M$ bzw. $\max M$.

(c) Analog sind natürlich auch Infimum und Minimum von $M$ eindeutig bestimmt, sofern sie existieren; wir bezeichnen sie dann mit $\inf M$ bzw. $\min M$.

**Beispiel 4.27.**

(a) Die Menge $M = \mathbb{R}_{\leq 1}$ hat offensichtlich das Maximum 1. Nach Bemerkung 4.26 (a) ist 1 damit auch das Supremum von $M$, d. h. es ist $\sup M = \max M = 1$.

(b) Das uneigentliche Intervall $M = \mathbb{R}_{<1}$ hat nach Beispiel 4.24 (b) kein Maximum, aber es gilt $\sup M = 1$.

(c) Das uneigentliche Intervall $M = \mathbb{R}_{>1}$ besitzt kein Supremum (und damit auch kein Maximum), da $M$ nach oben unbeschränkt ist, also nicht einmal irgendeine obere Schranke für $M$ existiert – insbesondere also keine kleinste.

(d) Auch die leere Menge hat kein Supremum, weil für sie jede reelle Zahl eine obere Schranke ist und damit keine kleinste obere Schranke existiert.

**Aufgabe 4.28.** Es seien $A$ und $B$ zwei Teilmengen eines geordneten Körpers $K$, die ein Supremum $\sup A$ bzw. $\sup B$ besitzen. Setzen wir $A+B := \{x+y : x \in A, y \in B\}$ und $-A := \{-x : x \in A\}$, so zeige man, dass auch die folgenden Suprema und Infima existieren und die behaupteten Werte haben:

(a) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

(b) $\inf(-A) = -\sup A$.

(c) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Unsere bisher betrachteten Beispiele von Mengen ohne Supremum in Beispiel 4.27 (c) und (d) waren letztlich trivial – also Mengen, die überhaupt keine obere Schranke besitzen, und die leere Menge. Ist es auch möglich, dass eine Menge (die natürlich nicht unbedingt ein Intervall sein muss) zwar nicht leer und nach oben beschränkt ist, aber trotzdem keine *kleinste* obere Schranke hat? In der Tat ist dies in $\mathbb{R}$ im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$ nicht möglich, und wie wir sehen werden, ist genau dies der wesentliche Unterschied zwischen diesen beiden Körpern. Wir definieren daher zunächst:

**Definition 4.29** (Supremumsaxiom)**.** Wir sagen, dass ein geordneter Körper das **Supremumsaxiom** erfüllt, wenn in ihm jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt. (Natürlich besitzt dann nach Aufgabe 4.28 (b) auch jede nicht leere, nach unten beschränkte Teilmenge ein Infimum.)

Die reellen Zahlen erfüllen also dieses Supremumsaxiom – das werden wir in dieser Vorlesung axiomatisch voraussetzen, und das ist nun auch endlich die letzte Eigenschaft der reellen Zahlen, die wir benötigen. Wenn wir dieses und das vorangegangene Kapitel zusammenfassen, setzen wir nun also insgesamt über die reellen Zahlen voraus:

| $\mathbb{R}$ ist ein geordneter Körper, der das Supremumsaxiom erfüllt. |
|---|

Wie schon in Notation 1.14 gesagt, kann man die Existenz der reellen Zahlen auch aus den Axiomen der Logik und Mengenlehre herleiten – und dann ist es natürlich ein beweisbarer Satz, dass $\mathbb{R}$ ein geordneter Körper ist, der das Supremumsaxiom erfüllt. Man kann sogar noch mehr zeigen, nämlich dass diese Eigenschaften die reellen Zahlen auch vollständig charakterisieren: $\mathbb{R}$ ist in der Tat der *einzige* geordnete Körper, der das Supremumsaxiom erfüllt. Der Beweis dieser Aussage ist jedoch sehr schwierig und soll hier nicht gegeben werden, zumal wir diese Aussage auch nicht benötigen werden. Wir werden lediglich in Bemerkung 4.37 noch sehen, dass $\mathbb{Q}$ das Supremumsaxiom in der Tat nicht erfüllt.

Für uns bedeutet diese Tatsache letztlich nur, dass wir ab jetzt alles, was wir mit den reellen Zahlen tun möchten, ausschließlich auf den Axiomen eines geordneten Körpers und dem Supremumsaxiom aufbauen können und werden.

Wir wollen nun ein paar erste elementare Folgerungen aus dem Supremumsaxiom ziehen. Seine wahre Stärke wird dieses Axiom jedoch erst im nächsten Kapitel bei der Untersuchung von Grenzwerten von Folgen zeigen.

**Satz 4.30** ($\mathbb{R}$ ist **archimedisch geordnet**). *Die Teilmenge $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\} \subset \mathbb{R}$ ist nach oben unbeschränkt.*

*Beweis.* Angenommen, $\mathbb{N}$ wäre nach oben beschränkt. Dann würde nach dem Supremumsaxiom $s := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ existieren. Da $s$ die *kleinste* obere Schranke ist, ist $s-1$ keine obere Schranke; es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > s-1$. Dann ist aber $n+1 \in \mathbb{N}$ mit $n+1 > s$, im Widerspruch dazu, dass $s$ eine obere Schranke für $\mathbb{N}$ ist. □

**Bemerkung 4.31.**

(a) Eine einfache, aber oft verwendete Folgerung aus Satz 4.30 ist, dass es zu jeder positiven Zahl $x \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt mit $\frac{1}{n} < x$: Da $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt ist, ist insbesondere $\frac{1}{x}$ keine obere Schranke für $\mathbb{N}$. Also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{x}$, und damit nach Lemma 4.16 (d) mit $\frac{1}{n} < x$.

(b) Satz 4.30 mag zwar selbstverständlich erscheinen – man kann allerdings in der Tat geordnete Körper konstruieren, in denen diese Aussage falsch ist, in denen es also „unendlich große" Elemente gibt, die größer sind als jede Zahl, die man durch fortlaufende Addition der 1 erreichen kann [E, Kapitel 11].

**Aufgabe 4.32.** Bestimme Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (sofern sie existieren) der Menge

$$M = \left\{ \frac{m+n}{mn} : m,n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

07

**Folgerung 4.33.** *Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ hat ein Maximum. Entsprechend hat jede nicht-leere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ein Minimum.*

*Insbesondere hat also jede nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein Minimum. (Man sagt dafür auch: $\mathbb{N}$ ist **wohlgeordnet**.)*

*Beweis.* Es sei $M \subset \mathbb{Z}$ nicht-leer und nach oben beschränkt, mit oberer Schranke $s$. Nach Satz 4.30 gibt es weiterhin eine natürliche Zahl $b > s$, die dann natürlich auch eine obere Schranke für $M$ ist.

Ist $a \in M$ nun ein beliebiges Element, so ist $M_{\geq a} = M \cap \{a, a+1, \dots, b\}$ eine nicht-leere endliche Menge, die demzufolge natürlich ein Maximum besitzt. Alle anderen Zahlen von $M$ sind aber noch kleiner als $a$, so dass dieses Maximum also auch das Maximum von $M$ ist. □

**Bemerkung 4.34** (*Gaußklammer*). Nach Folgerung 4.33 kann man für alle $x \in \mathbb{R}$ die Zahl

$$\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$$

definieren, da die Menge aller $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq x$ nach Satz 4.30 nicht leer ist (es gibt ja ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq -x$, wir können dann $k = -n$ setzen), und natürlich durch $x$ nach oben beschränkt. Als die

größte ganze Zahl kleiner oder gleich $x$ kann man sie sich als „Abrundung“ von $x$ vorstellen; es ist also z. B.

$$\left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor = 3 \quad \text{und} \quad \left\lfloor -\frac{7}{2} \right\rfloor = -4.$$

**Folgerung 4.35** ($\mathbb{Q}$ liegt **dicht** in $\mathbb{R}$)**.** *Jedes nicht-leere offene Intervall $(a,b)$ in $\mathbb{R}$ enthält eine rationale Zahl.*

*Beweis.* Nach Bemerkung 4.31 (a) gibt es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\frac{1}{n} < b-a$. Weiterhin ist die Menge

$$M := \left\{ k \in \mathbb{Z} : \frac{k}{n} > a \right\} = \{k \in \mathbb{Z} : k > na\}$$

nach Satz 4.30 nicht-leer und durch $na$ nach unten beschränkt, und besitzt damit nach Folgerung 4.33 ein Minimum $k$. Für dieses Minimum gilt also:

(a) $k \in M$ und damit $\frac{k}{n} > a$;

(b) $k-1 \notin M$ und damit $\frac{k-1}{n} \leq a$, d. h.

$$\frac{k}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b.$$

Also ist $\frac{k}{n}$ eine rationale Zahl im offenen Intervall $(a,b)$. □

Als eine Konsequenz aus dieser Folgerung wollen wir wie bereits angekündigt nun sehen, dass die rationalen Zahlen das Supremumsaxiom nicht erfüllen, dass hier also der entscheidende Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ liegt. Wir untersuchen dazu zunächst, ob es eine Quadratwurzel aus 2 gibt, also eine positive Zahl $x$ mit $x^2 = 2$ (die wir dann als $\sqrt{2}$ schreiben).

**Lemma 4.36** (Irrationalität von $\sqrt{2}$)**.** *Es gibt keine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.*

*Beweis.* Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$. Wir können $x$ als gekürzten Bruch $x = \frac{p}{q}$ (mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0$) schreiben und erhalten

$$x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2, \quad \text{also} \quad p^2 = 2q^2. \tag{$*$}$$

Also muss $p^2$ und damit auch $p$ selbst eine gerade Zahl, d. h. durch 2 teilbar sein. Wir können daher $p = 2r$ für eine ganze Zahl $r \in \mathbb{Z}$ setzen. Einsetzen in ($*$) liefert

$$(2r)^2 = 2q^2, \quad \text{also} \quad q^2 = 2r^2.$$

Aber dann muss auch $q^2$ und damit $q$ eine gerade Zahl sein – was ein Widerspruch dazu ist, dass die Darstellung von $x$ als Bruch $\frac{p}{q}$ als gekürzt vorausgesetzt worden ist. □

Wie ihr aus der Schule wisst, gibt es aber in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ eine Wurzel aus 2. Da unsere Axiome, dass $\mathbb{R}$ ein geordneter Körper ist, der das Supremumsaxiom erfüllt, die reellen Zahlen ja vollständig beschreiben, könnten wir die Existenz dieser Wurzel jetzt sogar aus unseren Axiomen beweisen: Die Menge $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ ist offensichtlich eine nicht-leere, nach oben beschränkte Menge, die demzufolge ein Supremum $s$ besitzt – und für dieses Supremum kann man zeigen, dass $s^2 = 2$ gilt, also dass $s$ eine Wurzel aus 2 ist. Dieser Beweis ist jedoch recht technisch, und da wir in Folgerung 5.30 ohnehin die Existenz reeller Quadratwurzeln aus beliebigen nicht-negativen Zahlen aus unseren Axiomen beweisen werden, wollen wir hier darauf verzichten und für die folgende Bemerkung der Einfachheit halber annehmen, dass $\sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$ existiert, zumal wir diese Bemerkung im Folgenden nicht verwenden werden.

**Bemerkung 4.37** ($\mathbb{Q}$ erfüllt das Supremumsaxiom nicht)**.** Es sei $M := \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$. Diese Menge ist offensichtlich nicht leer (denn $0 \in M$) und nach oben beschränkt (z. B. mit oberer Schranke 2). Würde $\mathbb{Q}$ das Supremumsaxiom erfüllen, müsste sie also ein Supremum $s := \sup M \in \mathbb{Q}$ besitzen. Allerdings ist für dieses Supremum sowohl $s < \sqrt{2}$ als auch $s > \sqrt{2}$ ausgeschlossen:

- $s < \sqrt{2}$ kann keine obere Schranke für $M$ sein, denn nach Folgerung 4.35 gäbe es dann eine rationale Zahl $x \in (s, \sqrt{2})$, also mit $x \in M$, aber $x > s$.
- $s > \sqrt{2}$ kann keine *kleinste* obere Schranke für $M$ sein, denn wieder nach Folgerung 4.35 gäbe es nun eine rationale Zahl $s' \in (\sqrt{2}, s)$, die kleiner ist als $s$, aber immer noch eine obere Schranke für $M$ (da aus $x \in M$, also $x < \sqrt{2}$, ja sofort auch $x < s'$ folgt).

Also bleibt nur die Möglichkeit $s = \sqrt{2}$, was aber nach Lemma 4.36 ein Widerspruch zu $s \in \mathbb{Q}$ ist. Damit erfüllt $\mathbb{Q}$ das Supremumsaxiom nicht. Anschaulich hat $M$ zwar ein Supremum in $\mathbb{R}$, nämlich $\sqrt{2}$, aber genau an dieser Stelle hat $\mathbb{Q}$ ein „Loch“ auf der Zahlengeraden – und daher existiert kein Supremum von $M$ in $\mathbb{Q}$.

**Bemerkung 4.38** (Uneigentliche Suprema)**.** Nach dem Supremumsaxiom existiert das Supremum $\sup M$ für jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$. Oft ist es praktisch, diese Notation wie folgt auf beliebige Teilmengen von $\mathbb{R}$ zu erweitern:

(a) Ist $M = \emptyset$, so schreiben wir formal $\sup M = -\infty$. (Anschaulich: Jede reelle Zahl ist eine obere Schranke der leeren Menge, daher ist „die kleinste“ davon $-\infty$.)

(b) Ist $M \neq \emptyset$ nach oben unbeschränkt, so schreiben wir formal $\sup M = \infty$. (Anschaulich: Ist $M$ nach oben unbeschränkt, so ist keine reelle Zahl eine obere Schranke für $M$, die einzige und damit kleinste „obere Schranke“ für $M$ ist also $\infty$.)

Man spricht in diesem Fall von *uneigentlichen Suprema*. Analog setzt man natürlich $\inf \emptyset = \infty$ und $\inf M = -\infty$ für jede nach unten unbeschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$.

Mit „wir schreiben formal“ ist dabei oben gemeint, dass $-\infty$ und $\infty$ natürlich keine Zahlen sind, mit denen man uneingeschränkt wie gewohnt rechnen kann. Manche Rechenoperationen wie z. B. $\infty + x := \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$ lassen sich zwar noch intuitiv sinnvoll definieren (siehe Bemerkung 5.42), aber andere wie z. B. $\infty - \infty$ nicht. Mit anderen Worten ist $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ kein Körper. Trotzdem hat die Einführung uneigentlicher Suprema und Infima den Vorteil, dass $\sup M$ und $\inf M$ für *jede* Teilmenge $M$ von $\mathbb{R}$ definiert sind, und Aussagen darüber oft auch in den neuen Fällen gültig bleiben. So gelten z. B. die Aussagen aus Aufgabe 4.28 sogar für beliebige Teilmengen von $\mathbb{R}$ (sofern in (c) rechts nicht der unbestimmte Ausdruck $\infty - \infty$ auftritt) – allerdings brauchen wir dafür natürlich einen neuen Beweis, da ja schon die Definition eines uneigentlichen Supremums eine andere als üblich ist.

# 5. Folgen und Grenzwerte

Nachdem wir die reellen Zahlen vollständig charakterisiert haben, wollen wir jetzt zur eigentlichen Analysis kommen. Der zentrale Begriff ist dabei der des Grenzwerts, den ihr ja sicher in der Schule schon in der einen oder anderen Form kennengelernt habt und den wir jetzt exakt einführen wollen. Wir beginnen dabei mit Grenzwerten von Folgen, da sie für den Anfang einfacher sind als die später auch noch wichtigen Grenzwerte von Funktionen.

## 5.A Grenzwerte von Folgen

Zur Untersuchung des Grenzwertbegriffs müssen wir als Erstes exakt definieren, was wir damit meinen, dass sich eine (unendlich lange) Folge reeller Zahlen einem Wert beliebig genau annähert.

**Definition 5.1** (Folgen und Grenzwerte)**.**

(a) Eine **Folge** in einer Menge $M$ ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \to M, \ \ n \mapsto a_n.$$

Man schreibt eine solche Folge als $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, einfach nur als $(a_n)_n$, oder durch Aufzählen der Folgenglieder als $(a_0, a_1, a_2, \dots)$. Hin und wieder ist in der Literatur auch die noch weiter verkürzte Schreibweise $(a_n)$ zu finden, die wir hier allerdings nicht verwenden wollen, um Verwechslungen der Folge $(a_n)_n$ mit einem zufällig eingeklammerten Folgenglied $a_n$ zu vermeiden.

Manchmal ist es bequem, Folgen nicht beim Index 0, sondern bei einem anderen Startindex $n_0 \in \mathbb{Z}$ beginnen zu lassen – wenn man dies in der Notation deutlich machen möchte, schreibt man derartige Folgen als $(a_n)_{n\geq n_0}$.

In diesem Kapitel werden wir nur den Fall $M = \mathbb{R}$, also sogenannte *reelle Folgen* betrachten. Wir werden daher oft nur von einer Folge sprechen und damit dann immer eine reelle Folge meinen. Später werden wir auch noch andere Folgen kennenlernen, z. B. Folgen komplexer Zahlen in Abschnitt 6.C oder Folgen von Funktionen in Abschnitt 8.C.

(b) Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Grenzwert** einer (reellen) Folge $(a_n)_n$, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

Wir werden gleich in Lemma 5.5 sehen, dass eine Folge höchstens einen solchen Grenzwert besitzen kann. Wenn ein solches $a$ existiert, können wir also sagen, dass *a der* Grenzwert der Folge $(a_n)_n$ ist. Man nennt die Folge in diesem Fall **konvergent** (gegen $a$) und schreibt dies als

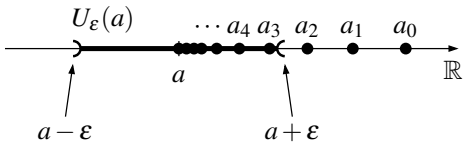
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

(die Bezeichnung kommt vom englischen Wort „limit“ bzw. dem lateinischen „limes“), oder manchmal auch als $a_n \to a$ (für $n \to \infty$). Existiert ein solcher Grenzwert nicht, so heißt die Folge **divergent**.

**Bemerkung 5.2** (Anschauliche Deutung des Grenzwertbegriffs)**.** Um die Definition des Grenzwertes in leicht verständliche Worte zu fassen, führen wir ein paar intuitive Notationen ein. Für $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ heißt das offene Intervall

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

die **$\varepsilon$-Umgebung** von $a$. Die Grenzwertbedingung besagt nun genau, dass in jeder solchen $\varepsilon$-Umgebung von $a$ – egal wie klein das $\varepsilon$ gewählt ist – alle Folgenglieder ab einem gewissen $n_0$ liegen, wobei dieses $n_0$ natürlich von dem gewählten $\varepsilon$ abhängen darf. Im Beispielbild unten wäre das z. B. für $n_0 = 3$ der Fall, denn $a_3, a_4, a_5, \dots$ liegen alle in $U_\varepsilon(a)$.




Man kann diese Tatsache auch so ausdrücken, dass in jeder $\varepsilon$-Umgebung *alle bis auf endlich viele* Folgenglieder liegen müssen (nämlich alle bis auf evtl. $a_0,\dots,a_{n_0-1}$). In der Analysis verwendet man gerne den Buchstaben $\varepsilon$ für eine kleine positive Zahl und die Sprechweise „**fast alle**“ für „alle bis auf endlich viele“, und kann damit die Grenzwertbedingung auch in Worten formulieren:

> *Eine Zahl $a$ ist genau dann Grenzwert einer Folge, wenn in jeder $\varepsilon$-Umgebung von $a$ fast alle Folgenglieder liegen.*

Anschaulich bedeutet das natürlich einfach, dass sich die Folgenglieder beliebig dicht dem Grenzwert annähern. Beachte auch, dass dies insbesondere bedeutet, dass das Abändern oder Weglassen endlich vieler Folgenglieder nichts daran ändert, ob und gegen welchen Grenzwert eine Folge konvergiert. Der Startindex einer Folge wie in Definition 5.1 (a) ist für ihre Konvergenz also irrelevant.

**Beispiel 5.3.** Hier sind ein paar sehr wichtige Beispiele von Grenzwerten:

(a) Es ist offensichtlich, dass eine konstante Folge, in der alle Folgenglieder den gleichen Wert $a \in \mathbb{R}$ haben, gegen eben dieses $a$ konvergiert, d. h. dass $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$ gilt: Hier liegen ja sogar *alle* Folgenglieder in jeder beliebigen $\varepsilon$-Umgebung von $a$.

(b) Wir behaupten, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ gilt.

Um dies mit Hilfe der Definition 5.1 (b) zu beweisen, sei zunächst ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig vorgegeben; wir müssen zeigen, dass fast alle Glieder der Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ in der $\varepsilon$-Umgebung von 0 liegen. Dies ist aber sehr einfach: Nach der archimedischen Ordnung von $\mathbb{R}$ wie in Bemerkung 4.31 (a) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Mit einem solchen $n_0$ gilt dann für alle $n \geq n_0$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

wobei wir die Rechenregeln für Ungleichungen aus Lemma 4.16 verwendet haben. Fast alle Folgenglieder, nämlich alle $\frac{1}{n}$ für $n \geq n_0$, liegen also in der $\varepsilon$-Umgebung von 0. Damit gilt nach Definition $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Beachte, dass wir hierbei zu unserem $\varepsilon$ gar kein *konkretes* $n_0$ angegeben haben, das die Grenzwertbedingung erfüllt. Wir hätten dies hier leicht tun können, z. B.

$$n_0 := \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right\rfloor$$

mit der Gaußklammer aus Bemerkung 4.34, denn dann ist $n_0$ eine natürliche Zahl größer als $\frac{1}{\varepsilon}$, und damit wie oben $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Aber zur Überprüfung der Grenzwertbedingung ist es nicht nötig, ein konkretes $n_0$ anzugeben – erst recht nicht das *kleinste* (also „beste“) mögliche $n_0$. In der Tat wäre eine solche Bestimmung des kleinstmöglichen $n_0$ für die allermeisten Folgen auch sehr aufwendig oder sogar gar nicht praktisch durchführbar.

(c) (**Geometrische Folge**) Es sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$; wir behaupten, dass dann $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ gilt.

Für $q = 0$ ist dies natürlich klar, da wir dann eine ab dem ersten Glied konstante Folge haben. Ansonsten sei wie in (b) wieder $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig vorgegeben. Wir setzen $x := \frac{1}{|q|} - 1$, also $|q| = \frac{1}{1+x}$; wegen $|q| < 1$ ist natürlich $x > 0$. Nach Bemerkung 4.31 (a) gibt es nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$

mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon x$. Es gilt dann für alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
|q^n - 0| = |q|^n &\overset{(1)}{=} \frac{1}{(1+x)^n} \\
&\overset{(2)}{\leq} \frac{1}{1+nx} && \text{(mit } x > 0 \text{ nach der Bernoulli-Ungleichung aus Satz 4.20)} \\
&\overset{(3)}{<} \frac{1}{nx} && \text{(wegen } 1 > 0\text{)} \\
&\overset{(4)}{\leq} \frac{1}{n_0 x} && \text{(wegen } n \geq n_0\text{)} \\
&\overset{(5)}{<} \varepsilon, && \left(\text{wegen } \frac{1}{n_0} < \varepsilon x\right)
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

**Bemerkung 5.4** (Rückwärtsrechnen)**.** Wenn ihr euch die Rechnung in Beispiel 5.3 (c) angeschaut habt, werdet ihr vermutlich keine Probleme haben, sie nachzuvollziehen – aber euch sicher auch fragen, wie ihr darauf jemals selbst hättet kommen sollen. Insbesondere die Festlegungen von $x$ und $n_0$ vor Beginn der Rechnung fallen ja doch sehr vom Himmel.

Die Antwort hierauf ist einfach, dass ich den Beweis zunächst „rückwärts" durchgeführt habe, bevor ich angefangen habe, ihn aufzuschreiben. Ich habe also mit der Rechnung oben begonnen, bevor ich wusste, was z. B. $n_0$ später einmal sein würde, und mir etwa folgendes gedacht:

> *Okay, wir müssen sehen, dass $|q^n|$ für $n \to \infty$ kleiner als das gegebene $\varepsilon$ wird. Nehmen wir der Einfachheit halber erst einmal $q > 0$ an, dann müssen wir also eine Ungleichungskette $q^n < \cdots < \varepsilon$ finden. Bisher wissen wir nichts darüber, wie sich Potenzen mit wachsendem Exponenten verhalten ... aber wir hatten die Bernoulli-Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx$ gezeigt, die Potenzen durch lineare Funktionen abschätzen kann. Um die anwenden zu können, könnten wir vielleicht $q = 1+x$ setzen? Nein, das hilft nicht, denn dann würde die Ungleichung $q^n = (1+x)^n \geq 1+nx$ ja in die falsche Richtung gehen. Also versuchen wir lieber $q = \frac{1}{1+x}$, das dreht „$\geq$" zu „$\leq$" um. Moment, gibt es so ein $x$ überhaupt und erfüllt das die Voraussetzungen der Bernoulli-Ungleichung? Ja, die Gleichung ist ja äquivalent zu $x = \frac{1}{q} - 1$, und es ist $q < 1$, also $x > 0$, das passt. Damit haben wir die Schritte (1) und (2) oben.*
>
> *Jetzt müssen wir also $\frac{1}{1+nx}$ weiter abschätzen und sehen, warum dieser Term gegen 0 geht. Die 1 im Nenner stört. Wir könnten sicher auch mit ihr weiter rechnen, aber einfacher wäre der Ausdruck ohne sie. Es ist ja auch $\frac{1}{1+nx} < \frac{1}{nx}$, d. h. die Abschätzung geht in die richtige Richtung, und der neue Ausdruck $\frac{1}{nx}$ geht immer noch gegen 0. Also lassen wir die 1 in (3) einfach weg. Wie wir jetzt weiter machen können, wissen wir aus Beispiel 5.3 (b): Ist nun $n \geq n_0$ und $\frac{1}{n_0} < \varepsilon x$, so erhalten wir in (4) und (5) die gewünschte Abschätzung.*

Nachdem wir diese Überlegungen durchgeführt haben, können wir schließlich noch die Beträge wieder einarbeiten und den Beweis dann so aufschreiben wie oben.

Beachte, dass es natürlich viele verschiedene Arten gibt, derartige Abschätzungen durchzuführen. Aber nicht jede Abschätzung, die richtig ist, ist auch zielführend: So hätten wir z. B. in (3) oben auch versuchen können, den Term $nx$ wegzulassen und die Abschätzung mit $\frac{1}{1+nx} < \frac{1}{1}$ fortzusetzen. Diese Ungleichung ist genauso richtig wie (3), aber der neue Ausdruck $\frac{1}{1} = 1$ geht offensichtlich mit $n \to \infty$ nicht mehr gegen 0, so dass wir die gewünschte Folgerung $\cdots < \varepsilon$ jetzt nicht mehr erreichen können. Man muss beim Abschätzen also stets einen geeigneten Mittelweg finden und aufpassen, dass man weder zu wenig noch zu viel abschätzt. Dadurch erfordern derartige Rechnungen oft eine geschickte und vielleicht nicht ganz offensichtliche Idee. Am Anfang ist das sicher ungewohnt, aber im Laufe der Zeit werdet ihr ein gewisses Gefühl dafür entwickeln, welche Art von Abschätzung in welchen Fällen sinnvoll sein könnte. Aber so oder so – für das reine *Nachvollziehen* einer Abschätzung, die jemand anders gefunden hat (wie z. B. wenn ihr den Beweis in Beispiel 5.3 (c) lest und verstehen wollt), sind solche Ideen natürlich nicht notwendig.

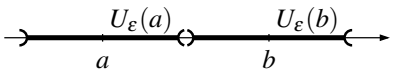
08

Wir wollen nun die bereits in Definition 5.1 versprochene Aussage beweisen, dass der Grenzwert einer Folge (sofern er existiert) immer eindeutig ist. Anschaulich ist diese Aussage natürlich sofort einleuchtend: Es können nicht fast alle Folgenglieder beliebig nahe an zwei verschiedenen Zahlen liegen. Denn wenn wir disjunkte $\varepsilon$-Umgebungen der beiden Grenzwerte wählen, kann jedes Folgenglied natürlich immer nur in einer der beiden Umgebungen liegen – und somit können nicht fast alle in *beiden* Umgebungen liegen. Formal aufgeschrieben sieht diese Beweisidee so aus:

**Lemma 5.5** (Eindeutigkeit des Grenzwerts)**.** *Jede Folge hat höchstens einen Grenzwert.*

*Beweis.* Angenommen, die Aussage wäre falsch, d. h. es gäbe eine Folge $(a_n)_n$ mit $a_n \to a$ und $a_n \to b$ für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$.

Wählen wir dann $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2}$ als den halben Abstand zwischen $a$ und $b$, so gilt wie im Bild rechts $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$, denn aus $x \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)$ würde mit der Dreiecksungleichung der Widerspruch




$$|a-b| = |a-x+x-b| \leq |a-x| + |x-b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a-b|$$

folgen.

Aber wegen $a_n \to a$ gilt $a_n \in U_\varepsilon(a)$ für fast alle $n$ (also für alle $n \geq n_1$ mit einem gewissen $n_1 \in \mathbb{N}$), und wegen $a_n \to b$ genauso $a_n \in U_\varepsilon(b)$ für fast alle $n$ (also für alle $n \geq n_2$ mit einem gewissen $n_2 \in \mathbb{N}$). Damit folgt auch $a_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)$ für fast alle $n$ (nämlich für alle $n$, bei denen beide Aussagen gelten, also für $n \geq \max(n_1, n_2)$), was ein Widerspruch zu $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ ist und somit das Lemma beweist. □

**Bemerkung 5.6.** Wir sehen im Beweis von Lemma 5.5, dass die „fast alle"-Notation den Vorteil hat, dass wir uns oft das explizite Arbeiten mit dem $n_0$ aus Definition 5.1 (b) (von dem wir ja meistens ohnehin nicht wirklich wissen müssen, welchen Wert es genau hat) sparen können. Die einzige Eigenschaft, die wir hier wirklich gebraucht haben, ist die: Wenn eine Aussage $A(n)$ für fast alle $n$ gilt, und eine weitere Aussage $B(n)$ ebenfalls für fast alle (aber nicht notwendig für die gleichen), dann gelten auch $A(n)$ und $B(n)$ zusammen für fast alle $n$ – nämlich für alle bis auf die endlich vielen Ausnahmen für $A(n)$ und $B(n)$.

Natürlich gibt es auch Folgen ohne Grenzwert. Die einfachste Möglichkeit dafür ist, dass ihre Glieder unbeschränkt wachsen und sich somit keiner Zahl annähern können. Dies wollen wir jetzt formal untersuchen.

**Definition 5.7** (Beschränkte Folgen)**.** Eine Folge $(a_n)_n$ heißt **beschränkt**, wenn die Menge ihrer Folgenglieder beschränkt ist, also wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit $|a_n| \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

**Lemma 5.8.** *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

*Beweis.* Es sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a$. Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $n_0$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon = 1$ und damit nach der Dreiecksungleichung auch

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

für alle $n \geq n_0$ gilt. Damit ist dann aber $|a_n| \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn wir

$$s := \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a|)$$

setzen. Also ist $(a_n)_n$ beschränkt. □

**Beispiel 5.9.**

(a) Die Folge

$$(a_n)_n = (1, 0, 2, 0, 3, 0, \ldots)$$

ist unbeschränkt (da die Menge $\mathbb{N}$ ihrer Folgenglieder nach Satz 4.30 unbeschränkt ist) und damit nach Lemma 5.8 divergent.

(b) Auch die geometrische Folge $(q^n)_n$ aus Beispiel 5.3 (c) ist für $|q| > 1$ unbeschränkt und damit divergent: Ist nämlich $s \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig, so können wir nach der archimedischen Ordnung von $\mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ wählen mit $n > \frac{s}{|q|-1}$, und erhalten mit der Bernoulli-Ungleichung

$$|q|^n = (1+|q|-1)^n \overset{4.20}{\geq} 1+n(|q|-1) > n(|q|-1) > s.$$

Wie rechnet man nun aber Grenzwerte konkret aus, wenn man nicht jedes Mal wieder auf die Definition zurückgehen möchte? Glücklicherweise gibt es dafür die Grenzwertsätze, die besagen, dass man Grenzwerte mit Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten vertauschen kann, und die damit oft eine konkrete Berechnung ermöglichen. Zum Beweis dieser Aussage benötigen wir zunächst ein Lemma.

**Definition 5.10** (Nullfolgen)**.** Eine Folge heißt **Nullfolge**, wenn sie gegen 0 konvergiert. Offensichtlich konvergiert eine Folge $(a_n)_n$ damit nach Definition genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn $(a_n - a)_n$ eine Nullfolge ist.

**Lemma 5.11.** *Ist $(a_n)_n$ eine beschränkte Folge und $(b_n)_n$ eine Nullfolge, so ist auch $(a_n b_n)_n$ eine Nullfolge.*

*Beweis.* Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Da $(a_n)_n$ beschränkt ist, gilt $|a_n| \leq s$ für ein $s \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Da $(b_n)_n$ eine Nullfolge ist, ist weiterhin $|b_n| < \frac{\varepsilon}{s}$ für fast alle $n$. Also gilt für fast alle $n$ auch die Abschätzung $|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < s \cdot \frac{\varepsilon}{s} = \varepsilon$, d. h. $(a_n b_n)_n$ ist eine Nullfolge. □

**Bemerkung 5.12** (Folgen mit Grenzwert ungleich 0)**.** Es sei $(a_n)_n$ eine Folge, die gegen einen Grenzwert $a \neq 0$ konvergiert. Eine unmittelbare, aber dennoch oft nützliche Folgerung aus der Grenzwertdefinition 5.1 ergibt sich, wenn wir dort $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$ setzen: Für fast alle $n$ ist dann $a_n \in U_\varepsilon(a)$, mit der Dreiecksungleichung nach unten aus Bemerkung 4.19 also

$$|a_n| \geq |a| - |a - a_n| > |a| - \varepsilon = \frac{|a|}{2}.$$

Hat eine Folge also einen Grenzwert $a \neq 0$, so sind insbesondere auch fast alle Folgenglieder ungleich 0 (und betragsmäßig sogar größer als $\frac{|a|}{2}$).

**Satz 5.13** (**Grenzwertsätze** für Folgen)**.** *Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei konvergente Folgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann gilt:*

(a) *$a_n + b_n \to a + b$ und $a_n - b_n \to a - b$.*

(b) *$a_n b_n \to ab$.*

(c) *Ist $b \neq 0$, so sind auch fast alle $b_n \neq 0$, und es gilt $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.*

*Beweis.*

(a) Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Wegen $a_n \to a$ und $b_n \to b$ gilt $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für fast alle $n$. Damit folgt für fast alle $n$ (siehe Bemerkung 5.6) mit der Dreiecksungleichung

$$|a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also wie behauptet $a_n + b_n \to a + b$. Die Aussage über die Differenz der Grenzwerte folgt natürlich genauso.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt zunächst

$$a_n b_n - ab = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n(b_n - b) + b(a_n - a). \tag{1}$$

Die Folge $(a_n)_n$ ist nach Voraussetzung konvergent und damit beschränkt nach Lemma 5.8. Weiterhin ist $b_n - b$ eine Nullfolge wegen $b_n \to b$. Also ist auch $(a_n(b_n - b))_n$, d. h. der erste Summand rechts in (1), nach Lemma 5.11 eine Nullfolge. Genauso ergibt sich, dass auch der zweite Summand $(b(a_n - a))_n$ eine Nullfolge ist. Damit ist (1) die Summe zweier Nullfolgen, nach (a) also ebenfalls eine Nullfolge. Dies zeigt $a_n b_n - ab \to 0$ und damit $a_n b_n \to ab$.

(c) Nach Bemerkung 5.12 sind mit $b \neq 0$ auch fast alle $b_n$ ungleich 0, so dass wir (nach evtl. Weglassen endlich vieler Glieder) die Quotientenfolge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$ betrachten können. Weil nach derselben Bemerkung dann sogar $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ und damit $\left|\frac{1}{b_n}\right| < \frac{2}{|b|}$ gilt, ist die Folge $\left(\frac{1}{b_n}\right)_n$ außerdem beschränkt. Schreiben wir also

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a_n b - a b_n}{b b_n} = \frac{a_n b - a b + a b - a b_n}{b b_n} = \frac{1}{b_n}(a_n - a) + \frac{a}{b b_n}(b - b_n), \tag{2}$$

so ergibt sich die Behauptung genauso wie in (b): $\left(\frac{1}{b_n}(a_n - a)\right)_n$ ist eine Nullfolge (nach Lemma 5.11 als Produkt der beschränkten Folge $\left(\frac{1}{b_n}\right)_n$ mit der Nullfolge $(a_n - a)_n$), analog ist auch $\left(\frac{a}{b b_n}(b - b_n)\right)_n$ eine Nullfolge. Damit ist (2) wieder die Summe zweier Nullfolgen, nach (a) also ebenfalls eine Nullfolge – woraus $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ folgt. □

**Beispiel 5.14** (Grenzwerte von Quotienten von Polynomen)**.** Wollen wir den Grenzwert der Folge $\left(\frac{2n^2}{n^2+1}\right)_n$ bestimmen, so können wir nicht direkt die Grenzwertsätze anwenden, da Zähler und Nenner natürlich unbeschränkt sind und damit nach Lemma 5.8 divergieren. Durch Kürzen mit $n^2$ können wir die Folgenglieder aber umschreiben, so dass wir den Grenzwert dann mit Satz 5.13 in den Quotienten, die Summe und das Produkt hineinziehen können und (mit Beispiel 5.3)

$$\frac{2n^2}{n^2+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}} \to \frac{2}{1+0\cdot 0} = 2 \quad \text{für } n \to \infty$$

erhalten. Auf die gleiche Art kann man offensichtlich den Grenzwert jeder Folge berechnen, die ein Quotient von zwei Polynomfunktionen in $n$ ist, indem man zuerst mit der höchsten auftretenden Potenz von $n$ kürzt.

**Bemerkung 5.15.** Beachte, dass Satz 5.13 nur angewendet werden kann, wenn beide Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ existieren – ansonsten macht der Satz keine Aussage. Eine Rechnung hinzuschreiben wie z. B.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+3} \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}} = 1 \cdot 1 = 1$$

(mit Verweis an der Stelle $(*)$ auf den Grenzwertsatz 5.13 (b)) ist daher eigentlich *nicht korrekt*, da wir bei $(*)$ ja noch nicht überprüft haben, ob die Grenzwerte der beiden einzelnen Brüche auch wirklich existieren. Man müsste also theoretisch zuerst die Grenzwerte von $\frac{n}{n+1}$ und $\frac{n+2}{n+3}$ separat berechnen (bzw. ihre Existenz zeigen), und könnte dann erst die obige Rechnung $(*)$ hinschreiben. Da dies aber deutlich mehr Schreibaufwand wäre und die Darstellung auch unübersichtlicher machen würde, wollen wir vereinbaren, dass wir die Grenzwertsätze in einer Rechnung wie oben auch schon benutzen dürfen, wenn wir erst *nachträglich* überprüfen, dass die Einzelgrenzwerte existieren.

**Aufgabe 5.16.** Bestimme die Grenzwerte (sofern sie existieren)

$$\text{(a)} \ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n^2+n}, \qquad \text{(b)} \ \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\binom{n}{3}}, \qquad \text{(c)} \ \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^3}.$$

Für (a) beweise man diesen Grenzwert zusätzlich direkt nach Definition, d. h. man gebe zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ an, so dass die Grenzwertbedingung aus Definition 5.1 (b) gilt.

**Aufgabe 5.17.** Zu einer gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ definieren wir die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ ihrer Mittelwerte durch

$$b_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Man zeige: Ist $(a_n)_n$ konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, so ist auch $(b_n)_n$ konvergent mit demselben Grenzwert $a$. (Hinweis: Zur Vereinfachung der Rechnung ist es nützlich, die Aussage zunächst für eine Nullfolge $(a_n)_n$ zu beweisen, und den allgemeinen Fall dann darauf zurückzuführen.)

Als Beispiele für divergente Folgen haben wir bisher nur unbeschränkte Folgen gesehen. Aber auch beschränkte Folgen können natürlich divergent sein, wie z. B. die Folge

$$\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}} = (1,-1,1,-1,\dots),$$

in der alle geraden Folgenglieder gleich 1 und alle ungeraden gleich $-1$ sind, so dass für die gesamte Folge kein Grenzwert existieren kann. Formal können wir dies mit dem Begriff der Teilfolgen und Häufungspunkte ausdrücken.

**Definition 5.18** (Umordnungen, Teilfolgen und Häufungspunkte)**.** Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

(a) Eine **Umordnung** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge der Form $(a_{\sigma(0)}, a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots) = (a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ für eine bijektive Abbildung $\sigma\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$. Sie entsteht also einfach durch eine beliebige Permutation aller Folgenglieder.

(b) Eine **Teilfolge** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge der Form $(a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots) = (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ für gewisse $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$, also eine Folge, die aus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch Auswählen bestimmter Folgenglieder unter Beibehaltung ihrer Reihenfolge entsteht.

(c) Eine Zahl $a\in\mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen $a$ konvergiert.

**Lemma 5.19** (Grenzwerte von Umordnungen und Teilfolgen)**.** *Konvergiert eine Folge $(a_n)_n$ gegen einen Grenzwert $a$, so konvergiert auch jede Umordnung und jede Teilfolge von $(a_n)_n$ gegen $a$.*

*Insbesondere hat eine konvergente Folge also genau einen Häufungspunkt, nämlich ihren Grenzwert.*

*Beweis.* Es sei $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Da die Folge $(a_n)_n$ gegen $a$ konvergiert, hat sie nur endlich viele Glieder, die außerhalb von $U_\varepsilon(a)$ liegen. Jede Umordnung oder Teilfolge von $(a_n)_n$ hat damit aber ebenfalls nur endlich viele Glieder außerhalb von $U_\varepsilon(a)$, und somit konvergiert eine solche Umordnung oder Teilfolge ebenfalls gegen $a$. □

**Beispiel 5.20.**

(a) Die oben betrachtete Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,-1,1,-1,\dots)$ besitzt die beiden konstanten Teilfolgen

$$(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (1,1,1,\dots)$$
$$\text{und}\qquad (a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (-1,-1,-1,\dots)$$

und damit die beiden Häufungspunkte 1 und $-1$. Sie ist also nach Lemma 5.19 divergent. In der Tat werden wir in Beispiel 5.23 (a) sehen, dass 1 und $-1$ auch die einzigen Häufungspunkte von $(a_n)_n$ sind.

(b) Für die Folge $(a_n)_n = (n+1)_n = (1,2,3,\dots)$ ist jede ihrer Teilfolgen unbeschränkt und damit nach Lemma 5.8 divergent. Also besitzt $(a_n)_n$ keine Häufungspunkte.

09

Zur konkreten Berechnung von Häufungspunkten sind oft die folgenden beiden Lemmata nützlich.

**Lemma 5.21** (Äquivalente Charakterisierung von Häufungspunkten)**.** *Eine Zahl $a\in\mathbb{R}$ ist genau dann ein Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_n$, wenn in jeder $\varepsilon$-Umgebung von $a$ unendlich viele Folgenglieder $a_n$ liegen.*

*Beweis.*

„⇒“: Konvergiert eine Teilfolge von $(a_n)_n$ gegen $a$, so liegen in jeder $\varepsilon$-Umgebung von $a$ fast alle Glieder der Teilfolge und somit insbesondere auch unendlich viele Glieder von $(a_n)_n$.

„⇐“: Wir konstruieren eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ der gewünschten Art wie folgt: Als Startindex nehmen wir $n_0 = 0$. Ist nun für ein $k\in\mathbb{N}_{>0}$ der Index $n_{k-1}$ bereits konstruiert, so wählen wir für das nächste Folgenglied ein $n_k > n_{k-1}$ mit $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$ (dies ist möglich, da in der $\frac{1}{k}$-Umgebung von $a$ nach Voraussetzung unendlich viele Folgenglieder liegen, also auch eines hinter $a_{n_{k-1}}$).

Die so konstruierte Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert dann gegen $a$: Ist $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ gegeben und $k_0\in\mathbb{N}_{>0}$ mit $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$, so ist $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \le \frac{1}{k_0} < \varepsilon$ für alle $k \ge k_0$. □

**Lemma 5.22** (Mischfolgen)**.** *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge sowie $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ zwei Teilfolgen, die zusammen die gesamte Folge ergeben, also so dass $\{n_k : k\in\mathbb{N}\}\cup\{m_k : k\in\mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ gilt. Man sagt in diesem Fall auch, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine **Mischfolge** von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist.*

*Dann ist eine Zahl $a\in\mathbb{R}$ genau dann ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn $a$ ein Häufungspunkt von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ oder $(a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist.*

*Beweis.* Eine Zahl $a$ ist nach Lemma 5.21 genau dann ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$, wenn in jeder $\varepsilon$-Umgebung von $a$ unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_n$ liegen. Da $(a_n)_n$ eine Mischfolge von $(a_{n_k})_k$ und $(a_{m_k})_k$ ist, ist dies natürlich äquivalent dazu, dass in jeder solchen $\varepsilon$-Umgebung unendlich viele Folgenglieder von $(a_{n_k})_k$ oder $(a_{m_k})_k$ liegen, also dass $a$ ein Häufungspunkt (mindestens) einer dieser beiden Teilfolgen ist. □

**Beispiel 5.23.**

(a) Die Folge $(a_n)_n = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Beispiel 5.20 (a) ist eine Mischfolge ihrer positiven und negativen Glieder, die konstant gleich 1 bzw. $-1$ sind. Aus Lemma 5.22 folgt also, dass $(a_n)_n$ genau die beiden Häufungspunkte 1 und $-1$ hat.

(b) Die divergente Folge $(a_n)_n = (1,0,2,0,3,0,\dots)$ aus Beispiel 5.9 (a) ist eine Mischfolge der Folge $(1,2,3,\dots)$ (die nach Beispiel 5.20 (b) keine Häufungspunkte hat) und der konstanten Folge 0 (die natürlich 0 als einzigen Häufungspunkt hat). Damit hat $(a_n)_n$ nach Lemma 5.22 den einzigen Häufungspunkt 0. Wir sehen also (im Gegensatz zu Lemma 5.19), dass eine Folge mit genau einem Häufungspunkt nicht notwendig konvergiert.

## 5.B Konvergenzkriterien für Folgen

Nicht in allen Fällen lässt sich die Berechnung von Grenzwerten mit Hilfe der Grenzwertsätze auf bereits bekannte zurückführen. Wir benötigen daher noch weitere Techniken zur Grenzwertbestimmung und beginnen mit einem einfachen Vergleichskriterium.

**Satz 5.24** (Verträglichkeit des Grenzwerts mit Ungleichungen)**.** *Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente Folgen mit $a_n\to a$ und $b_n\to b$. Dann gilt:*

(a) *Ist $a_n\le b_n$ für fast alle $n$, so auch $a\le b$.*

(b) *(**Einschachtelungssatz**) Ist $a=b$, konvergieren also beide Folgen gegen denselben Grenzwert, und ist $(c_n)_n$ eine weitere reelle Folge mit $a_n\le c_n\le b_n$ für fast alle $n$, so konvergiert auch $(c_n)_n$ gegen diesen Grenzwert $a$.*

*Beweis.*

(a) Angenommen, es wäre $a>b$. Wir setzen $\varepsilon := \frac{a-b}{2}$. Wegen $a_n\to a$ und $b_n\to b$ wäre dann (nach Bemerkung 5.6) für fast alle $n$

$$a_n\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon) \quad\text{und}\quad b_n\in(b-\varepsilon,b+\varepsilon).$$

Zusammensetzen liefert $a-\varepsilon<a_n\le b_n<b+\varepsilon$ für fast alle $n$, und damit $a-b<2\varepsilon$ im Widerspruch zu $\varepsilon=\frac{a-b}{2}$.

(b) Es sei $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Diesmal gilt wegen $a_n\to a$ und $b_n\to a$ für fast alle $n$

$$a_n\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon) \quad\text{und}\quad b_n\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon),$$

und damit $a-\varepsilon<a_n\le c_n\le b_n<a+\varepsilon$, also $c_n\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$. Da $\varepsilon>0$ beliebig war, folgt daraus wie behauptet $c_n\to a$. □

**Bemerkung 5.25.** Beachte, dass Satz 5.24 (a) *nicht* auch analog für die echte Ungleichung „$<$“ gilt: Ist z. B. $a_n=0$ und $b_n=\frac{1}{n}$ für alle $n\ge1$, so gilt zwar $a_n<b_n$ für alle $n$, aber die Grenzwerte beider Folgen sind natürlich gleich 0, d. h. es gilt nur $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ gemäß Satz 5.24 (a), aber nicht $\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

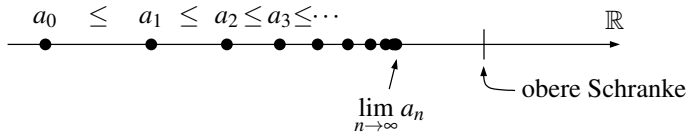
**Aufgabe 5.26.** Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

Alle unsere bisherigen Kriterien haben den entscheidenden Nachteil, dass sie Grenzwerte nur auf andere bereits bekannte zurückführen können. In der Praxis werden aber viele Größen wie z. B. Quadratwurzeln, $\pi$, e oder der Sinus und Kosinus einer gegebenen Zahl überhaupt erst als Grenzwerte geeigneter Folgen konstruiert. Die Konvergenz solcher Folgen werden wir also mit unseren bisherigen Methoden nie nachweisen können.

Wir benötigen daher auch Kriterien, mit denen man die Konvergenz einer Folge selbst dann nachweisen kann, wenn man ihren Grenzwert noch nicht vorher kennt oder gleichzeitig aus bereits bekannten anderen Grenzwerten berechnen kann. Im Gegensatz zu unseren Ergebnissen aus Abschnitt 5.A, die unverändert auch in $\mathbb{Q}$ gelten würden, handelt es sich hierbei nun um Resultate, die ganz zentral das Supremumsaxiom verwenden und daher nur in $\mathbb{R}$ gelten.

Das erste Kriterium dieser Art, das wir jetzt behandeln wollen, ist für Folgen anwendbar, deren Folgenglieder mit wachsendem $n$ immer größer werden. Ist eine solche Folge nach oben beschränkt, so ist anschaulich klar, dass die Folgenglieder wie im Bild unten für wachsendes $n$ „immer näher zusammen rücken“ müssen, was letztlich zur Konvergenz der Folge führen sollte. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.




**Definition 5.27** (Monotone und beschränkte Folgen)**.** Es sei $(a_n)_n$ eine Folge.

(a) Die Folge $(a_n)_n$ heißt **monoton wachsend** oder **steigend**, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ und damit $a_m \leq a_n$ für alle $m \leq n$ gilt. Gilt sogar $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt $(a_n)_n$ **streng monoton wachsend** oder **steigend**.

Analog heißt $(a_n)_n$ **(streng) monoton fallend**, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ (bzw. $a_n > a_{n+1}$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Analog zu Definition 5.7 heißt $(a_n)_n$ **nach oben beschränkt**, wenn die Menge ihrer Folgenglieder nach oben beschränkt ist, also wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq s$ für alle $n$.

Analog heißt $(a_n)_n$ **nach unten beschränkt**, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \geq s$ für alle $n$; die Folge ist also genau dann beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

**Satz 5.28** (**Monotoniekriterium**)**.** *Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ ist konvergent. (Analog ist dann natürlich auch jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge konvergent.)*

*Beweis.* Da die Menge $M := \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ aller Folgenglieder nicht leer und nach oben beschränkt ist, existiert $a := \sup M$ nach dem Supremumsaxiom. Wir behaupten, dass $a_n \to a$.

Es sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Da $a$ die kleinste obere Schranke für $M$ ist, ist $a-\varepsilon$ keine obere Schranke mehr. Es gibt also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > a-\varepsilon$. Für alle $n \geq n_0$ folgt dann

$$\begin{aligned} a-\varepsilon < a_{n_0} &\leq a_n && \text{(Monotonie)} \\ &\leq a && (a \text{ ist obere Schranke der Folgenglieder}) \\ &< a+\varepsilon, \end{aligned}$$

also $|a_n - a| < \varepsilon$. Damit konvergiert $(a_n)_n$ gegen $a$. □

Als Beispiel für die Anwendung des Monotoniekriteriums wollen wir nun als Erstes zeigen, dass jede nicht-negative reelle Zahl eine Quadratwurzel besitzt. Auch wenn euch diese Tatsache aus der

Schule vielleicht „offensichtlich“ erscheint (und wir sie in Bemerkung 4.37 auch schon ohne Beweis benutzt haben), folgt sie dennoch nicht unmittelbar aus den Axiomen für $\mathbb{R}$ und muss damit bewiesen werden. Eine Möglichkeit dafür ist, eine Folge $(a_n)_n$ zu konstruieren, deren Konvergenz wir beweisen können, und deren Grenzwert nur die gewünschte Wurzel sein kann. Die Konstruktion von $(a_n)_n$ ist dabei *rekursiv*, d. h. wir können (analog zur vollständigen Induktion) nicht direkt $a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ angeben, sondern legen nur das erste Folgenglied $a_0$ fest und geben dann eine Formel an, mit der für alle $n \in \mathbb{N}$ aus $a_n$ das nächste Folgenglied $a_{n+1}$ berechnet werden kann.

**Lemma 5.29** (Existenz von Wurzeln, *Heron-Verfahren*)**.** *Es seien $c \in \mathbb{R}_{>0}$ und $a_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben. Dann konvergiert die mit diesem Startwert $a_0$ rekursiv definierte Folge $(a_n)_n$ mit*

$$a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{$*$}$$

*gegen ein $a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $a^2 = c$.*

*Beweis.* Wir zeigen die Konvergenz von $(a_n)_n$ mit dem Monotoniekriterium, indem wir nachweisen, dass die Folge nach unten beschränkt und monoton fallend ist.

Aus der Rekursionsvorschrift $(*)$ ist offensichtlich, dass mit $c$ und $a_0$ auch alle Folgenglieder positiv sind. Die Folge ist also sicher durch 0 nach unten beschränkt. In der Tat gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ sogar

$$a_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)^2 = \frac{1}{4}a_n^2 + \frac{1}{2}c + \frac{1}{4}\frac{c^2}{a_n^2} = \frac{1}{4}a_n^2 - \frac{1}{2}c + \frac{1}{4}\frac{c^2}{a_n^2} + c = \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{c}{a_n}\right)^2 + c \geq c$$

und somit $a_n^2 \geq c$ für alle $n \geq 1$. Daraus folgt für alle $n \geq 1$ aber auch

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c}{a_n^2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c}{c}\right) = 1,$$

und damit $a_{n+1} \leq a_n$, die Folge ist also (mit Ausnahme evtl. des ersten Folgengliedes) monoton fallend. Damit konvergiert $(a_n)_n$ nach Satz 5.28, d. h. der Grenzwert $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert.

Um Informationen über den Grenzwert $a$ zu bekommen, multiplizieren wir die Rekursionsgleichung $(*)$ zunächst mit $a_n$ und erhalten $a_{n+1}a_n = \frac{1}{2}(a_n^2 + c)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gehen wir in dieser Gleichung nun zum Grenzwert über, so ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n^2 + c\right), \quad \text{und damit} \quad a^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + c\right),$$

da die Folge $(a_{n+1})_n = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ gegenüber $(a_n)_n = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ ja nur um ein Folgenglied verschoben ist und somit als Teilfolge von $(a_n)_n$ ebenfalls gegen $a$ konvergiert. Auflösen dieser Gleichung liefert nun sofort wie behauptet $a^2 = c$. Da alle $a_n$ positiv sind, ergibt Satz 5.24 (a) außerdem auch $a \geq 0$; in der Tat ist wegen $a^2 = c > 0$ dann sogar $a > 0$. □

**Folgerung und Definition 5.30.** *Zu jedem $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a^2 = c$. Wir nennen sie die **(Quadrat-)Wurzel** aus $c$ und schreiben sie als $\sqrt{c}$.*

*Beweis.* Für $c = 0$ ist die Aussage mit $a = 0$ klar, daher können wir im Folgenden $c > 0$ annehmen. Die Existenz einer Wurzel $a$ folgt dann direkt aus Lemma 5.29. Das Polynom $x \mapsto x^2 - c$ hat nun die positive Nullstelle $a$ und die negative Nullstelle $-a$, und kann als Polynom vom Grad 2 nach Satz 3.19 (b) keine weiteren Nullstellen haben. Also ist die Wurzel $a$ auch eindeutig bestimmt. □

**Bemerkung 5.31** (Grenzwert rekursiver Folgen)**.** Das Monotoniekriterium bietet sich oft für rekursiv definierte Folgen $(a_n)_n$ wie in Lemma 5.29 an, da die Monotonie ja durch den Vergleich von $a_{n+1}$ und $a_n$ nachgewiesen werden kann. Sehr nützlich ist dabei auch der Trick, wie im Beweis des Lemmas in der Rekursionsgleichung zum Grenzwert überzugehen, um eine bestimmende Gleichung für den Grenzwert zu finden.

**Beispiel 5.32.** Die folgende Tabelle zeigt den Anfang der Folge aus Lemma 5.29 im Fall $c = 2$ und $a_0 = 1$. Beachte, dass die Folge „extrem schnell“ konvergiert und daher sehr gut zur näherungsweisen Berechnung von Wurzeln geeignet ist – z. B. wenn man einem Computer, der bisher nur weiß, wie man die vier Grundrechenarten ausführt, das Wurzelziehen beibringen möchte. In der Tat kann

man zeigen, dass jeder Schritt die Anzahl der korrekten Dezimalstellen (die in der Tabelle unten fett gedruckt sind) näherungsweise verdoppelt. Wir werden uns in dieser Vorlesung jedoch nicht weiter mit der „Geschwindigkeit“ der Konvergenz von Folgen beschäftigen; derartige Fragestellungen werdet ihr später in den Vorlesungen zur Praktischen Mathematik untersuchen.

| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 0 | **1,**000000000000000000000000000000000000000000000000... |
| 1 | **1,**500000000000000000000000000000000000000000000000... |
| 2 | **1,41**666666666666666666666666666666666666666666666666... |
| 3 | **1,41421**568627450980392156862745098039215686274509 8... |
| 4 | **1,41421356237**468991062629557889013491011655962211 5... |
| 5 | **1,41421356237309504880168**962350253024361498192577 6... |
| 6 | **1,41421356237309504880168872420969807856967187537 7**... |

**Aufgabe 5.33.** Untersuche, ob die folgenden rekursiv definierten Folgen $(a_n)_n$ konvergieren, und bestimme im Fall der Konvergenz den Grenzwert.

(a) $a_0 = 1$, $a_n = \sqrt{a_{n-1}+6}$ für alle $n \geq 1$;

(b) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2})$ für alle $n \geq 2$.

(Hinweis: Leite zunächst eine Formel für die Differenz $a_n - a_{n-1}$ zweier aufeinander folgender Glieder her.)

**Aufgabe 5.34.** Es seien $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige, dass die Quadratwurzel die folgenden Eigenschaften hat:

(a) Gilt $a \leq b$, so auch $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ (Monotonie).

(b) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

(c) $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

(d) Konvergiert eine Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ gegen $a$, so gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

**Aufgabe 5.35.**

(a) Man zeige: Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ und $k, n \in \mathbb{N}$ ist $(a+b\sqrt{k})^n + (a-b\sqrt{k})^n \in \mathbb{Z}$.

(b) Bestimme die 100. Nachkommastelle (im Dezimalsystem) von $(2+\sqrt{5})^{2024}$.

**Aufgabe 5.36.** Zeige, dass jedes (nicht-leere) offene Intervall in $\mathbb{R}$ unendlich viele rationale und unendlich viele irrationale Zahlen enthält.

**Aufgabe 5.37** (Existenz höherer Wurzeln in $\mathbb{R}$)**.** In dieser Aufgabe wollen wir analog zu Lemma 5.29 und Folgerung 5.30 beweisen, dass jede nicht-negative reelle Zahl $c$ für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ eine eindeutige $k$-te Wurzel besitzt. Wir definieren dazu für ein gegebenes $c \in \mathbb{R}_{>0}$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und einen beliebigen positiven Startwert $a_0$ die Folge $(a_n)_n$ rekursiv durch

$$a_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)\,a_n + \frac{c}{a_n^{k-1}}\right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Man beweise nun:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_{n+1}^k \geq c$.

(b) Die Folge $(a_n)_n$ ist ab dem zweiten Folgenglied monoton fallend.

(c) Zu jeder Zahl $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt es ein eindeutiges $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a^k = c$. Wir nennen dieses $a$ die $k$-te **Wurzel** aus $c$ und schreiben sie als $\sqrt[k]{c}$.

**Aufgabe 5.38.** Es sei $M \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Zeige, dass für $s \in \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $s = \sup M$.

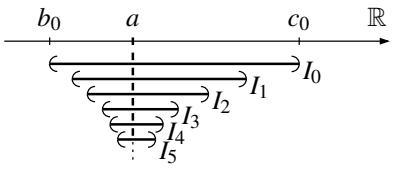
(b) $s$ ist eine obere Schranke für $M$, und es gibt eine Folge $(a_n)_n$ von Elementen aus $M$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s$.

10

Kombiniert man die Monotoniekriterien für wachsende und fallende Folgen miteinander, kann man einen Grenzwert wie folgt von beiden Seiten einschachteln.

**Satz 5.39 (Intervallschachtelung).** *Gegeben sei für alle $n \in \mathbb{N}$ ein abgeschlossenes Intervall $I_n = [b_n, c_n]$ in $\mathbb{R}$, so dass $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ (also die Intervalle ineinander liegen) und $\lim_{n\to\infty}(c_n - b_n) = 0$ (also die Längen der Intervalle gegen 0 konvergieren).*

*Dann gibt es genau ein $a \in \mathbb{R}$, das in allen diesen Intervallen liegt, und es gilt $b_n \to a$ und $c_n \to a$.*




*Beweis.* Die Folge $(b_n)_n$ der unteren Intervallgrenzen ist monoton wachsend und nach oben beschränkt (z. B. durch $c_0$), nach dem Monotoniekriterium aus Satz 5.28 also konvergent. Genauso ist $(c_n)_n$ monoton fallend und nach unten beschränkt, und damit ebenfalls konvergent. Da die Längen der Intervalle nach Voraussetzung gegen 0 konvergieren, folgt nach Satz 5.13 also

$$\lim_{n\to\infty} c_n - \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(c_n - b_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Es sei $a := \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$ der gemeinsame Grenzwert dieser beiden Folgen.

Nach dem Beweis von Satz 5.28 ist $a$ eine obere Schranke für alle $b_n$ und eine untere Schranke für alle $c_n$. Es gilt also $a \in [b_n, c_n] = I_n$ für alle $n$. Ist umgekehrt $a' \in \mathbb{R}$ mit $a' \in I_n$ und damit $b_n \le a' \le c_n$ für alle $n$, so folgt daraus durch Grenzwertbildung mit Satz 5.24 auch $a \le a' \le a$, also $a' = a$. Somit gibt es genau eine Zahl in allen gegebenen Intervallen, nämlich $a$. □

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir analog zu den uneigentlichen Suprema in Bemerkung 4.38 auch *uneigentliche Grenzwerte* definieren, also festlegen, was es heißt, dass eine Folge „den Grenzwert $\infty$ besitzt“. Dies hat den Vorteil, dass viele Aussagen über konvergente Folgen mit gewöhnlichen Grenzwerten in $\mathbb{R}$ auf diesen Fall verallgemeinert werden können.

**Definition 5.40** (Uneigentliche Grenzwerte von Folgen)**.** Für eine Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ schreiben wir $a_n \to \infty$ bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, wenn

$$\forall s \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0 \colon a_n > s,$$

also wenn zu jeder vorgegebenen Schranke $s$ fast alle Folgenglieder größer als $s$ sind. Analog definiert man die Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Beachte, dass derartige Folgen natürlich insbesondere unbeschränkt und damit nach Lemma 5.8 divergent sind. Man bezeichnet sie als **bestimmt divergent** und nennt $\infty$ bzw. $-\infty$ einen **uneigentlichen Grenzwert**. Ist $(a_n)_n$ divergent und besitzt nicht in obigem Sinne den Grenzwert $\infty$ oder $-\infty$, so nennt man $(a_n)_n$ **unbestimmt divergent**.

**Beispiel 5.41.**

(a) Die Folge $(a_n)_n = (1, 2, 3, \dots)$ ist bestimmt divergent mit uneigentlichem Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(b) Die Folge $(b_n)_n = (1, 0, 2, 0, 3, 0, \dots)$ aus Beispiel 5.9 (a) ist unbestimmt divergent (da z. B. nicht fast alle Folgenglieder größer als 1 sind).

**Bemerkung 5.42** (Grenzwertsätze für uneigentliche Grenzwerte)**.** Die Grenzwertsätze aus Satz 5.13 gelten auch für uneigentliche Grenzwerte wie in Definition 5.40, wenn man die formalen Rechenregeln für $\infty$

$$\begin{aligned} a+\infty &= \infty \quad \text{für } a \in \mathbb{R}, \\ \infty+\infty &= \infty, \\ a \cdot \infty &= \infty \quad \text{für } a \in \mathbb{R}_{>0}, \\ \infty \cdot \infty &= \infty, \\ \frac{a}{\infty} &= 0 \quad \text{für } a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und analog für $-\infty$ bzw. $a \in \mathbb{R}_{<0}$ definiert. Die Beweise dieser Aussagen sind letztlich analog zu denen von Satz 5.13, jedoch in den einzelnen Fällen immer etwas unterschiedlich, da die Bedingung für den Grenzwert $\infty$ aus Definition 5.40 ja formal anders aussieht als die eines endlichen Grenzwerts in Definition 5.1. Wir werden die Beweise hier nur exemplarisch in Aufgabe 5.43 betrachten.

Beachte aber, dass die Grenzwertsätze auch weiterhin keine Aussage liefern, wenn eine der betrachteten Folgen unbestimmt divergent ist oder sich Ausdrücke der Form $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ergeben, die sich nicht sinnvoll definieren lassen.

**Aufgabe 5.43.** Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei reelle Zahlenfolgen.

(a) Man zeige: Gilt $a_n \to a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $b_n \to \infty$, so ist auch $a_n b_n \to \infty$.

(b) Man zeige: Gilt $a_n \to \infty$ und $b_n \to \infty$, so ist auch $a_n + b_n \to \infty$.

(c) Kann man in (b) die Bedingung des Grenzwerts $\infty$ auch durch „nach oben unbeschränkt“ ersetzen, d. h. gilt für nach oben unbeschränkte Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ auch, dass $(a_n + b_n)_n$ nach oben unbeschränkt ist?

**Bemerkung 5.44** (Monotoniekriterium mit uneigentlichem Grenzwert)**.** Auch das Monotoniekriterium aus Satz 5.28 lässt sich auf eine Variante mit uneigentlichen Grenzwerten erweitern: Ist eine reelle Folge $(a_n)_n$ zwar monoton wachsend, aber nicht nach oben beschränkt, so gibt es zu jedem $s \in \mathbb{R}$ zunächst ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > s$, und wegen der Monotonie dann auch mit $a_n > s$ für alle $n \geq n_0$. Nach Definition 5.40 ist damit dann also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Wir können Satz 5.28 also dahingehend verallgemeinern, dass jede monotone reelle Folge einen evtl. uneigentlichen Grenzwert in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ hat, also konvergent oder bestimmt divergent ist.

## 5.C Limes superior und inferior

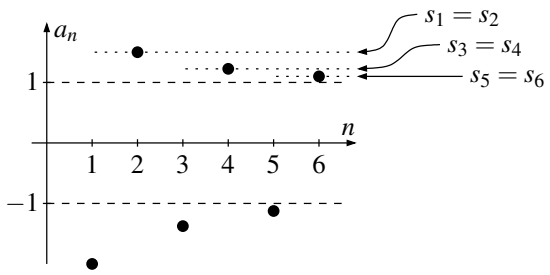
Bisher haben wir das Verhalten einer Folge $(a_n)_n$ für $n \to \infty$ in der Regel durch ihren Grenzwert beschrieben. Selbst wenn wir hierbei uneigentliche Grenzwerte wie in Definition 5.40 zulassen, funktioniert dies aber natürlich nicht bei unbestimmt divergenten Folgen, die keinen solchen Grenzwert besitzen.

Um solche Folgen zu untersuchen, können wir wie in Definition 5.18 (c) versuchen, auf Häufungspunkte auszuweichen. In der Tat wollen wir jetzt zeigen, dass *jede* Folge (zumindest im uneigentlichen Sinne) auch wirklich mindestens einen Häufungspunkt besitzt. Der Einfachheit halber betrachten wir hierfür zunächst nur beschränkte reelle Folgen, deren Häufungspunkte dann also in $\mathbb{R}$ liegen müssen. In diesem Fall werden wir in Folgerung 5.48 sehen, dass die folgende Konstruktion stets einen Häufungspunkt liefert – und zwar sogar einen ganz bestimmten, nämlich den größten.

**Konstruktion 5.45.** Es sei $(a_n)_n$ eine beschränkte reelle Folge. Wie im Bild unten für die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = (-1)^n(1+\frac{1}{n})$ dargestellt konstruieren wir nun die Hilfsfolge $(s_n)_n$ durch

$$s_n := \sup\{a_k : k \geq n\},$$

d. h. wir betrachten das Supremum aller Folgenglieder, wobei wir aber für $s_n$ erst beim $n$-ten Folgenglied anfangen.




Beachte dabei, dass die Mengen $\{a_k : k \geq n\}$ nach Voraussetzung beschränkt sind und die Suprema $s_n$ damit nach dem Supremumsaxiom in $\mathbb{R}$ existieren. Außerdem folgt aus der Beschränktheit der Folgenglieder, dass auch $(s_n)_n$ eine beschränkte Folge ist.

Darüber hinaus ist die Folge $(s_n)_n$ monoton fallend: Die obere Schranke $s_n$ der Menge $\{a_k : k \geq n\}$ ja auch eine obere Schranke der Teilmenge $\{a_k : k \geq n+1\} \subset \{a_k : k \geq n\}$ und muss damit größer oder gleich der kleinsten oberen Schranke $s_{n+1}$ von $\{a_k : k \geq n+1\}$ sein – d. h. es ist $s_{n+1} \leq s_n$.

Wir haben also gesehen, dass $(s_n)_n$ eine monoton fallende und (nach unten) beschränkte reelle Folge ist. Nach dem Monotoniekriterium aus Satz 5.28 besitzt sie also einen Grenzwert. Im oben dargestellten Beispiel ist dieser Grenzwert offensichtlich 1. Da die Häufungspunkte unserer Beispielfolge nach dem Mischfolgenlemma 5.22 genau $\pm 1$ sind, ist der Grenzwert von $(s_n)_n$ hier also gerade der größte Häufungspunkt von $(a_n)_n$. Bevor wir zeigen, dass dies immer der Fall ist, geben wir der so konstruierten Zahl noch einen Namen.

**Definition 5.46** (Limes superior und inferior)**.** Für eine beschränkte reelle Folge $(a_n)_n$ definieren wir

$$\text{den } \textbf{Limes superior} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \big(\sup\{a_k : k \geq n\}\big)$$

$$\text{und} \quad \text{den } \textbf{Limes inferior} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \big(\inf\{a_k : k \geq n\}\big).$$

In der Literatur sind hierfür auch die Schreibweisen $\overline{\lim} a_n$ bzw. $\underline{\lim} a_n$ üblich.

Das folgende Lemma zeigt, dass sich der Limes superior (und analog der Limes inferior) in gewissem Sinne wie eine „Mischung“ aus einem Grenzwert und einem Häufungspunkt verhält: Während für einen Grenzwert $a$ ja in jeder $\varepsilon$-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ fast alle Folgenglieder, für einen Häufungspunkt nach Lemma 5.21 aber nur unendlich viele Glieder liegen müssen, ist der Limes superior die (eindeutig bestimmte) Zahl $a$, für die für alle $\varepsilon$ fast alle Folgenglieder kleiner als $a+\varepsilon$, und unendlich viele größer als $a-\varepsilon$ sind.

**Lemma 5.47** (Äquivalente Charakterisierung des Limes superior)**.** *Es seien $(a_n)_n$ eine beschränkte reelle Folge und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt $a = \limsup_{n\to\infty} a_n$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) *Für fast alle $n$ ist $a_n < a + \varepsilon$.*

(b) *Für unendlich viele $n$ ist $a_n > a - \varepsilon$.*

*(Eine analoge Aussage gilt natürlich auch für den Limes inferior.)*

*Beweis.* Wie in Konstruktion 5.45 sei $s_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$, so dass also $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$ gilt. Weiterhin sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

„$\Rightarrow$“: Es gelte $s_n \to a$, also $s_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ für fast alle $n$. Wir müssen (a) und (b) zeigen.

Da $s_n$ eine obere Schranke für $\{a_k : k \geq n\}$ (also insbesondere für $a_n$) ist, gilt $a_n \leq s_n < a+\varepsilon$ für fast alle $n$. Dies zeigt (a).

Um (b) zu zeigen, nehmen wir an, es gäbe nur endlich viele $n$ mit $a_n > a-\varepsilon$. Dann gäbe es also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leq a-\varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, d. h. $a-\varepsilon$ wäre eine obere Schranke für alle

diese Folgenglieder. Daraus folgt dann aber auch $s_n \leq a - \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, im Widerspruch zu $s_n \to a$.

„$\Leftarrow$“: Wir setzen nun (a) und (b) voraus und müssen $s_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ für fast alle $n$ zeigen.

Nach (a) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n < a + \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Damit ist für diese $n$ auch $s_n = \sup\{a_k : k \geq n\} \leq a + \frac{\varepsilon}{2} < a + \varepsilon$.

Weiterhin gibt es nach (b) zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $k \geq n$ mit $a_k > a - \varepsilon$, woraus natürlich auch $s_n = \sup\{a_k : k \geq n\} > a - \varepsilon$ folgt.

Insgesamt gilt also $s_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ für fast alle $n$. □

Aus diesem Lemma ergibt sich nun die folgende wichtige Charakterisierung des Limes superior (und inferior), mit der man diese Zahl oft sehr einfach bestimmen kann.

**Folgerung 5.48.** *Für jede beschränkte reelle Folge $(a_n)_n$ ist $\limsup_{n\to\infty} a_n$ der größte Häufungspunkt von $(a_n)_n$. (Analog ist dann natürlich $\liminf_{n\to\infty} a_n$ der kleinste Häufungspunkt von $(a_n)_n$.)*

*Insbesondere besitzt also jede beschränkte reelle Folge einen Häufungspunkt (**Satz von Bolzano-Weierstraß** für $\mathbb{R}$).*

*Beweis.* Es seien $a = \limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus (a) und (b) von Lemma 5.47 folgt dann $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ für unendlich viele $n$, d. h. nach Lemma 5.21 ist $a$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$. Andererseits ist aber kein $b > a$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$: Setzen wir nämlich $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$, so ist $a + \varepsilon = b - \varepsilon$, und somit gilt nach Lemma 5.47 (a) für fast alle $n$

$$a_n < a + \varepsilon = b - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad a_n \notin (b-\varepsilon, b+\varepsilon).$$

Damit kann $b$ kein Häufungspunkt von $(a_n)_n$ sein. □

**Beispiel 5.49.**

(a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ mit $a_n = (-1)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ist eine Mischfolge aus den geraden Gliedern $a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \to 1$ und den ungeraden Gliedern $a_{2n+1} = -\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) \to -1$, sie hat nach Lemma 5.22 also die einzigen Häufungspunkte 1 und $-1$. Aus Folgerung 5.48 ergibt sich damit sofort $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.

(b) Ist $(a_n)_n$ eine konvergente reelle Folge, so ist ihr Grenzwert $a$ nach Lemma 5.19 der einzige Häufungspunkt. Also ist dann $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = a$ nach Folgerung 5.48.

Ist umgekehrt $(a_n)_n$ eine beschränkte reelle Folge mit $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n =: a$, so folgt aus Lemma 5.47 (a) für alle $\varepsilon > 0$, dass $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ für fast alle $n$ ist – wobei sich die erste Ungleichung aus $\liminf_{n\to\infty} a_n = a$ und die zweite aus $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$ ergibt. Also ist $(a_n)_n$ dann konvergent mit Grenzwert $a$.

**Aufgabe 5.50.** Berechne $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$ für $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}+(-1)^n \cdot n}$.

**Aufgabe 5.51.**

(a) Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei beschränkte Folgen positiver Zahlen. Zeige, dass

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n,$$

und gib ein Beispiel dafür an, dass hier im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

(b) Beweise, dass in (a) jedoch stets die Gleichheit gilt, wenn $(a_n)_n$ oder $(b_n)_n$ konvergent ist.

**Bemerkung 5.52** (Uneigentliche Werte für Limes superior und inferior)**.** Lässt man für Supremum, Infimum und Grenzwerte wie in Bemerkung 4.38 und Definition 5.40 formal auch $\pm\infty$ zu, so kann man den Limes superior und Limes inferior nach Bemerkung 5.44 genau wie in Definition 5.46 auch für beliebige reelle Folgen konstruieren und erhält dann Werte in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

**Aufgabe 5.53.** Zeige, dass die Aussage von Folgerung 5.48 auch für beliebige reelle Folgen richtig ist, wenn man wie in Bemerkung 5.52 die uneigentlichen Werte $\pm\infty$ für Häufungspunkte sowie den Limes superior und inferior zulässt.

Insbesondere gibt es also auch vom Satz von Bolzano-Weierstraß die erweiterte Form, dass jede (nicht notwendig beschränkte) reelle Folge einen (evtl. uneigentlichen) Häufungspunkt hat.

11

## 5.D Mächtigkeiten von Mengen

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch ein Thema behandeln, das wir auch schon deutlich früher hätten ansprechen können, aber das durch unsere Ergebnisse zu Folgen nun einfacher zu untersuchen ist: die Frage nach der „Größe“ von Mengen. Gibt es zu zwei Mengen $M$ und $N$ eine bijektive Abbildung $f\colon M \to N$ und damit wie im rechten Bild von Definition 2.8 eine 1:1-Beziehung zwischen ihren Elementen, so können wir uns diese beiden Mengen anschaulich als „gleich groß“ vorstellen. Ist z. B. $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine endliche Menge mit $n$ Elementen, so ist $N = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ (da $f$ surjektiv ist und somit alle Elemente von $N$ trifft) – und in dieser Aufzählung der Elemente von $N$ steht auch kein Element doppelt, da $f$ injektiv ist. Also hat $N$ dann ebenfalls $n$ Elemente, d. h. genauso viele Elemente wie $M$.

Wir wollen dieses Konzept nun für unendliche Mengen untersuchen. Ist es auch in diesem Fall noch sinnvoll, sich zwei Mengen $M$ und $N$ als „gleich groß“ vorzustellen, wenn eine bijektive Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen ihnen existiert? Gibt es überhaupt „verschieden große unendliche Mengen“? Da diese Frage intuitiv nicht mehr besonders gut zugänglich ist, sollten wir natürlich zunächst erst einmal exakt definieren, worüber wir reden wollen.

**Definition 5.54** (Gleichmächtige und abzählbare Mengen)**.**

(a) Zwei Mengen $M$ und $N$ heißen **gleichmächtig**, wenn es zwischen ihnen eine bijektive Abbildung $f\colon M \to N$ gibt.

(b) Eine Menge $M$ heißt …

- **abzählbar unendlich**, wenn sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist, also wenn es eine bijektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to M$ gibt.
- **abzählbar**, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist.
- **überabzählbar**, wenn sie nicht abzählbar ist.

**Bemerkung 5.55.** Die Gleichmächtigkeit erfüllt formal die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation:

(a) Jede Menge $M$ ist gleichmächtig zu sich selbst (mit der Identität $\mathrm{id}_M\colon M \to M$).

(b) Ist $M$ gleichmächtig zu $N$, so ist auch $N$ gleichmächtig zu $M$ (denn mit einer bijektiven Abbildung $f\colon M \to N$ ist nach Aufgabe 2.25 auch ihre Umkehrung $f^{-1}\colon N \to M$ bijektiv).

(c) Ist $M$ gleichmächtig zu $N$ und $N$ gleichmächtig zu $P$, so ist auch $M$ gleichmächtig zu $P$ (denn die Verkettung bijektiver Abbildungen ist nach Aufgabe 2.25 wieder bijektiv).

Man könnte daher versucht sein zu sagen, dass die Gleichmächtigkeit eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Mengen ist. Dies ist jedoch nicht ganz korrekt, da wir wie in Bemerkung 1.13 erläutert keine „Menge aller Mengen“ bilden können.

**Beispiel 5.56.**

(a) Wie wir am Anfang dieses Abschnitts gesehen haben, sind zwei endliche Mengen $M$ und $N$ genau dann gleichmächtig, wenn sie gleich viele Elemente haben, also wenn $|M| = |N|$ gilt. Insbesondere ist eine endliche Menge also nie gleichmächtig zu einer echten Teilmenge von ihr: Wenn wir von einer endlichen Menge Elemente entfernen, wird sie in diesem Sinne „kleiner“ – was natürlich nicht allzu überraschend sein sollte.

(b) Für unendliche Mengen ist dies jedoch falsch: Die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ist gleichmächtig zu ihrer echten Teilmenge $\mathbb{N}\setminus\{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$, z. B. durch die bijektive Abbildung

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\setminus\{0\},\ n \mapsto n+1,$$

die jede Zahl um 1 erhöht.

**Bemerkung 5.57.**

(a) Die abzählbar unendlichen Mengen sind genau diejenigen, die sich als Aufzählung in der Form $M = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ mit $x_m \neq x_n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$ schreiben lassen: Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to M$, $n \mapsto x_n$ ist dann die geforderte bijektive Abbildung. Dies erklärt auch den Begriff „*abzählbar* unendlich". Wir sehen so auch z. B. schon, dass auch die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen abzählbar ist, da wir sie z. B. als $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$ schreiben können.

(b) Aus (a) ergibt sich direkt, dass jede Teilmenge $M$ einer abzählbaren Menge $N$ wieder abzählbar ist: Ist $N = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ abzählbar (mit einer evtl. abbrechenden Aufzählung), so lässt sich jede Teilmenge $M \subset N$ durch Weglassen gewisser Elemente als $M = \{x_{n_0}, x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\}$ für geeignete (evtl. endlich viele) $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ schreiben, ist damit also ebenfalls abzählbar.

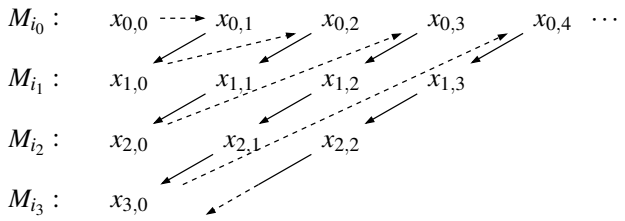
Abzählbare Mengen bleiben aber nicht nur abzählbar, wenn man Elemente von ihnen entfernt. Man kann sie umgekehrt auch noch um „sehr viele" Elemente vergrößern, ohne dass sie dadurch überabzählbar werden. Konkret wollen wir jetzt zeigen, dass wir sogar abzählbar viele abzählbare Mengen vereinigen können und dabei immer noch eine abzählbare Menge erhalten. Im folgenden Satz sind diese abzählbaren Mengen dazu mit $M_i$ bezeichnet, wobei $i$ die Mengen durchnummeriert und damit selbst abzählbar viele Werte (in der sogenannten Indexmenge) annehmen kann.

**Satz 5.58** (Abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind abzählbar)**.** *Es seien $I$ eine abzählbare Indexmenge sowie $M_i$ für alle $i \in I$ eine abzählbare Menge. Dann ist die Vereinigung aller dieser Mengen $M_i$, geschrieben $\bigcup_{i \in I} M_i$, ebenfalls abzählbar.*

*Beweis.* Nach Bemerkung 5.57 (a) können wir die Elemente von $I$ sowie allen $M_i$ mit $i \in I$ in der Form

$$I = \{i_0, i_1, i_2, \dots\} \qquad \text{und} \qquad M_{i_k} = \{x_{k,0}, x_{k,1}, x_{k,2}, \dots\} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

aufzählen (wobei einige dieser Mengen auch endlich sein können, so dass die Aufzählungen dann also irgendwo abbrechen). Wir können die Elemente aller $M_i$ damit in der folgenden Form auflisten und abzählen:




Wir haben also

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x_{0,0},\ x_{0,1}, x_{1,0},\ x_{0,2}, x_{1,1}, x_{2,0},\ x_{0,3}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{3,0},\ x_{0,4}, x_{1,3}, x_{2,2}, \dots\}.$$

Dabei müssen wir in dieser Aufzählung alle nicht vorhandenen Positionen (wenn einige der Mengen $I$ oder $M_i$ endlich sind) und bereits vorher vorgekommene Elemente (wenn die $M_i$ nicht disjunkt sind) weglassen. Auf diese Art sehen wir also, dass $\bigcup_{i \in I} M_i$ endlich oder abzählbar unendlich sein muss. Man bezeichnet die obige Abzählart auch als das **Cantorsche Diagonalverfahren**. □

**Beispiel 5.59.**

(a) Sind $M$ und $N$ abzählbare Mengen, so ist nach Satz 5.58 auch ihr Produkt $M \times N$ abzählbar, da man es als abzählbare Vereinigung $\bigcup_{m \in M} (\{m\} \times N)$ abzählbarer Mengen schreiben kann.

(b) Für ein festes $q \in \mathbb{N}_{>0}$ ist die Menge $M_q = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}\right\}$ aller rationalen Zahlen, die sich als Bruch mit Nenner $q$ schreiben lassen, bijektiv zu $\mathbb{Z}$ und damit nach Bemerkung 5.57 (a) abzählbar. Damit ist nach Satz 5.58 auch die Menge $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{N}_{>0}} M_q$ aller rationalen Zahlen

abzählbar. Auch wenn es der ersten Intuition vermutlich widerspricht, gibt es in diesem Sinne also „genauso viele“ rationale wie natürliche Zahlen.

Auch wenn wir mit Satz 5.58 jetzt von sehr vielen Mengen sehen können, dass sie abzählbar sind, gibt es dennoch unendliche Mengen, die „zu groß“ sind, um eine bijektive Abbildung nach $\mathbb{N}$ zuzulassen. Das einfachste Beispiel hierfür ist die Menge der reellen Zahlen.

**Satz 5.60.** *Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.*

*Beweis.* Dies ist eine unmittelbare Folge der Intervallschachtelung aus Satz 5.39: Angenommen, wir hätten eine Aufzählung $\mathbb{R} = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ der reellen Zahlen. Wir konstruieren dann rekursiv eine Intervallschachtelung $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ aus Intervallen $I_n$ der Länge $\frac{1}{3^n}$, von der wir lediglich verlangen, dass für alle $n$ die Zahl $x_n$ nicht in $I_n$ liegt. Dies ist natürlich sehr einfach: Wir wählen für $I_{n+1}$ immer das linke Drittel von $I_n$ – es sei denn, die Zahl $x_{n+1}$ liegt in diesem Drittel; dann wählen wir für $I_{n+1}$ das rechte Drittel von $I_n$. Da die Länge $\frac{1}{3^n}$ der Intervalle mit $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, erhalten wir so auch wirklich eine Intervallschachtelung.

Nach Satz 5.39 gibt es dann aber ein $a \in \mathbb{R}$, das in allen $I_n$ liegt und damit keine der Zahlen $x_n \in \mathbb{R} \setminus I_n$ sein kann, also im Widerspruch zur Annahme in unserer Aufzählung von $\mathbb{R}$ nicht enthalten ist. □

Zusammenfassend können wir also sagen, dass es im Sinne der Gleichmächtigkeit zwar „genauso viele“ natürliche wie ganze oder rationale, aber „deutlich mehr“ reelle Zahlen gibt.

**Beispiel 5.61.** Nach Beispiel 5.59 (b) gibt es eine Aufzählung $\mathbb{Q} = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ der rationalen Zahlen. Fassen wir diese als Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf, so liegen in jeder $\varepsilon$-Umgebung jeder reellen Zahl nach Aufgabe 5.36 unendlich viele Folgenglieder. Also ist jede reelle Zahl ein Häufungspunkt dieser Folge: Eine (abzählbare) Folge kann durchaus überabzählbar viele Häufungspunkte haben!

**Aufgabe 5.62.** Untersuche die folgenden Mengen auf Abzählbarkeit:

(a) die Menge aller zweielementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$;

(b) die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$;

(c) die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ (also die Potenzmenge $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ von $\mathbb{N}$).

# 6. Komplexe Zahlen

Bisher haben wir uns nahezu ausschließlich mit dem euch aus der Schule bekannten Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen befasst. In der Mathematik – und zwar sowohl in der Analysis als auch in der Algebra – ist jedoch noch ein weiterer damit eng zusammenhängender Körper sehr wichtig: der Körper der komplexen Zahlen. Die Idee dabei ist, einen Körper zu konstruieren, der die reellen Zahlen als Teilmenge enthält (man nennt so etwas auch eine *Körpererweiterung* von $\mathbb{R}$), und in dem jedes nicht konstante Polynom (wie z. B. $x \mapsto x^2+1$) eine Nullstelle besitzt. Außerdem werden die komplexen Zahlen zur Einführung und Untersuchung der Winkelfunktionen in Abschnitt 9.B sehr nützlich sein.

## 6.A Die Konstruktion der komplexen Zahlen

Im Gegensatz zu den reellen Zahlen brauchen wir die komplexen nicht mehr axiomatisch vorauszusetzen – wir können sie explizit aus den reellen konstruieren.

**Definition 6.1** (Komplexe Zahlen)**.** Die Menge der **komplexen Zahlen** ist definiert als $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$. Wir betrachten auf dieser Menge die beiden Verknüpfungen

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2) := (x_1+x_2, y_1+y_2) \qquad \text{(Addition)}$$
$$\text{und} \qquad (x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2+y_1x_2) \qquad \text{(Multiplikation).}$$

**Notation 6.2** (Komplexe Zahlen in der Form $x+\mathrm{i}y$)**.** Beachte, dass für komplexe Zahlen, deren zweite Komponente 0 ist, die Addition und Multiplikation

$$(x_1,0)+(x_2,0) = (x_1+x_2,0) \qquad \text{bzw.} \qquad (x_1,0)\cdot(x_2,0) = (x_1x_2,0)$$

genauso definiert ist wie für reelle Zahlen. Wir schreiben die komplexe Zahl $(x,0) \in \mathbb{C}$ daher in der Regel auch einfach als $x$ und fassen auf diese Art die reellen Zahlen als Teilmenge der komplexen auf. Setzen wir weiterhin $\mathrm{i} := (0,1)$, so gilt

$$\mathrm{i}^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$$

sowie für alle $x,y \in \mathbb{R}$

$$x+\mathrm{i}y = (x,0)+(0,1)(y,0) = (x,0)+(0,y) = (x,y).$$

Diese Darstellung als $x+\mathrm{i}y$ ist in der Tat auch die übliche Schreibweise für eine komplexe Zahl – wir werden Elemente von $\mathbb{C}$ ab jetzt immer in dieser Form schreiben. Diese Notation hat den Vorteil, dass sich die Rechenregeln für die Addition und Multiplikation aus Definition 6.1 ganz von selbst ergeben, wenn man i als Variable auffasst und die Gleichung $\mathrm{i}^2 = -1$ berücksichtigt: Es ist dann nämlich wie erwartet

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)+(x_2+\mathrm{i}y_2) = (x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)$$
$$\text{und} \qquad (x_1+\mathrm{i}y_1)\cdot(x_2+\mathrm{i}y_2) = (x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1) = x_1x_2+\mathrm{i}^2y_1y_2+\mathrm{i}x_1y_2+\mathrm{i}x_2y_1.$$

Wenn man in ingenieurswissenschaftliche Bücher schaut, werden die komplexen Zahlen dort in der Tat sogar oft so eingeführt: Man nehme einfach an, dass es eine Zahl i mit $\mathrm{i}^2 = -1$ gibt, und rechne damit dann ganz normal weiter, als wäre nichts Besonderes passiert. Es sollte aber hoffentlich klar sein, dass eine solche „Definition“ aus mathematischer Sicht unsinnig ist: Wenn wir bisher nur die reellen Zahlen kennen, gibt es nach Lemma 4.16 (c) einfach keine Zahl, deren Quadrat gleich $-1$ ist – und diese Situation wird natürlich auch nicht dadurch besser, dass wir diesem nicht existierenden Objekt einen Namen i geben. Stattdessen müssen wir den Umweg über die korrekte Konstruktion aus Definition 6.1 gehen, die uns garantiert, dass $\mathbb{C}$ erst einmal widerspruchsfrei definiert ist, und können dann erst im Nachhinein untersuchen, welche Eigenschaften der reellen Zahlen sich tatsächlich auf die komplexen übertragen. Dies sind nämlich auch nicht alle – so werden wir z. B. in Lemma 6.6 und Bemerkung 6.8 sehen, dass $\mathbb{C}$ zwar ein Körper, aber kein geordneter Körper ist.

**Definition 6.3** (Real- und Imaginärteil, Konjugation und Betrag)**.** Es sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ wie in Notation 6.2.

(a) Man nennt $x$ den **Realteil** und $y$ den **Imaginärteil** von $z$; die Notation hierfür ist $x = \mathrm{Re}\, z$ und $y = \mathrm{Im}\, z$.

(b) Man nennt

$$\overline{z} := x - \mathrm{i}y \qquad \text{die zu } z \textbf{ komplex konjugierte Zahl}$$

$$\text{und} \qquad |z| := \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \qquad \text{den } \textbf{Betrag} \text{ von } z$$

(mit der reellen Wurzel aus Definition 5.30).

**Bemerkung 6.4.** Offensichtlich lassen sich der Real- und Imaginärteil von $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ ausdrücken als

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Im}\, z = -\frac{\mathrm{i}}{2}(z - \overline{z}),$$

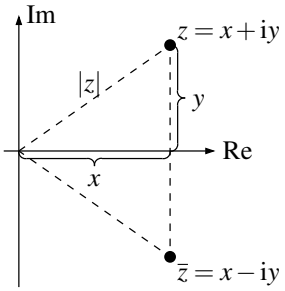
während der Betrag wegen $z\overline{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 - \mathrm{i}^2 y^2 = x^2 + y^2$ auch als

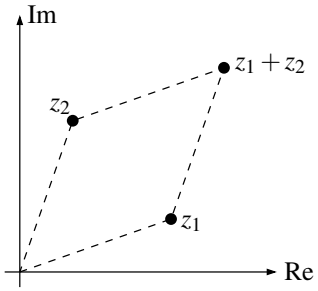
$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$$

geschrieben werden kann.

**Bemerkung 6.5** (Geometrische Interpretation von $\mathbb{C}$)**.** Geometrisch können wir die Elemente von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ natürlich als Punkte der Ebene, der sogenannten **komplexen Zahlenebene**, zeichnen. Wir wollen jetzt sehen, wie man die oben eingeführten Operationen für komplexe Zahlen in dieser Zahlenebene grafisch veranschaulichen kann. Da diese Interpretation zwar für die Vorstellung sehr wichtig ist, aber nicht für unsere späteren exakten Rechnungen benötigt wird, wollen wir dabei ein paar einfache und sicherlich bekannte Prinzipien der Schulgeometrie ohne Beweis verwenden.

Zunächst einmal ist klar, dass die *reellen* Zahlen in $\mathbb{C}$, also diejenigen der Form $x + \mathrm{i} \cdot 0$, genau die auf der horizontalen Achse sind. Der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl ist nach Definition genau der Abstand des Punktes $z$ vom Ursprung, und die komplexe Konjugation entspricht einer Spiegelung an der reellen Achse (wie im Bild unten links). Ebenso offensichtlich ist, dass zwei komplexe Zahlen genau so addiert werden, wie ihr in der Schule Vektoren im $\mathbb{R}^2$ addiert habt, also indem man die Verbindungsstrecken vom Ursprung zu $z_1$ und $z_2$ wie im folgenden Bild rechts zu einem Parallelogramm zusammensetzt.



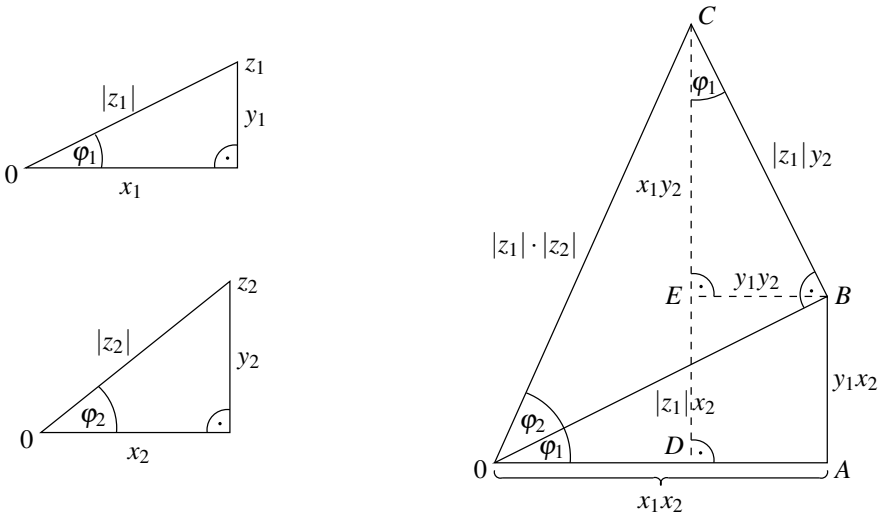




Die Multiplikation dagegen ist schon interessanter. Der Einfachheit halber beschränken wir uns im Bild unten auf den Fall, in dem Real- und Imaginärteil beider Zahlen positiv sind – die anderen Fälle lassen sich analog behandeln. Wir haben dort links zwei komplexe Zahlen $z_1$ und $z_2$ wie oben dargestellt (und zusätzlich die Winkel eingezeichnet, die die Verbindungsstrecken zum Ursprung mit der positiven reellen Achse einschließen), und die zugehörigen rechtwinkligen Dreiecke rechts wie folgt zusammengesetzt:

(a) Das Dreieck für $z_1$ haben wir um den Faktor $x_2$ zum Dreieck $0AB$ gestreckt.

(b) Das Dreieck für $z_2$ haben wir um den Faktor $|z_1|$ gestreckt und um den Winkel $\varphi_1$ gedreht, so dass das Dreieck $0BC$ mit Seitenlängen $|z_1|x_2$, $|z_1|y_2$ und $|z_1| \cdot |z_2|$ entstanden ist (insbesondere hat dieses Dreieck mit dem aus (a) also eine gemeinsame Kante $0B$ mit der Seitenlänge $|z_1|x_2$).

(c) $CD$ ist die Senkrechte auf $0A$, und $BE$ die Senkrechte auf $CD$. Damit ist das Dreieck $CEB$ ähnlich zu $0AB$, es ist daher die Streckung des Dreiecks für $z_1$ um den Faktor $y_2$ und hat Seitenlängen $x_1y_2$, $y_1y_2$ und $|z_1|y_2$.




Aus diesem Bild lesen wir nun direkt ab, dass $C$ die Koordinaten $(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$ hat, also genau der Punkt $z_1 \cdot z_2$ ist. Da dieser Punkt den Betrag $|z_1| \cdot |z_2|$ hat und den Winkel $\varphi_1 + \varphi_2$ mit der positiven reellen Achse einschließt, sehen wir anschaulich:

| |
|---|
| Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge *multipliziert* und ihre Winkel *addiert*. |

12

Wir wollen nun sehen, dass die Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$ die erwarteten Eigenschaften haben, also die Struktur eines Körpers bilden. Unsere Ergebnisse aus Kapitel 3 und Abschnitt 4.A gelten somit unverändert auch für die komplexen Zahlen.

**Lemma 6.6.** *$\mathbb{C}$ ist ein Körper.*

*Beweis (siehe auch Aufgabe 3.11).* Die Kommutativität der Addition und Multiplikation ist aus der Definition offensichtlich. Die Assoziativität der Addition und Multiplikation sowie die Distributivität rechnet man einfach nach; wir zeigen hier exemplarisch die Distributivität: Für drei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$, $z_3 = x_3 + \mathrm{i}y_3$ folgt (letztlich wegen der Distributivität in $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}(z_1+z_2)z_3 &= ((x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2))\cdot(x_3+\mathrm{i}y_3)\\ &= (x_1+x_2)x_3-(y_1+y_2)y_3+\mathrm{i}((x_1+x_2)y_3+(y_1+y_2)x_3)\\ &= \big(x_1x_3-y_1y_3+\mathrm{i}(x_1y_3+y_1x_3)\big)+\big(x_2x_3-y_2y_3+\mathrm{i}(x_2y_3+y_2x_3)\big)\\ &= z_1z_3+z_2z_3.\end{aligned}$$

Das additive neutrale Element ist 0, das additive Inverse zu $z = x+\mathrm{i}y$ natürlich $-z = -x-\mathrm{i}y$. Das multiplikative neutrale Element ist 1, das multiplikative Inverse zu $z = x+\mathrm{i}y \neq 0$ ist

$$\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\frac{-y}{x^2+y^2}, \quad \text{denn} \quad \left(\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\cdot(x+\mathrm{i}y) = \frac{(x-\mathrm{i}y)(x+\mathrm{i}y)}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1. \quad \square$$

**Beispiel 6.7** (Division komplexer Zahlen)**.** Erwähnenswert ist an Lemma 6.6 wohl vor allem die Existenz einer Division, da ja zunächst einmal nicht offensichtlich ist, wie man für eine komplexe Zahl $z = x+\mathrm{i}y$ das multiplikative Inverse $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+\mathrm{i}y}$ wieder in der Form $x'+\mathrm{i}y'$ schreiben kann. Die Merkregel hierfür ist, dass man diesen Bruch mit $\overline{z}$ zu $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$ erweitert, so dass der Nenner zu der

nach Bemerkung 6.4 *reellen* Zahl $z\overline{z} = |z|^2$ wird und somit das i aus dem Nenner verschwindet. So ist z. B.

$$\frac{1}{1+2\mathrm{i}} = \frac{1-2\mathrm{i}}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})} = \frac{1-2\mathrm{i}}{1^2+2^2} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\mathrm{i}.$$

**Bemerkung 6.8** ($\mathbb{C}$ ist kein geordneter Körper)**.** $\mathbb{C}$ ist zwar ein Körper, kann aber nicht zu einem *geordneten* Körper gemacht werden. Andernfalls müsste nämlich $\mathrm{i}^2$ als Quadrat einer Zahl ungleich 0 nach Lemma 4.16 (c) positiv sein – was aber natürlich ein Widerspruch ist, da andererseits $\mathrm{i}^2 = -1$ nach demselben Lemma auch eine negative Zahl sein müsste.

*Es ergibt also keinen Sinn zu fragen, welche von zwei gegebenen komplexen Zahlen größer ist als die andere.* Damit sind unsere Ergebnisse aus den Abschnitten 4.B und 4.C auf die komplexen Zahlen nicht anwendbar; z. B. sind die Begriffe von Supremum und Infimum sowie Maximum und Minimum für Teilmengen von komplexen Zahlen nicht definiert.

## 6.B Eigenschaften der komplexen Zahlen

Auch wenn $\mathbb{C}$ kein geordneter Körper ist, haben wir in Definition 6.3 (b) bereits wie für $\mathbb{R}$ auch für $\mathbb{C}$ eine Betragsfunktion eingeführt, die immer reelle Werte annimmt und es uns somit erlaubt, komplexe Zahlen *betragsmäßig* miteinander zu vergleichen. Wir wollen nun sehen, dass diese komplexe Betragsfunktion in der Tat sogar die gleichen Eigenschaften wie die reelle Betragsfunktion in Lemma 4.18 (a) und (c) hat, auch wenn der Beweis dafür in $\mathbb{C}$ ganz anders ist als in $\mathbb{R}$.

**Lemma 6.9** (Eigenschaften der komplexen Konjugation und Betragsfunktion)**.** *Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt*

(a) $\overline{\overline{z_1}} = z_1$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ *und* $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$*;*

(b) $|\operatorname{Re} z_1| \le |z_1|$ *und* $|\operatorname{Im} z_1| \le |z_1|$*;*

(c) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$*;*

(d) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ ***(Dreiecksungleichung)****.*

*Beweis.* Wie üblich sei $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ und $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$.

(a) Dies rechnet man einfach nach: Es ist $\overline{\overline{z_1}} = \overline{x_1 - \mathrm{i}y_1} = x_1 + \mathrm{i}y_1 = z_1$, sowie

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{x_1 + x_2 + \mathrm{i}(y_1 + y_2)} = x_1 + x_2 - \mathrm{i}(y_1 + y_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

und

$$\begin{aligned}\overline{z_1 z_2} &= \overline{x_1 x_2 - y_1 y_2 + \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2)} = x_1 x_2 - y_1 y_2 - \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2) = (x_1 - \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2) \\ &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$|\operatorname{Re} z_1| = |x_1| = \sqrt{x_1^2} \overset{5.34\,(a)}{\le} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = |z_1|;$$

analog folgt dies auch für den Imaginärteil.

(c) Bei der geometrischen Deutung der komplexen Multiplikation in Bemerkung 6.5 haben wir dies bereits anschaulich gesehen; man rechnet es aber auch mit (a) sofort nach: Nach Bemerkung 6.4 ist

$$|z_1 z_2| = \sqrt{z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2}} \overset{(a)}{=} \sqrt{z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2}} \overset{5.34\,(b)}{=} \sqrt{z_1 \overline{z_1}} \cdot \sqrt{z_2 \overline{z_2}} = |z_1| \cdot |z_2|.$$

(d) Zunächst ist nach (a) und Bemerkung 6.4

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1 \overline{z_2}} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}).\end{aligned}$$

Mit (b) können wir nun den dabei auftretenden Realteil abschätzen durch

$$\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \overset{4.18\,(b)}{\le} |\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})| \le |z_1 \overline{z_2}| \overset{(c)}{=} |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

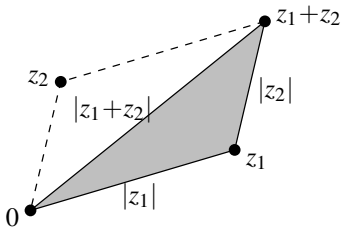
und erhalten so

$$|z_1+z_2|^2 \leq |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1|\cdot|z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2.$$

Wurzelziehen liefert nun mit Aufgabe 5.34 (a) die Behauptung. □

**Bemerkung 6.10.**

(a) Die Dreiecksungleichung hat eine sehr anschauliche Bedeutung, die auch ihren Namen erklärt: Nach der geometrischen Interpretation der Addition komplexer Zahlen aus Bemerkung 6.5 besagt sie einfach, dass eine Seite in einem Dreieck (wie $|z_1+z_2|$ im Bild rechts) höchstens so lang ist wie die Summe der beiden anderen (hier $|z_1|$ und $|z_2|$).




(b) Wenn ihr gleichzeitig die Parallelvorlesung „Algebraische Strukturen“ hört, werdet ihr sicher sehen, dass Lemma 6.9 (a) gerade besagt, dass die komplexe Konjugation $z \mapsto \overline{z}$ ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{C},+)$ nach $(\mathbb{C},+)$ und von $(\mathbb{C}\backslash\{0\},\cdot)$ nach $(\mathbb{C}\backslash\{0\},\cdot)$ ist. Zusammen macht dies die komplexe Konjugation zu einem Körperhomomorphismus von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ (in der Tat sogar zu einem Körperisomorphismus, da die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$ natürlich bijektiv ist).

Wie schon am Anfang dieses Kapitels erwähnt, besteht aber die wesentliche Eigenschaft der komplexen Zahlen darin, dass in $\mathbb{C}$ jedes (nicht konstante) Polynom eine Nullstelle besitzt. Beachte, dass dies ganz und gar nicht offensichtlich ist – da man jede komplexe Zahl als $x+\mathrm{i}y$ mit $x,y \in \mathbb{R}$ und $\mathrm{i}^2 = -1$ schreiben kann, sieht es ja eher so aus, als ob wir durch den Übergang von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ nur eine „Quadratwurzel aus $-1$“ hinzugefügt haben, also nur dem Polynom $z^2+1$ (oder bestenfalls noch anderen quadratischen Polynomen) eine Nullstelle gegeben haben. Dass dies in der Tat auch für Polynome beliebigen Grades gilt, und zwar sogar noch, wenn sie auch komplexe Koeffizienten haben dürfen, ist der Inhalt des sogenannten Fundamentalsatzes der Algebra:

**Satz 6.11 (Fundamentalsatz der Algebra).** *Jedes nicht konstante komplexe Polynom hat eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$.

*Beweisidee.* Es gibt mehrere (völlig) verschiedene Möglichkeiten, den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen. Leider sind alle diese Beweise für uns aber momentan noch zu schwierig, und so muss ich euch für einen exakten Beweis dieses Satzes auf weiterführende Vorlesungen vertrösten – in den Vorlesungen „Einführung in die Funktionentheorie“, „Einführung in die Algebra“ und „Einführung in die Topologie“ könnt ihr z. B. drei ganz verschiedene Beweise dieses Satzes sehen. Wir können aber auch jetzt zumindest schon eine *Beweisidee* angeben, die hoffentlich dafür ausreicht, dass ihr den Satz glaubt und ein Gefühl dafür bekommt, warum er richtig ist.

Es sei dazu $f$ ein komplexes, nicht konstantes Polynom, das wir der Einfachheit halber natürlich als normiert annehmen können. Es ist also

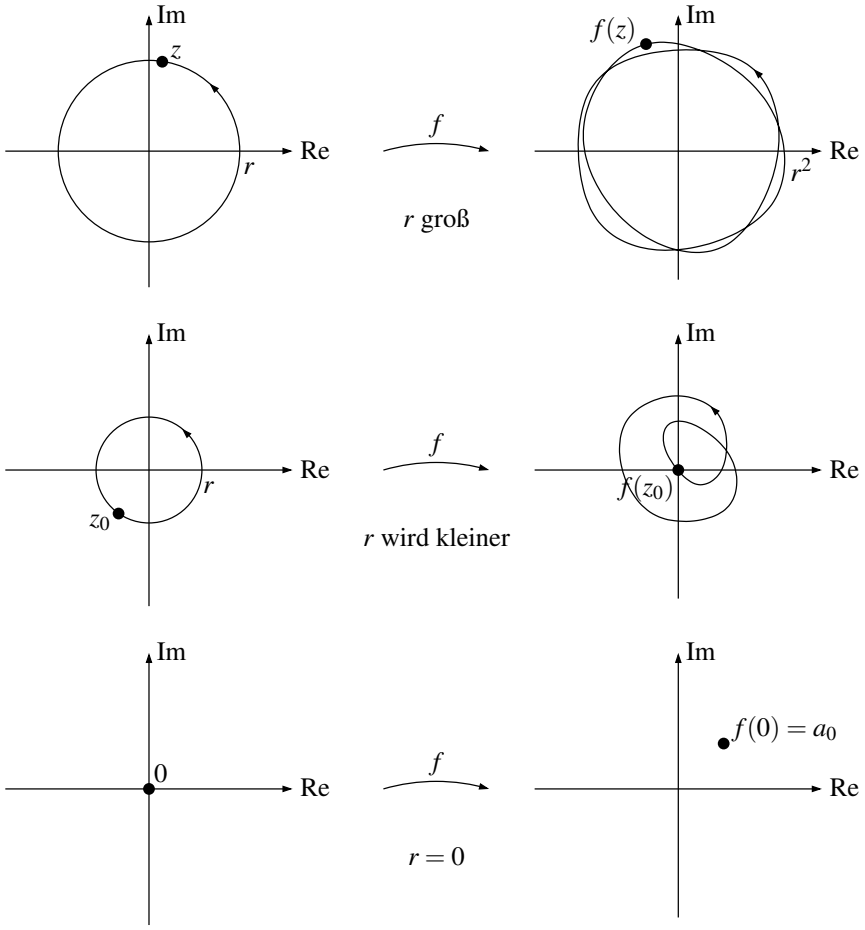
$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

für gewisse $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $a_0,\ldots,a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Wie können wir uns eine solche Funktion grafisch vorstellen? Da ihre Start- und Zielmenge $\mathbb{C}$ ist, können wir ihren Graphen, der ja dann in $\mathbb{C}\times\mathbb{C} = \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ liegt, nicht mehr wirklich zeichnen. In den Bildern unten haben wir daher den Startraum $\mathbb{C}$ links und den Zielraum $\mathbb{C}$ rechts dargestellt, und für einige Punkte im Startraum die zugehörigen Bildpunkte im Zielraum eingezeichnet.

Als Erstes wählen wir uns einmal eine feste, sehr große Zahl $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und schauen, was passiert, wenn wir mit $z$ den Kreis um 0 mit Radius $r$ durchlaufen. Wenn unsere Funktion einfach $z \mapsto z^n$ wäre, dann wüssten wir genau, wie $f(z)$ auf dieser Kreislinie aussehen würde: Da bei der komplexen Multiplikation nach Bemerkung 6.5 ja gerade Beträge multipliziert und Winkel addiert werden, ist die $n$-te Potenz einer komplexen Zahl mit Betrag $r$ und Winkel $\varphi$ genau die Zahl mit Betrag $r^n$ und

Winkel $n\varphi$. Läuft also $z$ einmal beim Radius $r$ im Kreis herum, d. h. $\varphi$ von 0 bis $2\pi$, so läuft $z^n$ beim Radius $r^n$ genau $n$-mal im Kreis herum, nämlich mit Winkel $n\varphi$ von 0 bis $2n\pi$.

Nun ist unser Polynom zwar nicht wirklich genau $z^n$, aber für sehr große Beträge von $z$ ist der Term $z^n$ in $f(z)$ mit der höchsten $z$-Potenz natürlich betragsmäßig viel größer als die anderen Terme $a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$. Anschaulich bedeutet das, dass $f(z)$ immer „in der Nähe“ von $z^n$ ist. Wenn also $z^n$ beim Radius $r^n$ insgesamt $n$-mal auf einer exakten Kreislinie herumläuft, wird $f(z)$ ein klein wenig von diesem Weg abweichen, aber letztlich immer noch $n$-mal um den Ursprung herumlaufen. Das Bild unten zeigt in der ersten Zeile einen solchen möglichen Weg für $n=2$, bei dem also $f(z)$ in einem ungefähren Abstand von $r^2$ zweimal um den Ursprung läuft, während $z$ einmal auf dem Kreis mit Radius $r$ entlang läuft.




Was passiert nun, wenn wir den Radius $r$ des Kreises für $z$ langsam kleiner machen und zu schließlich 0 werden lassen, so wie im Bild von oben nach unten dargestellt? Natürlich wird sich dann auch der von $f(z)$ durchlaufene Weg in irgendeiner Form langsam ändern. Wir können nicht viel darüber aussagen, wie diese Änderung genau aussieht – klar ist die Situation aber natürlich, wenn der Radius wie in der unteren Zeile des Bildes gleich 0 geworden ist: Dann ist der Kreis für $z$ zu einem Punkt zusammengeschrumpft, und folglich muss natürlich auch der Weg von $f(z)$ von der ursprünglichen Schleife zu einem Punkt (nämlich zum Punkt $f(0)=a_0$) zusammenschrumpfen. Aber es ist anschaulich klar, dass man einen geschlossenen Weg, der ursprünglich $n$-mal um den Ursprung herumgelaufen ist, nicht auf einen Punkt zusammenziehen kann, ohne ihn dabei mindestens einmal über den Nullpunkt zu ziehen. Und genau an so einer Stelle, wo der Weg für $f(z)$ den Nullpunkt trifft, haben wir natürlich, was wir wollen: eine Nullstelle $z_0$ von $f$, so wie in der mittleren Zeile oben im Bild. □

Auch wenn diese Beweisidee jetzt hoffentlich sehr anschaulich war, wäre es doch noch ein sehr weiter Weg für uns, diese Argumente zu einem exakten Beweis zu machen. Ein wichtiger fehlender Punkt ist z. B., dass wir irgendwie formalisieren müssten, was es genau heißt, dass „sich $f(z)$ langsam ändert, wenn sich $z$ langsam ändert". Denn nur wenn sich der Weg für $f(z)$ oben langsam und kontinuierlich ändert, können wir schließen, dass wir ihn irgendwann einmal über den Nullpunkt ziehen müssen.

**Bemerkung 6.12.**

(a) Nach Satz 3.19 (a) folgt durch wiederholte Anwendung des Fundamentalsatzes der Algebra sofort, dass jedes komplexe Polynom komplett in Linearfaktoren zerfällt, dass sich also jedes solche Polynom $f$ mit $\deg f = n \in \mathbb{N}_{>0}$ als

$$f(z) = c\,(z-z_1)\cdot\,\cdots\,\cdot(z-z_n)$$

für gewisse $c, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ mit $c \neq 0$ schreiben lässt. Manchmal wird in der Literatur auch diese Aussage als Fundamentalsatz der Algebra bezeichnet.

(b) Der Fundamentalsatz der Algebra garantiert uns zwar die Existenz einer Nullstelle eines nicht konstanten komplexen Polynoms, er sagt uns aber nicht, wie wir eine solche Nullstelle konkret finden können. In der Tat haben wir ja schon in Bemerkung 3.21 erwähnt, dass es zur exakten Bestimmung von Nullstellen von Polynomen im Allgemeinen nur für kleine Grade explizite Formeln gibt. Einen sehr einfachen und oft vorkommenden Fall, in dem sich die Nullstellen jedoch schnell finden lassen, wollen wir hier kurz erwähnen:

**Beispiel 6.13.** Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom mit $\deg f = 2$ und *reellen* Koeffizienten, das der Einfachheit halber wieder normiert sei, d. h. es sei $f(z) = z^2 + pz + q$ für gewisse $p, q \in \mathbb{R}$. In diesem Fall lassen sich die (komplexen) Nullstellen von $f$ schnell berechnen: Aus $z^2 + pz + q = 0$ folgt durch quadratische Ergänzung

$$\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q =: D.$$

Für $D \geq 0$ ergeben sich durch Wurzelziehen natürlich die (reellen) Nullstellen $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$. Für $D < 0$ gibt es keine reellen Lösungen, aber wegen $\mathrm{i}^2 = -1$ erhalten wir stattdessen die beiden komplexen Lösungen $-\frac{p}{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{-D}$.

**Aufgabe 6.14.** Für $n = 1, 2, 3$ bestimme und skizziere man die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die die Gleichung $2\,\mathrm{Im}\, z \cdot \mathrm{Im}\, \frac{1}{z} = n$ gilt.

**Aufgabe 6.15.**

(a) Zeige (ohne Verwendung des Fundamentalsatzes der Algebra), dass auch in $\mathbb{C}$ Quadratwurzeln existieren, also dass es zu jedem $w \in \mathbb{C}$ ein $z \in \mathbb{C}$ gibt mit $z^2 = w$.

(b) Beweise den Fundamentalsatz der Algebra für Polynome vom Grad 2.

**Aufgabe 6.16.** Stelle die folgenden Zahlen in der Form $x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

(a) $z = \frac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$;

(b) $z = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{-2025}$;

(c) alle Lösungen der Gleichung $z^4 + z^2 + 1 = 0$;

(d) alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\left|\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right| < 1$.

## 6.C Reelle und komplexe Folgen

Auch wenn $\mathbb{C}$ nach Bemerkung 6.8 kein geordneter Körper ist, können wir mit Hilfe der Betragsfunktion aus Definition 6.3 sagen, was es bedeutet, dass sich eine Folge komplexer Zahlen einem Grenzwert annähert. In der Tat können wir die reelle Grenzwertdefinition 5.1 (b) wörtlich auf den reellen Fall übertragen:

**Definition 6.17** (Grenzwerte komplexer Folgen)**.** Eine komplexe Zahl $a$ heißt **Grenzwert** einer Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{C}$, wenn

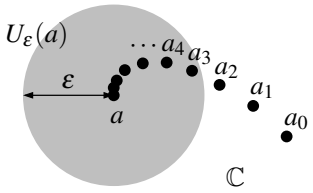
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

Wie im Reellen sagt man in diesem Fall auch hier, dass $(a_n)_n$ gegen $a$ **konvergiert**. Existiert kein solcher Grenzwert, so heißt die Folge **divergent**.

**Bemerkung 6.18** (Anschauliche Deutung des Grenzwertbegriffs in $\mathbb{C}$)**.** Definieren wir für ein *komplexes* $a \in \mathbb{C}$ und *reelles* $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ analog zu Bemerkung 5.2 wieder die **$\varepsilon$-Umgebung** von $a$ als

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{C} : |x - a| < \varepsilon\},$$

so ist dies wie im Bild rechts nun ein Kreis in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt $a$ und Radius $\varepsilon$. Die Grenzwertbedingung besagt weiterhin, dass in jeder $\varepsilon$-Umgebung fast alle Folgenglieder liegen, und kann damit wieder so interpretiert werden, dass sich die Folgenglieder beliebig dicht dem Grenzwert nähern.




**Bemerkung 6.19** (Übertragung der Grenzwerteigenschaften von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$)**.** Aufgrund der gleichen Grenzwertdefinition 5.1 bzw. 6.17 sowie der gleichen Eigenschaften der Betragsfunktion aus Lemma 4.18 bzw. 6.9 (insbesondere der Dreiecksungleichung) gelten sehr viele Resultate über reelle Grenzwerte genauso auch für komplexe. *In der Tat übertragen sich alle Definitionen und Sätze aus Abschnitt 5.A mit wörtlich den gleichen Beweisen unmittelbar auf komplexe Folgen* $(a_n)_n$*:*

(a) die Definitionen von Nullfolgen, Häufungspunkten und beschränkten Folgen (wobei die Schranke $s$ mit $|a_n| \leq s$ für alle $n$ natürlich weiterhin reell bleibt);

(b) die Eindeutigkeit des Grenzwerts (und damit die Notation $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$), der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ für $|q| < 1$, die Beschränktheit konvergenter Folgen, die Grenzwertsätze und die äquivalenten Charakterisierungen von Häufungspunkten.

Ihr könnt euch gerne selbst davon überzeugen und Abschnitt 5.A noch einmal unter der Voraussetzung durchlesen, dass alle Folgen nun komplex sind – es werden keinerlei Änderungen erforderlich sein. Wir werden die Ergebnisse dieses Abschnitts daher im Folgenden auch im Komplexen verwenden, ohne jedes Mal wieder darauf hinzuweisen. Um solche Aussagen in Zukunft für den reellen und komplexen Fall gleichzeitig aufschreiben zu können, vereinbaren wir:

Im Folgenden steht $\mathbb{K}$ immer für einen der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Die Inhalte der Abschnitte 5.B und 5.C benötigen jedoch wirklich einen geordneten Körper und nicht nur das Konzept des Abstandes zweier Zahlen. Ergebnisse wie das Monotoniekriterium, die Intervallschachtelung oder die Existenz eines Limes superior haben daher keine Entsprechung im Komplexen.

**Aufgabe 6.20.** Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Beweise, dass $(a_n)_n$ genau dann gegen die komplexe Zahl $a$ konvergiert, wenn die Folgen $(\operatorname{Re} a_n)_n$ und $(\operatorname{Im} a_n)_n$ ihrer Real- und Imaginärteile gegen $\operatorname{Re} a$ bzw. $\operatorname{Im} a$ konvergieren.

Da wir die Konvergenzkriterien aus Abschnitt 5.B, mit denen wir die Konvergenz einer Folge auch ohne Kenntnis oder gleichzeitige Berechnung des Grenzwerts beweisen konnten, in $\mathbb{C}$ nicht mehr zur Verfügung haben, wollen wir nun noch zwei sehr wichtige Konvergenzkriterien behandeln, die sowohl in $\mathbb{R}$ als auch in $\mathbb{C}$ gelten.

**Satz 6.21 (Satz von Bolzano-Weierstraß).** *Jede beschränkte Folge* $(a_n)_n$ *in* $\mathbb{K}$ *besitzt einen Häufungspunkt.*

*Beweis.* Für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ haben wir dies bereits in Folgerung 5.48 gesehen: Der Limes superior von $(a_n)_n$ ist ein Häufungspunkt.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ stellen wir zunächst fest, dass nach Lemma 6.9 (b) mit $(a_n)_n$ auch die reellen Folgen $(\operatorname{Re} a_n)_n$ und $(\operatorname{Im} a_n)_n$ beschränkt sind. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{R}$ (den wir ja schon bewiesen haben) gibt es also zunächst eine Teilfolge von $(a_n)_n$, in der die Realteile gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergieren, und dann *innerhalb dieser Teilfolge* eine weitere Teilfolge, in der auch die Imaginärteile gegen ein $b \in \mathbb{R}$ konvergieren. Nach Aufgabe 6.20 konvergiert diese Teilfolge dann gegen $a+ib$, d. h. $a+ib$ ist ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$. □

Das letzte wichtige Konvergenzkriterium, das wir hier beweisen wollen – das sogenannte Cauchy-Kriterium – sieht fast so aus wie die Definition der Konvergenz. Der Unterschied besteht lediglich darin, dass wir nicht verlangen, dass sich die Folgenglieder *einem gegebenen Grenzwert* beliebig dicht annähern, sondern nur, dass sie sich *untereinander* beliebig nahe kommen. Auf diese Art müssen wir den Grenzwert der Folge also wiederum nicht vorher kennen, um das Kriterium anwenden zu können. Im Gegensatz zu unseren bisherigen Kriterien hat das Cauchy-Kriterium aber auch noch den weiteren entscheidenden Vorteil, dass es *äquivalent* zur Konvergenz ist und somit auch zum Beweis der Divergenz einer Folge verwendet werden kann.

Die Eigenschaft, dass sich die Folgenglieder untereinander beliebig nahe kommen, sieht formal wie folgt aus.

**Definition 6.22** (Cauchyfolgen)**.** Eine Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{K}$ heißt **Cauchyfolge**, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m,n \geq n_0 \colon |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

**Bemerkung 6.23.** Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge: Ist $(a_n)_n$ konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{K}$, so gibt es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung aber auch für alle $m,n \geq n_0$

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a) + (a - a_n)| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

d. h. $(a_n)_n$ ist eine Cauchyfolge.

13

Diese Tatsache, dass eine konvergente Folge immer eine Cauchyfolge ist, ist also sehr einfach zu zeigen und wäre z. B. auch in $\mathbb{Q}$ richtig: Wenn die Folgenglieder gegen einen Grenzwert streben, müssen sie sich natürlich auch untereinander beliebig nahe kommen. Die Umkehrung dagegen ist weit weniger klar: Da $\mathbb{Q}$ ja „Löcher“ auf der Zahlengeraden hat, könnte es ja sein, dass sich die Glieder einer rationalen Folge zwar beliebig annähern, aber sich an einem solchen Loch häufen und daher kein Grenzwert der Folge in $\mathbb{Q}$ existiert. Dass so etwas in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ nicht passieren kann, weil es dort keine solchen Löcher gibt, wird als *Vollständigkeit* dieser Körper bezeichnet (siehe auch Definition 23.28). Um dies zu zeigen, benötigen wir zunächst ein kleines Lemma analog zu Lemma 5.8:

**Lemma 6.24.** *Jede Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ ist beschränkt.*

*Beweis.* Nicht nur die Aussage, sondern auch ihr Beweis ist völlig analog zu Lemma 5.8: Es sei $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$. Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $n_0$, so dass $|a_m - a_n| < \varepsilon = 1$ für alle $m,n \geq n_0$ ist. Insbesondere gilt dies also für $m = n_0$, und damit erhalten wir nach der Dreiecksungleichung für alle $n \geq n_0$

$$|a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|.$$

Damit folgt nun aber $|a_n| \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn wir

$$s := \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|)$$

setzen. Also ist $(a_n)_n$ beschränkt. □

**Satz 6.25** (**Cauchy-Kriterium** für Folgen, **Vollständigkeit** von $\mathbb{K}$)**.** *Jede Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ konvergiert.*

*Nach Bemerkung 6.23 konvergiert eine Folge in $\mathbb{K}$ also genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.*

*Beweis.* Es sei $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$. Dann ist $(a_n)_n$ nach Lemma 6.24 beschränkt und besitzt damit nach dem Satz 6.21 von Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt $a$. Wir behaupten, dass $(a_n)_n$ sogar schon gegen $a$ konvergiert.

Um dies zu zeigen, sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Da $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } m,n \geq n_0.$$

Weil $a$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$ ist, gilt nach Lemma 5.21 weiterhin

$$|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für unendlich viele } m,$$

und damit insbesondere für ein $m \geq n_0$. Wir können diese beiden Ungleichungen also miteinander kombinieren und erhalten für ein solches $m$ nach der Dreiecksungleichung

$$|a_n - a| = |a_n - a_m + a_m - a| \leq |a_n - a_m| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$. Damit ist $(a_n)_n$ konvergent gegen $a$. □

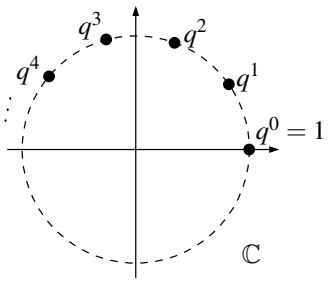
**Beispiel 6.26** (Noch einmal die geometrische Folge)**.** Wir betrachten noch einmal die geometrische Folge $(q^n)_n$ für ein $q \in \mathbb{K}$. Aus Beispiel 5.3 (c) und 5.9 (b) wissen wir bereits, dass $(q^n)_n$ für $|q| < 1$ gegen 0 konvergiert und für $|q| > 1$ divergiert. Außerdem ist klar, dass die Folge für $q = 1$ konstant ist und damit konvergiert. Wir zeigen nun mit dem Cauchy-Kriterium in den übrigen Fällen, also wenn $|q| = 1$ und $q \neq 1$, dass die Folge divergiert. Dazu müssen wir also beweisen, dass $(q^n)_n$ keine Cauchyfolge ist, d. h. (nach den Regeln der Negation aus Bemerkung 1.8)

$$\exists\, \varepsilon > 0 \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists m,n \geq n_0 \colon |q^m - q^n| \geq \varepsilon.$$

Um dies zu zeigen, setzen wir $\varepsilon := |q-1| > 0$. Nun sei $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig; wir setzen dann $m = n_0 + 1$ und $n = n_0$. Mit diesen Werten folgt

$$|q^m - q^n| = |q^{n_0+1} - q^{n_0}| = |q^{n_0}(q-1)| = \underbrace{|q|^{n_0}}_{=1} \cdot \underbrace{|q-1|}_{=\varepsilon} = \varepsilon.$$

Also ist $(q^n)_n$ keine Cauchyfolge und damit nach Satz 6.25 nicht konvergent. Das Bild rechts illustriert dies: Nach der geometrischen Interpretation der komplexen Multiplikation aus Bemerkung 6.5 läuft die Folge für $|q| = 1$ und $q \neq 1$ „mit konstanter Geschwindigkeit“ auf dem Einheitskreis herum und nähert sich somit keinem Grenzwert beliebig an.




**Aufgabe 6.27.** Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Man zeige: Gibt es ein $q \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $q < 1$, so dass

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so ist $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge.

**Aufgabe 6.28.** Für ein fest gegebenes $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| < \frac{1}{4}$ definieren wir eine komplexe Folge $(a_n)_n$ rekursiv durch

$$a_0 = 0 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = a_n^2 + c \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass $(a_n)_n$ konvergiert.

(Hinweis: Zeige zunächst, dass $\frac{1}{4} + |c|$ eine obere Schranke für die Beträge aller Folgenglieder ist.)

# 7. Reihen

Wir wollen uns nun mit einem speziellen Typ von Folgen beschäftigen, der in der Praxis sehr häufig vorkommt: nämlich Folgen, die in der Form

$$(a_0,\ a_0+a_1,\ a_0+a_1+a_2,\ \ldots)$$

gegeben sind, deren Grenzwert wir also anschaulich als die „unendliche Summe“ $a_0+a_1+a_2+\cdots$ auffassen können. Derartige Folgen bezeichnet man als Reihen. Wir werden solche Reihen im reellen und komplexen Fall gleichzeitig betrachten und arbeiten daher im Folgenden in der Regel über dem Körper $\mathbb{K}$ wie in Bemerkung 6.19.

## 7.A Grenzwerte von Reihen

Da Reihen letztlich nichts anderes als spezielle Folgen sind, können wir die Definition und die ersten Eigenschaften von Folgen und Grenzwerten natürlich unmittelbar auf unsere neue Situation übertragen. Dies wollen wir nun im ersten Abschnitt dieses Kapitels tun.

**Definition 7.1** (Reihen)**.** Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann heißt die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n = a_0+a_1+\cdots+a_N$$

die Folge der **Partialsummen** von $(a_n)_n$ bzw. die zu $(a_n)_n$ gehörige **Reihe**. Wir bezeichnen sowohl diese Reihe als auch ihren Grenzwert $\lim\limits_{N\to\infty} s_N$ (sofern er existiert) mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{bzw.} \quad a_0+a_1+a_2+\cdots.$$

Genau wie bei Folgen kann auch eine Reihe bei einem anderen Startindex $n_0\in\mathbb{Z}$ als bei 0 anfangen; in diesem Fall schreiben wir sie natürlich als

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \quad \text{bzw.} \quad a_{n_0}+a_{n_0+1}+a_{n_0+2}+\cdots.$$

**Bemerkung 7.2.**

(a) Da jede Reihe nach Definition eine Folge ist, übertragen sich die Begriffe Konvergenz und Divergenz, Beschränktheit usw. aus Kapitel 5 direkt auf Reihen.

(b) Die Doppelbelegung des Symbols $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sowohl für die Reihe (also die Folge ihrer Partialsummen) als auch für ihren Grenzwert ist zwar mathematisch unschön, aber in der Literatur so fest verankert, dass wir hier nicht davon abweichen wollen. Es sollte dadurch keine Verwirrung entstehen: Wenn wir von Eigenschaften einer Folge reden, also z. B. sagen, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert oder divergiert, so meinen wir natürlich die Partialsummenfolge – während z. B. in Gleichungen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$ der Grenzwert der Reihe gemeint ist. Wenn Verwechslungen zu befürchten sind, können wir natürlich auch immer die eindeutige Schreibweise $\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ für die Reihe und $\lim\limits_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n$ für ihren Grenzwert benutzen.

**Beispiel 7.3.**

(a) (**Unendliche geometrische Reihe**) Wir betrachten die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ für ein $q\in\mathbb{K}$. Für $q=1$ ist diese Reihe $1+1+1+\ldots$ natürlich unbeschränkt und damit divergent. Ansonsten haben wir in Satz 4.1 gesehen, dass

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}.$$

Der Grenzwert für $N \to \infty$ ergibt sich nun sofort aus Beispiel 6.26: Da $\lim_{N\to\infty} q^{N+1}$ nur für $|q| < 1$ existiert und dann gleich 0 ist, erhalten wir also

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \text{für } |q| < 1, \tag{$*$}$$

während die Reihe in allen anderen Fällen divergiert.

Ein interessanter konkreter Fall dieser Reihe ist die Frage, ob die Dezimalzahl $0,9999\ldots$ gleich 1 oder „etwas kleiner“ als 1 ist. Dies können wir nun beantworten, denn die einzig mögliche mathematisch korrekte Definition dieser Zahl ist natürlich die geometrische Reihe

$$0,9999\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} = \frac{9}{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n \overset{(*)}{=} \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1.$$

Die Zahl $0,9999\ldots$ ist daher wirklich *gleich* 1 – in diesem Fall ist die Dezimaldarstellung einer reellen Zahl also nicht eindeutig.

(b) (Teleskopreihen) Wir wollen den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ bestimmen. Normalerweise lassen sich derartige Reihen nicht ohne weiteres berechnen, aber in diesem ganz speziellen Fall können wir einen Trick anwenden: Wegen $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ können wir die Partialsummen der Reihe schreiben als

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1}.\end{aligned}$$

Derartige Reihen, bei denen sich in den Partialsummen durch geeignete Differenzen alle Terme bis auf einen Start- und Endterm wegheben, bezeichnet man als **Teleskopreihen** (weil die Summe sozusagen wie ein Teleskop „zusammengeschoben“ werden kann). Der Grenzwert der Reihe lässt sich dann natürlich einfach berechnen; in diesem Fall ist er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1.$$

(c) (**Harmonische Reihe**) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert: Für die Partialsummen mit Index $N = 2^k$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \tfrac{1}{2^k}\right) \\ &\geq 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{2^k} + \cdots + \tfrac{1}{2^k}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{2} \\ &= 1 + \tfrac{k}{2}.\end{aligned}$$

Da $1 + \frac{k}{2}$ mit $k$ unbeschränkt wächst, ist die gegebene Reihe also unbeschränkt und damit nach Lemma 5.8 divergent.

Die folgenden einfachen Rechenregeln für Reihen – die Verträglichkeit mit Summen, Differenzen, Multiplikation mit Konstanten sowie im Fall des Körpers $\mathbb{R}$ mit Ungleichungen – ergeben sich sofort aus denen für Folgen in Kapitel 5.

**Lemma 7.4** (Rechenregeln für Reihen)**.** *Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen in $\mathbb{K}$. Dann gilt:*

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

(b) *Für* $c \in \mathbb{K}$ *ist* $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(c) *Ist* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *und* $a_n \leq b_n$ *für alle* $n$, *so ist* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

*Beweis.* Alle behaupteten Aussagen gelten trivialerweise für die Partialsummen der Reihen (also wenn die Summen bis zu einem festen $N \in \mathbb{N}$ laufen). Übergang zum Grenzwert liefert dann mit den Sätzen 5.13 und 5.24 die Behauptungen. □

Eine analoge direkte Verträglichkeit mit der Multiplikation ist natürlich nicht zu erwarten, weil ja schon für die Partialsummen $\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right)$ nicht dasselbe ist wie $\sum_{n=0}^{N} a_n b_n$. Wir werden aber später in Satz 7.35 noch eine Formel für das Produkt von Reihen finden.

Bevor wir nun mit der Herleitung allgemeiner Konvergenzkriterien für Reihen beginnen, wollen wir noch zwei sehr einfache Hilfsaussagen festhalten, die aber dennoch oft nützlich sind. Die erste von ihnen ist so einfach, dass sie üblicherweise als *Trivialkriterium* bezeichnet wird: Eine Reihe kann höchstens dann konvergieren, wenn die aufsummierten Zahlen zumindest gegen 0 konvergieren.

**Lemma 7.5 (Trivialkriterium).** *Ist die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergent, so ist* $(a_n)_n$ *eine Nullfolge.*

*Beweis.* Existiert der Grenzwert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, so folgt aus den Grenzwertsätzen

$$a_N = \sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0 \quad \text{für } N \to \infty.$$ □

**Beispiel 7.6.**

(a) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2+1}$ ist divergent, denn nach Beispiel 5.14 ist $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} = 2 \neq 0$.

(b) Das Trivialkriterium ist nicht umkehrbar: So ist z. B. zwar $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ eine Nullfolge, aber die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nach Beispiel 7.3 (c) trotzdem divergent. Man kann mit diesem Kriterium also immer nur die Divergenz einer Reihe nachweisen, aber nie die Konvergenz.

Dieses Beispiel zeigt auch noch etwas anderes: Bezeichnen wir mit $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ die Partialsummen der harmonischen Reihe, so ist die Folge $(a_n)_n$ zwar divergent, aber die Folge $(a_{n+1} - a_n)_n = \left(\frac{1}{n+1}\right)_n$ konvergiert trotzdem gegen 0, d. h. es gilt

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \colon |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon.$$

Um die Äquivalenz zwischen konvergenten Folgen und Cauchyfolgen zu erhalten, genügt es in der Definition 6.22 einer Cauchyfolge also nicht, zwei *benachbarte* Folgenglieder $a_n$ und $a_{n+1}$ miteinander zu vergleichen, sondern wir müssen zwei *beliebige* Folgenglieder $a_m$ und $a_n$ (mit $m, n \geq n_0$) nehmen!

**Lemma 7.7.** *Eine Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *mit* $a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.*

*Beweis.* Da alle aufsummierten Zahlen reell und nicht-negativ sind, ist die Folge ihrer Partialsummen monoton wachsend. Für eine reelle, monoton wachsende Folge ist die Konvergenz nach Lemma 5.8 und dem Monotoniekriterium aus Satz 5.28 aber äquivalent zur Beschränktheit. □

## 7.B Konvergenzkriterien für Reihen

Wie im Fall von Folgen im letzten Kapitel wollen wir nun einige Kriterien herleiten, mit denen man die Konvergenz einer Reihe beweisen kann, ohne ihren Grenzwert zu kennen. Dabei bleiben natürlich alle Ergebnisse aus Abschnitt 5.B unverändert anwendbar, da Reihen ja letztlich auch nur Folgen sind. Es gibt aber einige zusätzliche Kriterien, die speziell auf den Fall von Reihen zugeschnitten und meistens einfacher zu überprüfen sind. Wir beginnen dabei mit einem Kriterium für reelle Reihen, in denen abwechselnd positive und negative Glieder aufsummiert werden.

**Satz 7.8 (Leibniz-Kriterium).** *Ist $(a_n)_n$ eine monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$, so ist die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots$$

*konvergent, und ihre Partialsummen sind abwechselnd obere und untere Schranken für ihren Grenzwert. (Derartige reelle Reihen, bei denen sich das Vorzeichen in der Summe immer abwechselt, nennt man **alternierend**.)*

14

*Beweis.* Es sei $s_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n$, also $(s_N)_N$ die Folge der Partialsummen der betrachteten Reihe. Da $(a_n)_n$ monoton fallend und die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder von $(a_n)_n$ damit nicht negativ ist, ist die Folge $(s_{2N})_N$ der *geraden* Partialsummen monoton fallend: Es gilt

$$s_{2N+2} = s_{2N} \underbrace{- a_{2N+1} + a_{2N+2}}_{\leq 0} \leq s_{2N}.$$

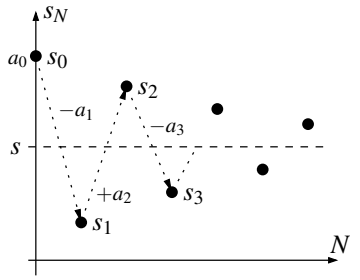
Analog ist die Folge $(s_{2N+1})_N$ der ungeraden Partialsummen monoton wachsend, wie auch das Bild unten rechts zeigt. Damit haben wir ineinander liegende Intervalle

$$[s_1, s_2] \supset [s_3, s_4] \supset [s_5, s_6] \supset \cdots,$$

die eine Intervallschachtelung definieren, da die Länge

$$s_{2N} - s_{2N-1} = a_{2N}$$

dieser Intervalle mit $N \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Nach Satz 5.39 konvergieren also die geraden und ungeraden Partialsummen monoton fallend bzw. wachsend gegen den gleichen Grenzwert $s$. Insbesondere sind die geraden und ungeraden Partialsummen also obere bzw. untere Schranken für $s$.




Außerdem liegen damit in jeder $\varepsilon$-Umgebung von $s$ fast alle geraden und fast alle ungeraden Partialsummen, und somit konvergiert auch die gesamte Folge der Partialsummen gegen $s$. □

**Beispiel 7.9 (Alternierende harmonische Reihe).** Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \mp \cdots$$

ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent, denn $\frac{1}{n}$ ist eine monoton fallende Nullfolge. Ihren Grenzwert können wir momentan noch nicht berechnen (in der Tat ist er gleich $-\log 2$, wie wir in Beispiel 11.15 (a) sehen werden), aber nach Satz 7.8 liegt er sicher zwischen den ersten beiden Partialsummen $-\frac{1}{1} = -1$ und $-\frac{1}{1} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Übrigens ist diese Reihe (ganz im Gegensatz z. B. zur Folge aus Beispiel 5.37) eine, die „extrem langsam“ konvergiert: Um hier den Grenzwert auf $k$ Nachkommastellen genau zu berechnen, müssen wir natürlich mindestens die ersten $10^k$ Summanden mitnehmen, denn der $10^k$-te Summand ist ja $10^{-k}$ und ändert somit in jedem Fall noch die $k$-te Nachkommastelle.

Wir können an dieser alternierenden harmonischen Reihe aber noch eine weitere überraschende Eigenschaft sehen. Dazu sortieren wir die aufzusummierenden Zahlen mal etwas um und schreiben unsere Reihe als

$$\left(-\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{12} + \left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{14}\right) + \frac{1}{16} + \cdots.$$

Das Prinzip hierbei ist, dass die Terme $(-1)^n \frac{1}{n} \ldots$

- für ungerade $n$ der Reihe nach als erste Summanden in den Klammern stehen,
- für gerade, aber nicht durch 4 teilbare $n$ der Reihe nach als zweite Summanden in den Klammern stehen,
- für durch 4 teilbare $n$ der Reihe nach außerhalb der Klammern stehen.

Es ist klar, dass wir hier wirklich nur die Summanden umsortiert, also keinen vergessen oder doppelt hingeschrieben haben. Rechnen wir jetzt aber mal die Klammern aus, so erhalten wir

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{12}-\frac{1}{14}+\frac{1}{16}\mp\cdots$$

und damit genau die Hälfte der ursprünglichen Reihe! Da die Reihe nicht den Wert 0 hat (wie wir oben schon gesehen haben, liegt ihr Wert ja zwischen $-1$ und $-\frac{1}{2}$), haben wir ihren Wert durch das Umsortieren also tatsächlich geändert und müssen damit wohl oder übel feststellen:

| Das Umordnen der Summanden in einer konvergenten Reihe kann ihren Grenzwert ändern. |
|---|

Das ist natürlich extrem lästig, weil uns das sozusagen die Kommutativität der Addition im Fall von unendlichen Summen kaputt macht – was völlig der Intuition widerspricht und natürlich auch beim Rechnen mit solchen Reihen große Probleme bereitet. Glücklicherweise gibt es einen relativ eleganten Ausweg aus dieser Situation: Es gibt eine Eigenschaft von Reihen, die etwas stärker als die normale Konvergenz ist, in vielen Fällen aber dennoch erfüllt ist und die Umsortierbarkeit ohne Änderung des Grenzwerts garantiert. Diese wollen wir jetzt einführen.

**Definition 7.10** (Absolute Konvergenz)**.** Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{K}$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ ihrer Beträge konvergiert, also nach Lemma 7.7 wenn diese Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ beschränkt ist.

(Der Name kommt einfach daher, dass man den Betrag einer Zahl oft auch als *Absolutbetrag* bezeichnet.)

Für Reihen, in denen nur nicht-negative reelle Zahlen aufsummiert werden, stimmen die Begriffe „konvergent“ und „absolut konvergent“ offensichtlich überein. Wir wollen nun sehen, dass der Begriff der absoluten Konvergenz für allgemeine Reihen wirklich „stärker“ als die gewöhnliche Konvergenz ist, also dass aus der absoluten Konvergenz einer Reihe auch die Konvergenz folgt. Dazu müssen wir zunächst das Cauchy-Kriterium aus Satz 6.25 auf Reihen übertragen. Auch hier ist dieses Kriterium wieder besonders deswegen wichtig, weil es zum einen zur Konvergenz *äquivalent* ist (man mit ihm also Konvergenz genauso wie Divergenz nachweisen kann) und es außerdem in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ gleichermaßen funktioniert.

**Folgerung 7.11** (**Cauchy-Kriterium** für Reihen)**.** *Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{K}$ ist genau dann konvergent, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m \geq n \geq n_0 \colon \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

*Beweis.* Nach Definition ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann konvergent, wenn die Folge $(s_N)_N$ der Partialsummen mit $s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ konvergiert. Wenden wir das Cauchy-Kriterium für Folgen aus Satz 6.25 auf $(s_N)_N$ an, sehen wir, dass dies genau dann der Fall ist, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m,n \geq n_0 \colon |s_n - s_m| < \varepsilon.$$

Natürlich können wir hier aus Symmetriegründen $m \geq n$ annehmen, und aus $s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^{m} a_k$ folgt dann sofort die Behauptung. □

**Lemma 7.12.** *Jede absolut konvergente Reihe in $\mathbb{K}$ ist konvergent.*

*Beweis.* Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe, d. h. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ sei konvergent. Nach dem Cauchy-Kriterium aus Folgerung 7.11 gibt es also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \right| = \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$$

für alle $m \geq n \geq n_0$. Dann ist nach der Dreiecksungleichung aber erst recht

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon,$$

und damit ist wiederum nach dem Cauchy-Kriterium auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent. □

**Beispiel 7.13.** Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ ist nach Beispiel 7.9 konvergent. Sie ist aber nicht absolut konvergent, da die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nach Beispiel 7.3 (c) divergiert. Die Umkehrung von Lemma 7.12 gilt also nicht.

Als Nächstes hatten wir behauptet, dass die absolute Konvergenz einer Reihe sicher stellt, dass man die Summanden ohne Änderung des Grenzwerts umordnen kann. Dies wollen wir jetzt zeigen.

**Definition 7.14** (Umordnungen einer Reihe)**.** Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$ und $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ (die offensichtlich aus den gleichen Summanden besteht, nur evtl. in anderer Reihenfolge) eine **Umordnung** von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

**Satz 7.15** (**Umordnungssatz**)**.** *Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist ebenfalls absolut konvergent und konvergiert gegen denselben Grenzwert.*

*Beweis.* Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Ferner sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ nach Voraussetzung konvergiert, gibt es nach dem Cauchy-Kriterium aus Folgerung 7.11 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $m \geq n \geq n_0$. Insbesondere haben wir für $n = n_0$ und $m \to \infty$ also

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{1}$$

Da $\sigma$ surjektiv ist, können wir ein $n_0' \geq n_0$ wählen, so dass alle Summanden $a_0, \ldots, a_{n_0}$ bis zum $n_0'$-ten Term der Umordnung aufgetreten sind, also so dass

$$\{0, 1, \ldots, n_0\} \subset \{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(n_0')\} \tag{2}$$

gilt. Wir betrachten nun für beliebiges $n \geq n_0'$ die Summe

$$\sum_{k=0}^{n} (a_{\sigma(k)} - a_k) = (a_{\sigma(0)} - a_0) + (a_{\sigma(1)} - a_1) + \cdots + (a_{\sigma(n)} - a_n).$$

Wegen (2) und $n \geq n_0' \geq n_0$ treten in dieser Summe alle Glieder $a_0, \ldots, a_{n_0}$ sowohl einmal mit positivem als auch einmal mit negativem Vorzeichen auf, heben sich also heraus. Die übrigen $a_n$ mit $n > n_0$ können sich ebenfalls herausheben, oder mit einem positiven oder negativen Vorzeichen auftreten. Wir können dies symbolisch schreiben als

$$\sum_{k=0}^{n} (a_{\sigma(k)} - a_k) = \sum_{k} \pm a_k,$$

wobei die Summe hier über gewisse (endlich viele) $k > n_0$ läuft und für jedes solche $k$ das Vorzeichen von $a_k$ positiv oder negativ sein kann. Damit können wir diesen Ausdruck mit der Dreiecksungleichung betragsmäßig abschätzen durch

$$\left| \sum_{k=0}^{n} (a_{\sigma(k)} - a_k) \right| = \left| \sum_{k} \pm a_k \right| \leq \sum_{k} |a_k| \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| \overset{(1)}{<} \varepsilon.$$

Daraus ergibt sich $\sum_{n=0}^{\infty}(a_{\sigma(n)} - a_n) = 0$, und damit nach den üblichen Rechenregeln aus Lemma 7.4

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{\sigma(n)} - a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Die Umordnung $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ konvergiert also gegen den gleichen Grenzwert wie die ursprüngliche Reihe. Wenden wir dieses Ergebnis nun auch noch auf die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ an, so erhalten wir genauso $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{\sigma(n)}| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, woraus die absolute Konvergenz der Umordnung folgt. □

**Bemerkung 7.16** (Summen mit abzählbar unendlicher Indexmenge)**.** Da es bei „unendlichen Summen“ im Fall der absoluten Konvergenz also nicht auf die Reihenfolge der Summanden ankommt, können wir damit auch derartige Summen definieren, bei denen die Summanden zunächst einmal

überhaupt keine vorgegebene Reihenfolge haben, sondern durch eine beliebige abzählbar unendliche Menge $I$ indiziert werden: Ist $a_i \in \mathbb{K}$ für alle $i \in I$, so wählen wir eine bijektive Abbildung $\sigma : \mathbb{N} \to I$. Ist dann die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ absolut konvergent, so schreiben wir den Wert dieser Reihe als

$$\sum_{i \in I} a_i := \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} \quad \in \mathbb{K}.$$

Dies hängt dann nach dem Umordnungssatz 7.15 nicht von der Wahl von $\sigma$ ab, da sich die durch eine andere Bijektion entstehende Reihe nur durch eine Umordnung unterscheidet und somit nichts an der absoluten Konvergenz bzw. dem Grenzwert der Reihe ändert.

Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ dagegen nicht absolut konvergent, so können wir $\sum_{i \in I} a_i$ nicht sinnvoll definieren. Auch für eine überabzählbare Indexmenge $I$ ist eine solche Summenbildung nicht möglich, wie die folgende Aufgabe zeigt – es käme in nicht-trivialen Fällen nämlich immer $\infty$ dabei heraus.

**Aufgabe 7.17.** Es seien $a_i \in \mathbb{R}_{>0}$ für alle $i$ in einer überabzählbaren Indexmenge $I$. Zeige, dass die Summe aller dieser $a_i$ dann unbeschränkt ist, also dass es zu jedem $s \in \mathbb{R}_{>0}$ eine endliche Teilmenge $J \subset I$ gibt mit $\sum_{i \in J} a_i > s$.

**Aufgabe 7.18.** Zeige die folgende Verallgemeinerung des Leibniz-Kriteriums ins Komplexe: Ist $(a_n)_n$ eine reelle, monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| = 1$ und $x \neq 1$.

(Hinweis: Untersuche die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1) x^n$.)

Aufgrund der schönen Eigenschaften absolut konvergenter Reihen werden wir uns im Folgenden oftmals eher für die absolute als für die „gewöhnliche“ Konvergenz von Reihen interessieren. Wir wollen nun ein paar Kriterien zusammentragen, mit denen man die absolute Konvergenz von Reihen in vielen Fällen einfach nachprüfen kann. Das erste von ihnen ist eigentlich sehr offensichtlich:

**Satz 7.19 (Majoranten-/Minorantenkriterium).** *Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei Reihen in $\mathbb{K}$ mit $|a_n| \leq |b_n|$ für fast alle $n$.*

(a) *Ist $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent, so auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.*
*(Man nennt $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ in diesem Fall eine konvergente **Majorante** von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.)*

(b) *Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent, so auch $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$.*
*(Man nennt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in diesem Fall eine divergente **Minorante** von $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$.)*

*Beweis.*

(a) Ist $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent, also $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ beschränkt, so ist wegen $|a_n| \leq |b_n|$ für fast alle $n$ auch $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ beschränkt, und damit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nach Lemma 7.7 absolut konvergent.

(b) Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht konvergent, so ist sie nach Lemma 7.12 insbesondere auch nicht absolut konvergent, und daher kann nach (a) auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nicht absolut konvergent sein, d. h. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ divergiert. □

**Beispiel 7.20.**

(a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent: Wegen $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ für $n \geq 1$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ nach Beispiel 7.3 (b) eine (absolut) konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$. Damit konvergiert die Reihe

$$\frac{1}{1^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Beachte, dass man auf diese Art mit Hilfe des Majorantenkriteriums zwar die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ beweisen, aber nicht ihren Grenzwert bestimmen kann (in der Tat kann man zeigen, dass der Wert dieser Reihe gleich $\frac{\pi^2}{6}$ ist).

(b) Für $k \geq 2$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konvergent, denn wegen $\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n^2}$ für alle $n$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ nach (a) eine konvergente Majorante.

(c) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ dagegen ist divergent, denn wegen $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ ist die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ aus Beispiel 7.3 (c) eine divergente Minorante.

**Aufgabe 7.21.** Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{K}$ mit $a_n \neq -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man zeige:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ ist absolut konvergent} \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \text{ ist absolut konvergent.}$$

Wenn man mit dem Majorantenkriterium die (absolute) Konvergenz einer Reihe nachweisen möchte, stellt sich natürlich die Frage, wo man eine konvergente Majorante herbekommt. Sehr oft kann man hierfür einfach eine geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ für ein $q \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $q < 1$ wie in Beispiel 7.3 (a) verwenden. Aus diesem Ansatz ergeben sich in der Tat die folgenden beiden allgemeinen Kriterien, die sehr oft anwendbar sind:

**Satz 7.22 (Quotientenkriterium).** *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$ mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n$. Dann gilt:*

(a) *Ist $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*

(b) *Ist $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.*

*Der Fall $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ ist dabei in (b) zugelassen. Ist die Folge $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_n$ jedoch unbestimmt divergent oder konvergiert sie gegen 1, so macht das Quotientenkriterium keine Aussage.*

*Beweis.* Es sei $a := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

(a) Ist $a < 1$, so können wir ein $\varepsilon > 0$ wählen, so dass auch noch $q := a + \varepsilon < 1$ gilt. Wegen $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a$ gibt es dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < a + \varepsilon = q \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

und damit $|a_{n+1}| < q\,|a_n|$. Daraus ergibt sich für alle $n \geq n_0$

$$|a_n| < q\,|a_{n-1}| < q^2\,|a_{n-2}| < \cdots < q^{n-n_0}\,|a_{n_0}|.$$

Also ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n-n_0}\,|a_{n_0}|$ eine Majorante der gegebenen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Wegen $q < 1$ konvergiert sie nach Beispiel 7.3 (a) absolut, denn es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n-n_0}\,|a_{n_0}| = q^{-n_0}\,|a_{n_0}| \sum_{n=0}^{\infty} q^n = q^{-n_0}\,|a_{n_0}| \cdot \frac{1}{1-q}.$$

Die zu beweisende Aussage folgt damit aus dem Majorantenkriterium von Satz 7.19. 15

(b) Ist $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$, so können wir ein $\varepsilon > 0$ finden mit $a - \varepsilon > 1$. In diesem Fall gibt es nach der Grenzwertbedingung ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > a - \varepsilon > 1 \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Beachte, dass dies auch im Fall $a = \infty$ gilt, denn auch dann sind ja insbesondere fast alle $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ größer als 1.

Also gilt $|a_{n+1}| > |a_n|$ für alle $n \geq n_0$. Damit ist $(|a_n|)_n$ ab $n_0$ aber eine monoton wachsende Folge positiver Zahlen, und kann somit keine Nullfolge sein. Die gegebene Reihe divergiert also nach dem Trivialkriterium aus Lemma 7.5. □

Das zweite, recht ähnliche Kriterium, das auf dem Vergleich mit der geometrischen Reihe beruht, benutzt die höheren Wurzeln aus Aufgabe 5.37.

**Satz 7.23 (Wurzelkriterium).** *Für jede Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *in* $\mathbb{K}$ *gilt:*

(a) *Ist* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *so ist die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

(b) *Ist* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *so ist die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergent.*

*Der Fall* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ *ist dabei in (b) wieder zugelassen. Ist jedoch* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, *so macht das Wurzelkriterium keine Aussage.*

*Beweis.* Es sei $a := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

(a) Für $a < 1$ sei wieder $\varepsilon > 0$ mit $q := a + \varepsilon < 1$. Nach Lemma 5.47 (a) gilt dann

$$\sqrt[n]{|a_n|} < a + \varepsilon = q, \qquad \text{also} \quad |a_n| < q^n$$

für fast alle $n$. Also ist $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ eine Majorante der gegebenen Reihe. Da diese wegen $q < 1$ nach Beispiel 7.3 (a) (absolut) konvergiert, konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nach dem Majorantenkriterium aus Satz 7.19 absolut.

(b) Ist $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$, so wählen wir ein $\varepsilon > 0$ mit $a - \varepsilon > 1$. Diesmal folgt dann aus Lemma 5.47 (b), dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} > a - \varepsilon > 1$$

für unendlich viele $n$. Beachte, dass dies auch im Fall $a = \infty$ gilt, weil die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})_n$ dann eine Teilfolge mit uneigentlichem Grenzwert $\infty$ hat.

Damit ist aber auch $|a_n| > 1$ für unendlich viele $n$. Also ist $(a_n)_n$ keine Nullfolge, und die gegebene Reihe divergiert nach dem Trivialkriterium aus Lemma 7.5. □

**Bemerkung 7.24** (Vergleich von Quotienten- und Wurzelkriterium)**.** Das Quotientenkriterium hat gegenüber dem Wurzelkriterium den Vorteil, dass sich der Quotient $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ oft einfacher berechnen lässt als die Wurzel $\sqrt[n]{|a_n|}$. Allerdings benötigen wir im Quotientenkriterium einen Grenzwert der Quotientenfolge, während im Wurzelkriterium der Limes superior der Wurzelfolge genügt, der ja nach Bemerkung 5.52 zumindest im uneigentlichen Sinne stets existiert.

Dies liegt daran, dass wir für die Induktion im Beweis von Satz 7.22 brauchten, dass fast alle Quotienten in (a) kleiner als $a + \varepsilon$ und in (b) größer als $a - \varepsilon$ sind, so dass $a$ dort der Grenzwert der Quotientenfolge sein musste. Im Beweis von Satz 7.23 brauchten wir dagegen in (a) zwar auch, dass fast alle Wurzeln kleiner als $a + \varepsilon$ sind, aber in (b) reichten unendlich viele Wurzeln größer als $a - \varepsilon$.

Mit dieser Beobachtung sieht man allerdings mit Hilfe von Lemma 5.47 auch, dass wir den Grenzwert im Quotientenkriterium von Satz 7.22 in (a) durch den Limes superior und in (b) durch den Limes inferior ersetzen könnten, um so noch allgemeinere Aussagen zu erhalten. Hat die Quotientenfolge jedoch mehrere Häufungspunkte, von denen einer größer als 1 und einer kleiner als 1 ist, so lässt sich aus der Idee des Quotientenkriteriums aber endgültig keine Aussage über die Konvergenz der Reihe mehr herleiten.

**Beispiel 7.25.**

(a) Betrachten wir für ein $q \in \mathbb{K}$ mit $q \neq 0$ die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ selbst, ist also $a_n = q^n$ in der Notation von Satz 7.22 und 7.23, so ist offensichtlich $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \sqrt[n]{|a_n|} = |q|$ unabhängig von $n$, und sowohl Quotienten- als auch Wurzelkriterium reproduzieren einfach das Ergebnis aus Beispiel 7.3 (a) in den Fällen mit $|q| \neq 1$.

(b) Für die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ aus Beispiel 7.9 macht das Quotientenkriterium keine Aussage, denn dort gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}/(n+1)}{(-1)^n/n}\right| = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$$

für $n \to \infty$. Dies war natürlich zu erwarten, da diese Reihe ja auch weder absolut konvergent noch divergent ist.

(c) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ ist nach dem Wurzelkriterium (absolut) konvergent, denn es ist

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2}$$

für $n \to \infty$.

(d) Für alle $x \in \mathbb{K}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent, denn es gilt

$$\left|\frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0$$

für $n \to \infty$. Auf diese Art haben wir also letztlich eine Funktion von $\mathbb{K}$ nach $\mathbb{K}$ definiert, die jedem $x$ den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ zuordnet.

Es handelt sich bei diesem letzten Beispiel genau um die Exponentialfunktion, die ihr zumindest im reellen Fall bereits aus der Schule kennt. Sie ist aber letztlich nur ein spezielles Beispiel für eine sehr große Klasse von Funktionen, die sich in der Form $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für gewisse $a_n \in \mathbb{K}$ schreiben lassen. Wir wollen derartige Funktionen, die in dieser Vorlesung immer wieder vorkommen werden, daher jetzt einführen und etwas genauer untersuchen.

## 7.C Potenzreihen

Potenzreihen kann man sich in gewissem Sinne als Verallgemeinerung der Polynome aus Abschnitt 3.C vorstellen: statt endlicher Summen $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ in einer Variablen $x$ betrachten wir nun unendliche Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

Wir beginnen mit der formalen Definition solcher Reihen, zusammen mit dem wohl wichtigsten Beispiel: der Exponentialfunktion.

**Definition 7.26** (Potenzreihen und die Exponentialfunktion)**.**

(a) Ist $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $x \in \mathbb{K}$, so heißt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die **Potenzreihe** in $x$ mit Koeffizienten $(a_n)_n$. Ist $D \subset \mathbb{K}$ die Menge aller $x$, für die diese Reihe konvergiert, so können wir die Potenzreihe offensichtlich als Funktion von $D$ nach $\mathbb{K}$ auffassen.

Der Startindex einer Potenzreihe darf auch größer als 0 sein (dann kann man die ersten Koeffizienten ja gleich 0 setzen), aber nie kleiner als 0 – eine Potenzreihe in $x$ enthält nach Definition keine negativen Potenzen von $x$.

(b) Die **Exponentialfunktion** ist die Potenzreihenfunktion

$$\exp\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K} \qquad \text{mit} \qquad \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(die nach Beispiel 7.25 (d) für alle $x \in \mathbb{K}$ absolut konvergiert).

Aus dem Wurzelkriterium können wir sofort eine allgemeine Aussage ableiten, auf welchen Gebieten derartige Potenzreihen konvergieren: nämlich auf um 0 zentrierten Intervallen (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. auf Kreisen um 0 (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

**Satz und Definition 7.27** (Konvergenzgebiete von Potenzreihen, Formel von **Cauchy-Hadamard**)**.** *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe über $\mathbb{K}$ und*

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

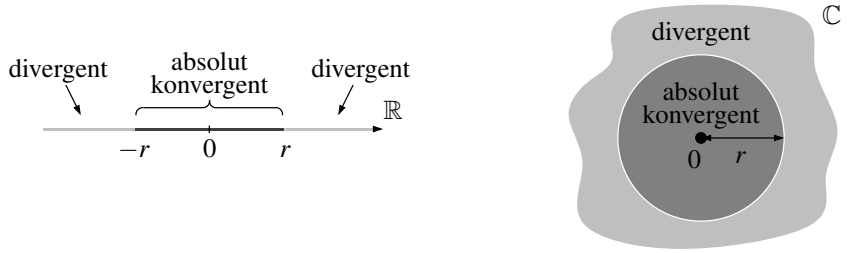
*(beachte, dass dieser Wert nach Bemerkung 5.52 in jedem Fall existiert). Dann gilt:*

(a) *für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < r$ ist die Potenzreihe absolut konvergent;*

(b) *für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| > r$ ist die Potenzreihe divergent.*

*Im Fall $|x| = r$ kann keine allgemeine Aussage über die Konvergenz der Reihe getroffen werden.*

*Die geometrische Deutung dieser Konvergenzaussagen im reellen bzw. komplexen Fall zeigt das folgende Bild. Man nennt $r$ den **Konvergenzradius** und $\{x \in \mathbb{K} : |x| < r\}$ das **Konvergenzgebiet** der Potenzreihe.*




*Beweis.* Wir wenden das Wurzelkriterium aus Satz 7.23 auf die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ an: Nach Aufgabe 5.51 (b) ist für alle $x \in \mathbb{K}$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup_{n\to\infty} \left(|x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|}\right) = |x| \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{r},$$

also konvergiert die Reihe absolut für $\frac{|x|}{r} < 1$ (d. h. $|x| < r$) und divergiert für $\frac{|x|}{r} > 1$ (d. h. $|x| > r$). □

**Bemerkung 7.28.** Beachte, dass die Eigenschaften (a) und (b) aus Satz 7.27 den Konvergenzradius eindeutig charakterisieren als

$$r = \sup\left\{|x| : x \in \mathbb{K} \text{ mit } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergent}\right\}. \qquad (*)$$

So ist z. B. auch ohne Berechnung des Ausdrucks für $r$ in Satz 7.27 klar, dass die Exponentialreihe aus Definition 7.26 (b) den Konvergenzradius $\infty$ hat, da sie ja auf ganz $\mathbb{K}$ konvergiert. In der Tat wird die Gleichung $(*)$ in der Literatur auch oft als Definition des Konvergenzradius einer Potenzreihe benutzt.

Es sollte nicht überraschen, dass man nicht nur mit dem Wurzelkriterium, sondern auch mit dem Quotientenkriterium eine Aussage über den Konvergenzradius einer Potenzreihe treffen kann. Allerdings ist diese nicht ganz so universell, da sie wie in Satz 7.22 die Existenz des Grenzwerts der Quotientenfolge der Koeffizienten voraussetzt.

**Satz 7.29** (Alternative Formel für den Konvergenzradius einer Potenzreihe)**.** *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n$. Existiert dann der Grenzwert*

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\},$$

*so ist dies der Konvergenzradius der Potenzreihe.*

*Beweis.* Wegen

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\,x^{n+1}}{a_n\,x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(|x|\cdot\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{r}$$

konvergiert die Potenzreihe nach Satz 7.22 absolut für $|x|<r$ und divergiert für $|x|>r$. Nach Bemerkung 7.28 ist $r$ damit der Konvergenzradius der Reihe. □

**Beispiel 7.30.**

(a) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ hat nach Satz 7.29 den Konvergenzradius

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/n}{1/(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1,$$

konvergiert also für alle $x\in\mathbb{K}$ mit $|x|<1$ absolut und divergiert für alle $x$ mit $|x|>1$. Für $|x|=1$ treten in der Tat verschiedene Fälle auf: Im Fall $x=1$ erhalten wir die harmonische Reihe, die nach Beispiel 7.3 (c) divergiert, während wir für $x=-1$ die alternierende harmonische Reihe haben, die nach Beispiel 7.9 konvergiert. Dies zeigt noch einmal, dass unsere obigen nur von $|x|$ abhängigen Kriterien auf dem Rand des Konvergenzgebiets wirklich keine allgemeine Aussage machen können.

(b) Für den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n\,x^n$ gilt nach Satz 7.27 und 7.29

$$r=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}} \qquad \text{sowie} \qquad r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = 1.$$

Vergleich dieser beiden Ergebnisse liefert also $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. Für alle $\varepsilon>0$ gilt damit nach Lemma 5.47 (a), dass $\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$ für fast alle $n$. Natürlich ist aber auch $\sqrt[n]{n}\geq 1$ für alle $n$, und damit ergibt sich zusammen

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

(was gar nicht so offensichtlich ist, da der Ausdruck $\sqrt[n]{n}$ für wachsendes $n$ ja durch das $n$ unter der Wurzel größer, durch das Ziehen der $n$-ten Wurzel aber kleiner wird).

**Aufgabe 7.31.** Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz (im Fall (c) in Abhängigkeit von $x\in\mathbb{R}$):

$$\text{(a)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(3+(-1)^n)^n}, \qquad \text{(b)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n}, \qquad \text{(c)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}x^n.$$

Eine Berechnung des Grenzwerts im Fall der Konvergenz ist nicht erforderlich.

**Aufgabe 7.32.** Zeige, dass jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in $\mathbb{K}$ denselben Konvergenzradius wie ihre „formale Ableitung“ $\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,x^{n-1}$ hat, aber nicht notwendig für die gleichen $x$ konvergiert.

(Wir werden in Folgerung 10.27 sehen, dass dies dann auch genau die „gewöhnliche“ Ableitung der ursprünglichen Reihe ist.)

**Aufgabe 7.33.** Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Man zeige:

(a) Ist $a_n$ der Quotient von zwei Polynomen in $n$, so machen weder das Quotienten- noch das Wurzelkriterium eine Aussage über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(b) Macht das Wurzelkriterium keine Aussage über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, so macht auch das Quotientenkriterium keine Aussage darüber.

**Aufgabe 7.34** (Alternative Darstellung der Exponentialfunktion)**.** Zeige, dass für alle $x\in\mathbb{K}$

$$\exp(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

gilt. (Hinweis: Eine Möglichkeit besteht darin, durch eine geeignete Abschätzung zu zeigen, dass

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

mit $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.)

Der Ausdruck $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ in dieser Darstellung der Exponentialfunktion hat übrigens eine sehr anschauliche Interpretation: Wenn ihr 1 Euro zu einem Zinssatz $x$ ein Jahr lang anlegt und sich die Bank bereit erklärt, nicht einmal am Ende des Jahres den Betrag $x$ an Zinsen auszuzahlen, sondern stattdessen $n$-mal einen Zinssatz von $\frac{x}{n}$ bezahlt, so habt ihr dadurch am Ende des Jahres aufgrund des Zinseszinses natürlich mehr Geld als bei einer einmaligen Zinszahlung, nämlich genau $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Die gerade gezeigte Formel besagt, dass ihr selbst für $n \to \infty$, also wenn ihr die Bank zu einer unendlichen Aufteilung der Zinsen auf diese Art überreden könntet, dadurch kein unendliches Vermögen aufbauen könntet, sondern am Ende des Jahres lediglich den Betrag von $\exp(x)$ hättet.

Zum Schluss dieses Kapitels wollen wir nun noch Produkte von Reihen untersuchen. Haben wir z. B. zwei Potenzreihen $\sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ und $\sum_{l=0}^\infty b_l x^l$, so würden wir erwarten, dass wir ihr Produkt für alle $x$ im Durchschnitt der Konvergenzgebiete der beiden Reihen wie folgt durch „unendliches Ausmultiplizieren“ berechnen und wieder zu einer neuen Potenzreihe zusammenfassen können:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^\infty a_k x^k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^\infty b_l x^l\right) &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) \\ &\overset{?}{=} a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^\infty c_n x^n\end{aligned}$$

mit $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Wir wollen nun zeigen, dass dies in der Tat erlaubt ist – und zwar auch für allgemeine Reihen, nicht nur für Potenzreihen (also wenn wir uns das $x$ in der obigen Rechnung wegdenken). Da die einzelnen ausmultiplizierten Summanden in der entstehenden Reihe dabei aber irgendwie sortiert werden müssen, sollte es in Anbetracht des Umordnungssatzes 7.15 nicht überraschen, dass wir für die Gültigkeit dieser Rechnung die *absolute* Konvergenz der Reihen benötigen.

**Satz 7.35 (Cauchy-Produkt** von Reihen**).** *Es seien $\sum_{k=0}^\infty a_k$ und $\sum_{l=0}^\infty b_l$ zwei absolut konvergente Reihen in $\mathbb{K}$. Setzen wir dann*

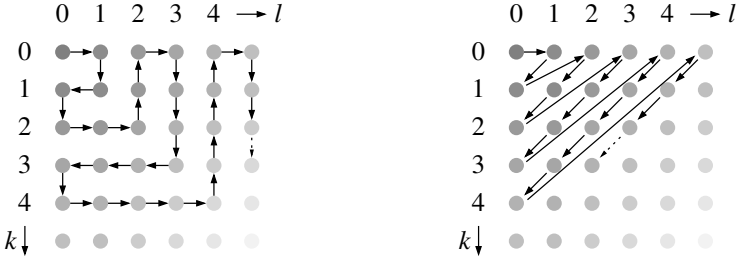
$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

*für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch die Reihe $\sum_{n=0}^\infty c_n$ absolut konvergent, und es gilt*

$$\left(\sum_{k=0}^\infty a_k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^\infty b_l\right) = \sum_{n=0}^\infty c_n. \qquad (*)$$

16

*Beweis.* Nach Voraussetzung existieren die Grenzwerte $A := \sum_{k=0}^\infty |a_k|$ und $B := \sum_{l=0}^\infty |b_l|$ in $\mathbb{R}$. Wir zeigen, dass die Summe $\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} a_k b_l$ über die nach Beispiel 5.59 (a) abzählbare Indexmenge $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ im Sinne von Bemerkung 7.16 existiert und mit dem Wert beider Seiten der Gleichung $(*)$ übereinstimmt. Dazu betrachten wir die beiden im folgenden Bild dargestellten Aufzählungen von $\mathbb{N}^2$: eine „quadratische“, und eine „schräge“ wie im Cantorschen Diagonalverfahren im Beweis von Satz 5.58.



(a) Summieren wir zunächst die Beträge $|a_k b_l|$ in der Reihenfolge dieser „quadratischen“ Aufzählung, so erhalten wir nach der Summation von höchstens $n^2$ Termen, also denen im Quadrat links oben mit $n$ Zeilen und Spalten, maximal den Wert

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}|a_k b_l| = \left(\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{n-1}|b_l|\right) \le A\cdot B.$$

Die Reihe über alle $|a_k b_l|$ ist (in dieser Aufzählungsreihenfolge) also beschränkt. Damit ist die Reihe über $a_k b_l$ nach Definition 7.10 absolut konvergent, und nach Bemerkung 7.16 existiert somit die Reihe $\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} a_k b_l$.

Um den Wert dieser Reihe zu bestimmen, können wir nach Lemma 5.19 auch nur eine Teilfolge der Partialsummenfolge betrachten. Nehmen wir hierzu die Partialsummen, bei denen wir die ersten $n^2$ Terme aufaddieren, und lassen dort $n$ gegen $\infty$ gehen, so erhalten wir

$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} a_k b_l = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} a_k b_l = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{n-1} b_l\right) \overset{5.13}{=} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right),$$

also die linke Seite von $(*)$.

(b) In dieser „schrägen“ Aufzählungsreihenfolge können wir den Wert von $\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} a_k b_l$ analog als Grenzwert für $N\to\infty$ der Partialsummen bestimmen, bei denen wir die ersten $N$ Diagonalen aufsummieren. Da die Summe der $a_k b_l$ entlang der Diagonale mit $k+l=n$ gerade $c_n$ ist, erhalten wir so

$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} a_k b_l = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

und damit durch Vergleich mit (a) die behauptete Gleichheit $(*)$. Weil die ersten $N$ Diagonalen außerdem im Quadrat links oben mit $N$ Zeilen und Spalten enthalten sind, haben wir weiterhin mit der Dreiecksungleichung

$$\sum_{n=0}^{N-1}|c_n| = \sum_{n=0}^{N-1}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right| \le \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{n}|a_k|\cdot|b_{n-k}| \le \left(\sum_{k=0}^{N-1}|a_k|\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{N-1}|b_l|\right) \le A\cdot B$$

und damit auch die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ gezeigt. □

Die wohl wichtigste Anwendung des Cauchy-Produkts erhalten wir im Fall der Exponentialfunktion.

**Folgerung 7.36** (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)**.** *Für alle $x,y\in\mathbb{K}$ gilt*

$$\exp(x)\cdot\exp(y) = \exp(x+y).$$

*Beweis.* Nach Beispiel 7.25 (d) und Definition 7.26 (b) konvergiert die Exponentialreihe auf ganz $\mathbb{K}$ absolut. Also gilt für alle $x,y\in\mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
\exp(x)\cdot\exp(y) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{y^l}{l!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right) && \text{(nach dem Cauchy-Produkt aus Satz 7.35)}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!} && \text{(nach der binomischen Formel aus Satz 4.7)}\\
&= \exp(x+y),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

**Bemerkung 7.37** (Produkte von Potenzreihen)**.** Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $\sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l$ zwei Potenzreihen in $x$ mit Konvergenzradien $r_1$ bzw. $r_2$, so gilt nach Satz 7.35 für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < \min(r_1, r_2)$ (wo also nach Satz 7.27 beide Potenzreihen absolut konvergieren)

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n,$$

d. h. das Produkt zweier Potenzreihen mit Konvergenzradien $r_1$ und $r_2$ ist wieder eine Potenzreihe, deren Konvergenzradius mindestens $\min(r_1, r_2)$ beträgt und die wie erwartet durch „unendliches Ausmultiplizieren“ berechnet werden kann.

Dies ist ein erstes Beispiel für ein generelles Prinzip, das wir in den folgenden Kapiteln immer wieder sehen werden (siehe z. B. Bemerkung 12.38): Potenzreihen haben sehr viele schöne Eigenschaften – obwohl sie als „unendliche Summe von Potenzfunktionen“ definiert sind, kann man mit ihnen nahezu immer wie mit Polynomen rechnen, also als ob sie eine „*endliche* Summe von Potenzfunktionen“ wären.

**Aufgabe 7.38.** Es sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Berechne das Cauchy-Produkt $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2$ und damit den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n q^n$.

**Aufgabe 7.39.** Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Zeige in diesem Fall, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zwar konvergiert, aber dass ihr Cauchy-Produkt mit sich selbst wie in Satz 7.35

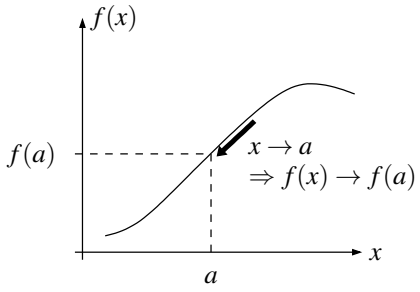
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

divergiert.

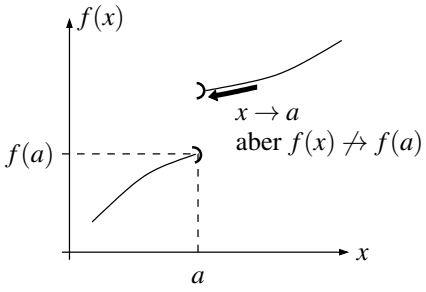
# 8. Stetigkeit

Nachdem wir uns gerade ausführlich mit Grenzwerten von Folgen und Reihen befasst haben, wollen wir den Grenzwertbegriff nun auf Funktionen einer reellen (oder evtl. komplexen) Variablen ausdehnen, also auf Funktionen $f\colon D \to \mathbb{K}$ mit einer Definitionsmenge $D \subset \mathbb{K}$. Dies führt zum zentralen Begriff der Stetigkeit solcher Funktionen.

Anschaulich ist die Frage dabei: Wenn eine Stelle $a \in D$ mit Funktionswert $f(a)$ gegeben ist, und wir nun andere Punkte $x \in D$ in der Nähe von $a$ betrachten, liegt dann auch $f(x)$ in der Nähe von $f(a)$? Im Bild unten links ist dies der Fall: Laufen wir entlang des dick eingezeichneten Pfeils mit $x$ auf den Punkt $a$ zu, so nähern sich auch die Funktionswerte $f(x)$ dem Punkt $f(a)$. In diesem Fall werden wir sagen, dass $f$ im Punkt $a$ stetig ist.




$f$ ist stetig in $a$




$f$ ist nicht stetig in $a$

Im Bild oben rechts dagegen führt der Sprung im Funktionsgraphen zu einem anderen Verhalten: Nähern wir uns hier entlang des dick eingezeichneten Pfeils mit $x$ dem Punkt $a$, so nähert sich $f(x)$ nicht dem Wert $f(a)$, sondern dem oberen Punkt der Sprungstelle. In diesem Fall ist $f$ im Punkt $a$ unstetig.

Um dies mathematisch exakt zu formulieren, wollen wir jetzt den Begriff von Funktionsgrenzwerten einführen. Im linken Fall können wir dann sagen, dass $f(x)$ mit $x \to a$ gegen $f(a)$ konvergiert, während dies im Fall rechts nicht so ist.

## 8.A Grenzwerte von Funktionen

Wie eben erläutert wollen wir das Verhalten von Funktionen $f\colon D \to \mathbb{K}$ mit $D \subset \mathbb{K}$ untersuchen, wenn wir uns einem vorgegebenen Punkt $a$ nähern. Dieser Wert $a$ kann dabei, muss aber nicht unbedingt selbst Element von $D$ sein. Wir sollten aber natürlich sicherstellen, dass wir uns zumindest innerhalb von $D$ dem Punkt $a$ beliebig annähern können – also anschaulich gesprochen, dass $a$ entweder in $D$ oder am Rand von $D$ liegt. Formal bedeutet dies, dass $a$ im Sinne der folgenden Definition ein Berührpunkt von $D$ sein muss.

**Definition 8.1** (Berührpunkte)**.** Es sei $D \subset \mathbb{K}$ eine Menge. Eine Zahl $a \in \mathbb{K}$ heißt **Berührpunkt** von $D$, wenn jede $\varepsilon$-Umgebung von $a$ (siehe Bemerkung 5.2) mindestens einen Punkt aus $D$ enthält, also wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in D$ gibt mit $|x-a| < \varepsilon$. Die Menge aller Berührpunkte von $D$ wird mit $\overline{D}$ bezeichnet und heißt der **Abschluss** von $D$.

**Beispiel 8.2.**

(a) Für ein $D \subset \mathbb{K}$ ist jedes $a \in D$ Berührpunkt von $D$: Wir können in diesem Fall in der Definition 8.1 einfach $x = a$ für jedes $\varepsilon$ wählen. Es gilt also stets $D \subset \overline{D}$.

(b) Für ein offenes reelles Intervall $D = (a,b) \subset \mathbb{R}$ ist $\overline{D} = [a,b]$ das zugehörige abgeschlossene Intervall. Die Randpunkte $a$ und $b$ sind also Berührpunkte von $D$, die nicht selbst zu $D$ gehören.

Für derartige Berührpunkte können wir nun Grenzwerte von Funktionen definieren. Die Konstruktion ist völlig analog zur Definition 5.1 (b) des Grenzwerts von Folgen:

**Definition 8.3** (Grenzwerte von Funktionen)**.** Es seien $D \subset \mathbb{K}$ eine Menge und $f\colon D \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Ferner sei $a \in \overline{D}$ ein Berührpunkt von $D$.

Dann heißt eine Zahl $c \in \mathbb{K}$ **Grenzwert** von $f$ in $a$, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in D\colon |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-c| < \varepsilon.$$

Wie schon im Fall von Folgen werden wir sehen (siehe Bemerkung 8.13), dass ein solcher Grenzwert im Fall der Existenz eindeutig ist, so dass wir also von *dem* Grenzwert von $f$ in $a$ sprechen können. Wir schreiben dies dann als

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x) = c$$

oder auch als „$f(x) \to c$ für $x \to a$“, und sagen, dass $f$ in $a$ **konvergent** ist gegen $c$. Existiert ein solcher Grenzwert nicht, so heißt $f$ **divergent** in $a$.

**Bemerkung 8.4.** Gilt in Definition 8.3 sogar $a \in D$, so kommt als Grenzwert $c$ nur $f(a)$ in Frage: Wir können dann nämlich $x = a$ in der Grenzwertbedingung von Definition 8.3 setzen (so dass $|x-a| < \delta$ in jedem Fall erfüllt ist) und erhalten damit $|f(a)-c| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon$ – was nur möglich ist, wenn $c = f(a)$ ist.

**Definition 8.5** (Stetigkeit)**.** Es seien $D \subset \mathbb{K}$ eine Menge und $f\colon D \to \mathbb{K}$ eine Funktion.

(a) Ist $a \in D$, so heißt $f$ **stetig** in $a$, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert (und nach Bemerkung 8.4 damit zwangsläufig gleich $f(a)$ ist), d. h. wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in D\colon |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon.$$

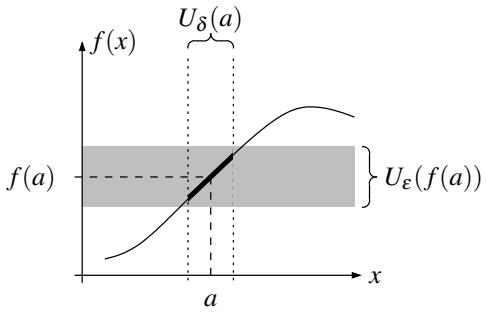
Die Funktion $f$ heißt **stetig** (auf $D$), wenn sie in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

(b) Ist $a \in \overline{D} \backslash D$, so heißt $f$ **stetig fortsetzbar** nach $a$, wenn der Grenzwert $c = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert. (In diesem Fall erhält man nämlich eine in $a$ stetige Funktion

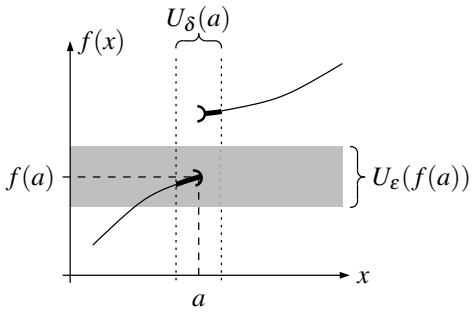
$$\tilde{f}\colon D \cup \{a\} \to \mathbb{K},\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in D, \\ c & \text{für } x = a, \end{cases}$$

die man als stetige Fortsetzung von $f$ nach $a$ bezeichnet.)

**Bemerkung 8.6** (Anschauliche Deutung des Grenzwertbegriffs)**.** Das Bild unten zeigt noch einmal das Beispiel vom Anfang dieses Kapitels mit den eben eingeführten Notationen: Nach Definition ist eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}$ genau dann stetig in einem Punkt $a \in D$, wenn es zu jeder (beliebig kleinen) $\varepsilon$-Umgebung $U_\varepsilon(f(a))$ von $f(a)$ eine $\delta$-Umgebung $U_\delta(a)$ von $a$ gibt, in der alle Punkte von $D$ nach $U_\varepsilon(f(a))$ abgebildet werden, also so dass $f(D \cap U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a))$ gilt. Im Bild unten bedeutet dies, dass zu jedem auch noch so schmal gewählten grauen horizontalen Streifen um $f(a)$ eine Einschränkung von $f$ auf eine hinreichend kleine Umgebung von $a$ dazu führt, dass alle Funktionswerte dort (im Bild unten dick eingezeichnet) in dem gewählten Streifen liegen. Dies entspricht genau der ursprünglichen Motivation, dass eine kleine Änderung von $x$ um $a$ herum auch nur zu einer kleinen Änderung der Funktionswerte $f(x)$ um $f(a)$ führen darf. Bei der linken Funktion ist dies also der Fall, bei der rechten aufgrund der Sprungstelle jedoch nicht.




$f$ ist stetig in $a$




$f$ ist nicht stetig in $a$

Die ebenfalls oft gehörte geometrische Interpretation, dass eine reelle Funktion stetig ist, wenn man „ihren Graphen zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen“, ist übrigens etwas mit Vorsicht zu genießen, wie die Beispiele 8.7 (e) und (f) unten zeigen.

**Beispiel 8.7.**

(a) Die Identität $f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto x$ ist stetig: Sind $a \in \mathbb{K}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben, so setze man $\delta := \varepsilon$. Dann gilt natürlich für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x-a| < \delta$, dass $|f(x)-f(a)| = |x-a| < \delta = \varepsilon$. Analog zeigt man, dass konstante Funktionen stetig sind.

(b) Wir zeigen, dass die Betragsfunktion $f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto |x|$ stetig ist. Es seien dazu $a \in \mathbb{K}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir setzen wieder $\delta := \varepsilon$. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x-a| < \delta$ mit Hilfe der Dreiecksungleichung nach unten

$$|x-a| \geq |x|-|a| \quad \text{und} \quad |x-a| \geq |a|-|x|.$$

Da $|f(x)-f(a)| = \big||x|-|a|\big|$ aber eine der beiden Zahlen $|x|-|a|$ und $|a|-|x|$ sein muss, ergibt sich in jedem Fall

$$|f(x)-f(a)| \leq |x-a| < \delta = \varepsilon.$$

Damit ist $f$ stetig.

(c) Analog ist die komplexe Konjugation $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$ (siehe Notation 6.2) stetig: Sind $a \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben, so setzen wir $\delta := \varepsilon$ und erhalten für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| < \delta$

$$|f(z)-f(a)| = |\overline{z}-\overline{a}| = |\overline{z-a}| = |z-a| < \delta = \varepsilon.$$

(d) Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

(siehe Bild unten) ist in $a = 0$ nicht stetig. Wollen wir dies formal zeigen, müssen wir die Negation der Bedingung aus Definition 8.5 (a) beweisen, d. h.

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R}\colon\ |x-a| < \delta \text{ und } |f(x)-f(a)| \geq \varepsilon.$$

(Beachte dabei, dass die Negation der Aussage „$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$“ nach Beispiel 1.9 (a) die angegebene Bedingung „$|x-a| < \delta$ *und* $|f(x)-f(a)| \geq \varepsilon$“ ist, und nicht etwa eine Folgerung „$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \geq \varepsilon$“!)

Dies zu zeigen ist hier aber sehr einfach: Setzen wir $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und ist $\delta > 0$ beliebig, so können wir $x = \frac{\delta}{2}$ setzen und erhalten $|x-a| = \frac{\delta}{2} < \delta$ und $|f(x)-f(a)| = |0-1| = 1 \geq \varepsilon$. 17

Anders ausgedrückt existiert in diesem Fall der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nicht. Falls ihr jetzt gedacht hättet, dass dieser Grenzwert doch existiert und gleich 0 ist, so habt ihr damit sicher gemeint, dass sich $f(x)$ dem Wert 0 nähert, wenn $x$ in der Nähe von 0, *aber nicht gleich* 0 ist. Der Fall $x = 0$ (bzw. $x = a$) ist in Definition 8.3 aber nicht ausgeschlossen! Wenn wir dies

ausschließen wollten, so müssten wir die Definitionsmenge von $f$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ einschränken und würden dann in der Tat

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 0$$

erhalten.

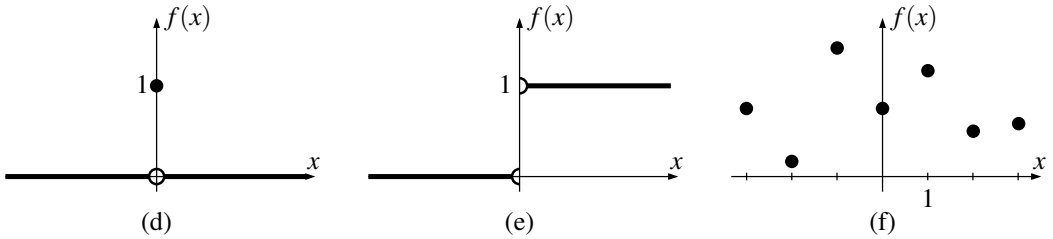
Beachte jedoch, dass es hier in der Literatur zwei verschiedene Konventionen gibt: In manchen Büchern werden Funktionsgrenzwerte so definiert, dass $\lim\limits_{x\to a}$ immer für $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}$ steht.

(e) Die unten im Bild dargestellte Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

ist stetig – ja, wirklich! Sie ist nämlich an jedem Punkt *der Definitionsmenge*, also an jedem $a \neq 0$ stetig, weil sie in der Nähe eines jeden solchen Punktes (genauer: in der $|a|$-Umgebung von $a$) konstant ist. Die Funktion $f$ ist aber natürlich *nicht stetig fortsetzbar* nach 0: Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht.

(f) *Jede* Funktion $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ist stetig (siehe unten). Das liegt anschaulich einfach daran, dass wir hier gar keine Möglichkeit haben, ein gegebenes $a \in \mathbb{Z}$ ein wenig so zu verändern, dass es immer noch in der Definitionsmenge liegt. Formal können wir in der Bedingung aus Definition 8.5 (a) für jedes gegebene $\varepsilon > 0$ immer $\delta = \frac{1}{2}$ setzen und haben damit sicher gestellt, dass $|x-a| < \delta$ mit $x \in \mathbb{Z}$ nur für $x = a$ erfüllt ist, womit dann natürlich auch $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ ist.




**Bemerkung 8.8** (Funktionen mit Grenzwert ungleich 0)**.** Es seien $D \subset \mathbb{K}$, $f\colon D \to \mathbb{K}$ eine Funktion und $a \in \overline{D}$ mit $c := \lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$. Aus Definition 8.3 für $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$ erhalten wir dann wie in Bemerkung 5.12 ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - c| < \varepsilon$ und damit

$$|f(x)| = |f(x) - c + c| \geq |c| - |f(x) - c| > |c| - \varepsilon = \frac{|c|}{2} > 0$$

für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \delta$ gilt.

Insbesondere ergibt sich im Fall $a \in D$ also, dass eine in $a$ stetige Funktion $f$ mit $f(a) \neq 0$ auch in einer $\delta$-Umgebung von $a$ ungleich 0 ist. Beispiel 8.7 (d) zeigt (bei $a = 0$), dass dies für unstetige Funktionen im Allgemeinen natürlich falsch ist.

Eine analoge Aussage gilt im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ auch ohne Beträge: Eine in $a$ stetige reelle Funktion $f$ mit $f(a) > 0$ ist auch in einer $\delta$-Umgebung von $a$ positiv.

**Aufgabe 8.9.** Es seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$. Berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$.

**Aufgabe 8.10.** Zeige durch Rückgang auf die $\varepsilon$-$\delta$-Definition der Stetigkeit, dass die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ stetig ist.

**Aufgabe 8.11.** Es seien $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeige, dass $f$ genau dann in $a$ stetig ist, wenn $f$ in $a$ „linksseitig und rechtsseitig stetig“ ist, also dass

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x\leq a}} f(x) = f(a) \text{ und } \lim_{\substack{x\to a\\ x\geq a}} f(x) = f(a).$$

Wie im Fall von Folgengrenzwerten wollen wir nun natürlich auch für Grenzwerte von Funktionen ein paar einfache Rechenregeln zeigen, z. B. dass solche Grenzwerte wie in Satz 5.13 mit Summen und Produkten vertauschen. Glücklicherweise lassen sich Grenzwerte von Funktionen mit Hilfe des folgenden Satzes immer auf Grenzwerte von Folgen zurückführen, so dass wir viele unserer Ergebnisse dann sofort von Folgen auf Funktionen übertragen können:

**Satz 8.12 (Folgenkriterium).** *Es seien $D \subset \mathbb{K}$ und $f\colon D \to \mathbb{K}$ eine Funktion.*

(a) *(**Folgenkriterium für Funktionsgrenzwerte**) Für $a \in \overline{D}$ und $c \in \mathbb{K}$ gilt*

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \quad \Leftrightarrow \quad \text{Für jede Folge } (x_n)_n \text{ in } D \text{ mit } x_n \to a \text{ gilt } f(x_n) \to c.$$

(b) *(**Folgenkriterium für Stetigkeit**) Für $a \in D$ gilt*

$$f \text{ ist stetig in } a \quad \Leftrightarrow \quad \text{Für jede Folge } (x_n)_n \text{ in } D \text{ mit } x_n \to a \text{ gilt } f(x_n) \to f(a).$$

*Es ist dann also*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big),$$

*d. h. „eine stetige Funktion $f$ vertauscht mit der Grenzwertbildung von Folgen“.*

*Beweis.* Wir beweisen zunächst Teil (a).

„$\Rightarrow$“: Es seien $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ und $(x_n)_n$ eine Folge in $D$ mit $x_n \to a$; wir müssen $f(x_n) \to c$ zeigen. Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - c| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ gilt. Wegen $x_n \to a$ ist aber $|x_n - a| < \delta$ für fast alle $n$, und damit dann auch $|f(x_n) - c| < \varepsilon$ für diese $n$. Damit gilt $f(x_n) \to c$.

„$\Leftarrow$“: Wir zeigen diese Richtung durch einen Widerspruchsbeweis und nehmen also an, dass $c$ kein Grenzwert von $f(x)$ in $a$ ist, d. h. (durch Negation der Definition 8.3)

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists x \in D\colon |x - a| < \delta \text{ und } |f(x) - c| \geq \varepsilon.$$

Wir wählen nun ein solches $\varepsilon$. Indem wir $\delta = \frac{1}{n}$ setzen, erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ein $x_n \in D$ mit $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - c| \geq \varepsilon$. Für diese Folge gilt dann aber $x_n \to a$ und $f(x_n) \not\to c$ im Widerspruch zur Annahme.

Teil (b) folgt nun mit Definition 8.5 (a) sofort aus (a). □

**Bemerkung 8.13.** Mit Hilfe des Folgenkriteriums können wir nun sehr schnell viele Resultate über Grenzwerte von Folgen auf Funktionen übertragen. So folgt z. B. sofort, dass Grenzwerte von Funktionen immer eindeutig sind, sofern sie existieren: Sind $D \subset \mathbb{K}$, $f\colon D \to \mathbb{K}$, $a \in \overline{D}$ und $f(x) \to c$ für $x \to a$, so können wir wegen $a \in \overline{D}$ eine Folge $(x_n)_n$ in $D$ mit $x_n \to a$ wählen, und erhalten mit Satz 8.12 (a) dann auch $f(x_n) \to c$. Da Folgengrenzwerte nach Lemma 5.5 aber eindeutig sind, ist dies für höchstens ein $c$ möglich.

Die folgenden Rechenregeln ergeben sich ebenfalls sofort aus dem Folgenkriterium und sorgen auch dafür, dass wir für sehr viele Funktionen ohne weitere Rechnung direkt die Stetigkeit nachweisen können:

**Satz 8.14 (Grenzwertsätze** für Funktionen**).** *Es seien $D \subset \mathbb{K}$ und $f, g\colon D \to \mathbb{K}$ zwei Funktionen. Weiterhin sei $a \in \overline{D}$, so dass beide Grenzwerte $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existieren. Dann gilt*

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

*Eine analoge Aussage gilt auch für $f(x) - g(x)$ und $f(x) \cdot g(x)$; und falls $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ gilt, auch für $\frac{f(x)}{g(x)}$.*

*Insbesondere sind für $a \in D$ also mit $f$ und $g$ auch $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ in $a$ stetig (letzteres wiederum nur, falls $g(a) \neq 0$).*

*Beweis.* Beachte im Fall $\frac{f}{g}$ zunächst, dass die Definitionsmenge dieses Quotienten nicht ganz $D$, sondern die evtl. kleinere Menge $D' = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ ist. Um überhaupt über den Grenzwert von $\frac{f(x)}{g(x)}$ für $x \to a$ sprechen zu können, müssen wir also zuerst überprüfen, dass $a$ ein Berührpunkt von $D'$ ist. Dies folgt aber aus Bemerkung 8.8, die besagt, dass $g$ wegen $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ in einer $\varepsilon$-Umgebung von $a$ nirgends 0 wird, so dass $D$ und $D'$ dort also übereinstimmen.

Die eigentliche Behauptung des Lemmas ist nun eine direkte Übertragung der Grenzwertsätze für Folgen aus Satz 5.13. Wir betrachten hier nur den Fall der Addition, da die anderen drei Fälle wörtlich genauso bewiesen werden. Dazu berechnen wir den Grenzwert von $f(x)+g(x)$ mit dem Folgenkriterium aus Satz 8.12 (a): Es sei $(x_n)_n$ eine beliebige Folge in $D$ mit $x_n \to a$. Dann gilt nach dem Folgenkriterium für $f$ und $g$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to a} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{x\to a} g(x)$$

und damit nach Satz 5.13 (a)

$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n)+g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x),$$

d. h. $f(x_n)+g(x_n)$ konvergiert für jede solche Folge gegen $\lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$, also immer gegen dieselbe Zahl. Wiederum nach dem Folgenkriterium – diesmal für $f+g$ – ergibt sich damit also wie gewünscht auch

$$\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x). \qquad \square$$

**Beispiel 8.15.** Jede *rationale Funktion*, also jede Funktion der Form $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit Polynomfunktionen $p(x)$ und $q(x)$, lässt sich natürlich mit den vier Grundrechenarten aus der Identität und den konstanten Funktionen zusammensetzen. Damit folgt aus Satz 8.14, dass jede solche Funktion auf jeder Definitionsmenge $D \subset \{x \in \mathbb{K} : q(x) \neq 0\}$ – also überall dort, wo $f$ überhaupt definiert werden kann – stetig ist.

Als Nächstes wollen wir zeigen, dass auch Verkettungen stetiger Funktionen wieder stetig sind. Dazu beweisen wir einen etwas allgemeineren Satz, der analog zur Vertauschbarkeit stetiger Funktionen mit Folgengrenzwerten in Satz 8.12 (b) ist, und der auch oft zur Berechnung von Grenzwerten nützlich ist.

**Satz 8.16** (Grenzwert einer Verkettung)**.** *Es seien $f\colon D \to \mathbb{K}$ mit $D \subset \mathbb{K}$ sowie $g\colon D' \to \mathbb{K}$ mit $D' \subset \mathbb{K}$ zwei Funktionen mit $f(D) \subset D'$. Ferner sei $a \in \overline{D}$, so dass $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert, in $D'$ liegt, und $g$ in diesem Punkt stetig ist. Dann gilt*

$$\lim_{x\to a} (g\circ f)(x) = g\big(\lim_{x\to a} f(x)\big),$$

*d. h. „für stetige $g$ kann man die Anwendung von $g$ mit der Grenzwertbildung vertauschen“.*

*Insbesondere folgt für $a \in D$ also aus der Stetigkeit von $f$ in $a$ und der von $g$ in $f(a)$ auch die Stetigkeit von $g\circ f$ in $a$, d. h. die Verkettung stetiger Funktionen ist stetig.*

*Beweis.* Wir zeigen das Lemma wieder mit dem Folgenkriterium aus Satz 8.12 (a). Es sei also $(x_n)_n$ eine beliebige Folge in $D$ mit $x_n \to a$. Weil der Grenzwert $c := \lim\limits_{x\to a} f(x)$ nach Voraussetzung existiert, gilt $f(x_n) \to c$ nach dem Folgenkriterium für $f$. Da weiterhin $g$ in $c$ stetig ist, gilt nach dem Folgenkriterium für $g$ auch $(g\circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(c)$. Die Aussage des Lemmas ergibt sich damit aus dem Folgenkriterium für $g\circ f$. $\square$

**Aufgabe 8.17.** Zeige, dass die Funktion

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 1-x & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

genau im Punkt $a = \frac{1}{2}$ stetig ist.

**Aufgabe 8.18.** Man beweise: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

gilt, so gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d. h. $f$ ist eine lineare Funktion.

Bleibt die Aussage richtig, wenn man überall $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzt?

Genau wie bei Folgen wollen wir nun auch für Funktionen im reellen Fall uneigentliche Grenzwerte einführen, und zwar sowohl in der Start- als auch in der Zielmenge: Wir wollen sowohl Grenzwerte der Form $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ definieren als auch sagen, was es bedeutet, dass der Grenzwert einer Funktion gleich $\infty$ ist. Die folgende Definition ist völlig analog zu Definition 5.40.

**Definition 8.19** (Uneigentliche Grenzwerte von Funktionen)**.** Es seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Für $a \in \overline{D}$ schreiben wir $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, wenn

$$\forall s \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\colon |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > s.$$

Wie im Fall von Folgen in Definition 5.40 spricht man in diesem Fall von einem **uneigentlichen Grenzwert** bzw. sagt, dass $f$ für $x \to a$ **bestimmt divergiert**.

(b) Ist $D$ nach oben unbeschränkt (so dass man $x$ in $f(x)$ überhaupt beliebig groß werden lassen kann), so schreibt man $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists r \in \mathbb{R}\ \forall x \in D\colon x \geq r \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Kombiniert man dies nun noch mit (a), so erhält man die Schreibweise $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ für

$$\forall s \in \mathbb{R}\ \exists r \in \mathbb{R}\ \forall x \in D\colon x \geq r \Rightarrow f(x) > s.$$

Beachte, dass diese letzten beiden Notationen sogar exakt mit der Definition von Folgengrenzwerten aus Definition 5.1 (b) und 5.40 übereinstimmen, wenn man sie auf eine Folge $(a_n)$ als Funktion mit Definitionsmenge $\mathbb{N}$ anwendet.

Analog definiert man derartige Grenzwerte mit $-\infty$ statt $\infty$.

**Bemerkung 8.20.** Man prüft leicht nach, dass mit Definition 8.19 sowohl das Folgenkriterium für Funktionsgrenzwerte aus Satz 8.12 (a) als auch die Grenzwertsätze aus Satz 8.14 auch für diese uneigentlichen Grenzwerte gelten, wenn man die üblichen Rechenregeln für $\pm\infty$ verwendet.

## 8.B Eigenschaften stetiger Funktionen

Nachdem wir nun von vielen Funktionen gesehen haben, wie man ihre Stetigkeit nachweisen kann, wollen wir jetzt untersuchen, was wir davon haben, wenn wir wissen, dass eine gegebene Funktion stetig ist. Dazu wollen wir einige sehr anschauliche Aussagen formal beweisen, die für *reelle* stetige Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ mit $a < b$ gelten. Die erste von ihnen besagt, dass eine solche Funktion mit je zwei Funktionswerten auch jeden Wert dazwischen annehmen muss – was bei einer kontinuierlichen Änderung der Funktionswerte natürlich zu erwarten ist.

**Satz 8.21** (**Zwischenwertsatz**)**.** *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es zu jedem $c$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = c$.*

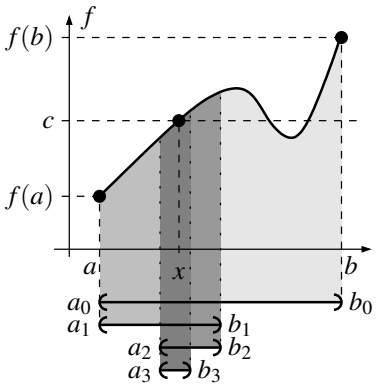
*Beweis.* Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass wie im Bild unten rechts $f(a) \leq f(b)$ und damit $f(a) \leq c \leq f(b)$ gilt. Ausgehend von $[a_0,b_0] := [a,b]$ konstruieren wir nun rekursiv eine Intervallschachtelung

$$[a,b] = [a_0,b_0] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \cdots$$

mit in jedem Schritt halbierter Länge der Intervalle, so dass $f(a_n) \leq c \leq f(b_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Ist $[a_n, b_n]$ für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits konstruiert, so betrachten wir den Funktionswert $f(\frac{a_n+b_n}{2})$ in der Intervallmitte.

- Ist $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq c$ (wie im Bild im Fall $n = 0$), so ersetzen wir die rechte Intervallgrenze durch den Mittelpunkt, setzen also $a_{n+1} := a_n$ und $b_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}$.
- Ist dagegen $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < c$ (wie im Bild im Fall $n = 1$ im Bild rechts), so ersetzen wir die linke Intervallgrenze durch den Mittelpunkt, setzen also $a_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}$ und $b_{n+1} := b_n$.




Für den nach Satz 5.39 durch diese Intervallschachtelung definierten Punkt $x \in [a,b]$ gilt dann $a_n \to x$ und $b_n \to x$, nach dem Folgenkriterium aus Satz 8.12 also

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq c \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x)$$

und damit $f(x) = c$. □

18

Als Nächstes wollen wir zeigen, dass eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall wie in Satz 8.21 immer beschränkt ist.

**Definition 8.22** (Beschränkte und monotone Funktionen)**.** Es seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $f$ auf $D$ ...

(a) (nach oben bzw. unten) **beschränkt**, wenn die Menge $f(D) \subset \mathbb{R}$ aller Bildpunkte von $f$ (nach oben bzw. unten) beschränkt ist.

(b) **monoton wachsend** oder **steigend** (bzw. **streng monoton wachsend** oder **steigend**), wenn für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt, dass $f(x) \leq f(y)$ (bzw. $f(x) < f(y)$). Analog definiert man **(streng) monoton fallend**.

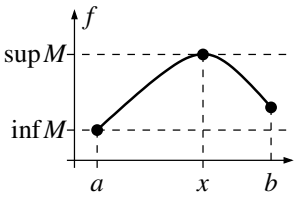
**Satz 8.23.** *Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenen Intervall ist beschränkt.*

*Beweis.* Angenommen, $f$ wäre unbeschränkt. Dann gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a,b]$ mit $|f(x_n)| > n$. Beachte, dass die Folge $(f(x_n))_n$ dann natürlich unbeschränkt, die Folge $(x_n)_n$ aber beschränkt ist (weil ja stets $x_n \in [a,b]$ gilt). Nach dem Satz 6.21 von Bolzano-Weierstraß besitzt $(x_n)_n$ also eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$; es sei $x := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Wegen $a \leq x_{n_k} \leq b$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt aus Satz 5.24 (a) auch $a \leq x \leq b$, d. h. auch $x$ liegt in der Definitionsmenge $[a,b]$ von $f$. Nach dem Folgenkriterium aus Satz 8.12 (b) müsste dann aber die Folge $(f(x_{n_k}))_k$ gegen $f(x)$ konvergieren – was ein Widerspruch dazu ist, dass diese Folge nach Konstruktion unbeschränkt und damit divergent ist. □

**Bemerkung 8.24.** Für nicht abgeschlossene Intervalle ist Satz 8.23 natürlich im Allgemeinen falsch, wie das Beispiel $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem offenen Intervall $(0,1)$ zeigt.

Wir haben gerade gesehen, dass das Bild $M = f([a,b])$ einer stetigen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ immer beschränkt ist und damit also stets zwischen $\inf M$ und $\sup M$ liegt. Wir wollen nun zeigen, dass Infimum und Supremum dieser Menge in der Tat sogar Minimum und Maximum sind, also dass diese beiden Zahlen auch als Werte von $f$ angenommen werden – so wie z. B. im Bild rechts $f(x) = \sup M$ ist.




**Satz 8.25** (**Satz vom Maximum und Minimum**)**.** *Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nimmt ein Maximum und Minimum an, d. h. die Menge $M = f([a,b]) = \{f(x) : x \in [a,b]\}$ hat ein Maximum und Minimum.*

*Beweis.* Wir zeigen die Aussage für das Maximum; das Minimum ergibt sich analog. Die Menge $M$ ist natürlich nicht leer und nach Satz 8.23 beschränkt, also existiert $s := \sup M$. Da $s$ die kleinste obere Schranke für $M$ ist, ist $s - \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ dann keine obere Schranke mehr. Wir finden also ein $x_n \in [a,b]$ mit

$$s - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s. \tag{$*$}$$

Nach dem Einschachtelungssatz 5.24 (b) konvergiert $(f(x_n))_n$ damit gegen $s$. Nun können wir aber wieder nach dem Satz 6.21 von Bolzano-Weierstraß aus $(x_n)_n$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ auswählen, die gegen ein $x \in [a,b]$ konvergiert. Weil $f$ in $x$ stetig ist, gilt nach dem Folgenkriterium aus Satz 8.12 (b) damit

$$f(x) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = s. \qquad \square$$

Die Ergebnisse aus den Sätzen Satz 8.21, 8.23 und 8.25 lassen sich übrigens einfach in einer einzigen Aussage zusammenfassen:

**Folgerung 8.26.** *Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$, so ist das Bild von $f$ ebenfalls ein abgeschlossenes Intervall $[c,d]$.*

*Beweis.* Nach Satz 8.25 existieren $c := \min f([a,b])$ und $d := \max f([a,b])$. Insbesondere gilt damit $f([a,b]) \subset [c,d]$, wobei die Werte $c$ und $d$ von $f$ angenommen werden. Nach dem Zwischenwertsatz werden damit von $f$ aber auch alle Werte zwischen $c$ und $d$ angenommen, d. h. es ist in der Tat $f([a,b]) = [c,d]$. $\square$

**Aufgabe 8.27.** Man zeige:

(a) Es seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = 0$ sowie $g\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte stetige Funktion.

Dann ist die Funktion $f \cdot g\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)\cdot g(x)$ stetig in den Nullpunkt fortsetzbar.

(b) Jede bijektive, monoton wachsende Funktion $f\colon [a,b] \to [c,d]$ zwischen abgeschlossenen reellen Intervallen ist stetig.

Eine der wichtigsten Anwendungen dieser Aussage ist die Konstruktion von (stetigen) Umkehrfunktionen für streng monotone Funktionen:

**Satz 8.28** (Existenz und Stetigkeit von Umkehrfunktionen)**.** *Es sei $f\colon [a,b] \to [c,d]$ eine stetige und streng monoton wachsende Funktion mit $c = f(a)$ und $d = f(b)$. Dann ist $f$ bijektiv, und ihre Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [c,d] \to [a,b]$ ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend.*

*Analog gilt dies mit „streng monoton fallend“ statt „streng monoton wachsend“.*

*Beweis.* Die Abbildung $f$ ist surjektiv nach Folgerung 8.26. Sie ist auch injektiv, da sie streng monoton wachsend ist. Also ist $f$ bijektiv, und die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [c,d] \to [a,b]$ existiert. Sie ist notwendigerweise streng monoton wachsend, denn wenn es $x,y \in [c,d]$ mit $x < y$ und $f^{-1}(x) \geq f^{-1}(y)$ gäbe, würde sich daraus durch Anwenden der streng monotonen Funktion $f$ der Widerspruch $f(f^{-1}(x)) \geq f(f^{-1}(y))$, also $x \geq y$ ergeben. Nach Aufgabe 8.27 (b) ist $f^{-1}$ damit auch stetig. $\square$

**Beispiel 8.29** (Wurzelfunktionen)**.** Es seien $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $R \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben. Dann ist die Funktion $f\colon [0,R] \to [0,R^n]$, $x \mapsto x^n$ nach Lemma 4.16 streng monoton wachsend und nach Beispiel 8.15 stetig. Also ist die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [0,R^n] \to [0,R]$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, die wir bereits aus Aufgabe 5.37 kennen, ebenfalls streng monoton wachsend und stetig. Betrachtet man diese Aussage für alle $R$ zusammen, ist damit auch die Wurzelfunktion $f^{-1}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ streng monoton wachsend und stetig. Ihr Graph ensteht wie im Bild unten durch Spiegelung des Graphen von $f$ an der gestrichelt eingezeichneten Diagonalen.

**Aufgabe 8.30.** Man beweise:

(a) Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to [a,b]$ hat einen Fixpunkt, d. h. ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = x$.
Ist $f$ darüber hinaus monoton wachsend, so konvergiert die rekursiv definierte Folge $(x_n)_n$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ für ein beliebiges $x_0 \in [a,b]$ gegen einen Fixpunkt von $f$.

(b) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) = f(x+1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (d. h. „$f$ ist periodisch mit Periodenlänge 1“), dann gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $f(a) = f(a+\frac{1}{2})$. (Anschaulich bedeutet dies z. B., dass es auf dem Äquator der Erde (mit Umfang 1 und Koordinate $x$) stets zwei gegenüberliegende Punkte gibt, an denen die gleiche Temperatur $f(x)$ herrscht.)

**Aufgabe 8.31.** Es sei $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Zeige, dass $f$ ein Minimum annimmt.

**Aufgabe 8.32.** Man zeige:

(a) Es gibt keine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unter der jede reelle Zahl genau zwei Urbilder hat.

(b) Jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die offene Intervalle auf offene Intervalle abbildet, ist streng monoton.

(c) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte stetige Funktion, so gibt es eine Gerade in $\mathbb{R}^2$, die mit dem Graphen von $f$ mindestens drei Punkte gemeinsam hat.

## 8.C Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit

Wir haben nun einige schöne Eigenschaften stetiger Funktionen gesehen und auch Methoden kennengelernt, mit denen wir von vielen Funktionen ihre Stetigkeit nachweisen können. Allerdings haben wir dabei bisher eine wichtige Klasse von Funktionen ausgelassen – nämlich solche, die durch den Grenzwert einer konvergenten Folge oder Reihe definiert sind, wie z. B. die Exponentialfunktion oder ganz generell allgemeine Potenzreihen wie in Definition 7.26. Zur Untersuchung der Stetigkeit derartiger Funktionen starten wir mit einem einfachen Beispiel.

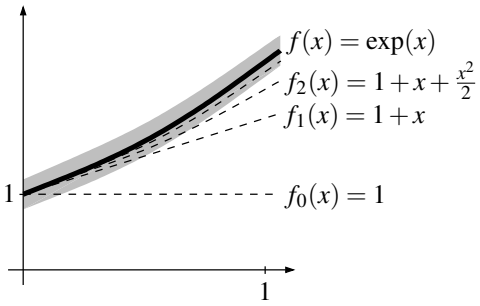
**Beispiel 8.33.** In Definition 7.26 (b) hatten wir die Exponentialfunktion durch $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für alle $x \in \mathbb{C}$ definiert, also als den Grenzwert

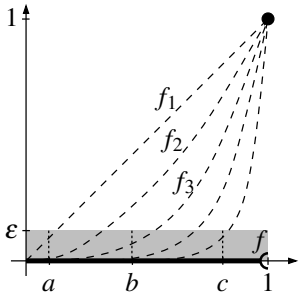
$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{mit} \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Natürlich ist jede einzelne Partialsumme $f_n$ nach Beispiel 8.15 eine stetige Funktion in $x$. Da sich diese Partialsummen für $n \to \infty$ immer mehr der Exponentialfunktion annähern, würden wir nun hoffen, dass aus der Stetigkeit aller $f_n$ auch die Stetigkeit der Grenzfunktion, also der Exponentialfunktion folgt. Allgemein fragen wir uns also: Sind $f_n\colon D \to \mathbb{K}$ für $n \in \mathbb{N}$ stetige Funktionen auf einer Menge $D \subset \mathbb{K}$, so dass für alle $x \in D$ der Grenzwert

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existiert (wir sagen in diesem Fall auch, dass die Funktionen $f_n$ *punktweise gegen $f$ konvergieren* – siehe Definition 8.34), ist dann auch diese Grenzfunktion $f\colon D \to \mathbb{K}$ stetig? Der Fall der reellen Exponentialfunktion auf dem Intervall $[0,1]$ ist im folgenden Bild links dargestellt, wobei die einzelnen $f_n$ gestrichelt und die Grenzfunktion $f$ dick eingezeichnet ist.




$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \quad f(x) = \exp(x)$$

$$f_n(x) = x^n, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Es sieht hier also bereits so aus, als ob die Grenzfunktion wie gewünscht stetig ist, und in der Tat werden wir auch sehen, dass dies bei der Exponentialfunktion wirklich der Fall ist. Allerdings ist die Situation im Allgemeinen leider nicht ganz so schön, wie man es sich wünschen würde. Betrachten wir z. B. einmal die Funktionen

$$f_n \colon D = [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$$

wie im Bild oben rechts, so existiert nach Beispiel 5.3 (c) zwar der Grenzwert

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

für alle $x \in D$, aber die Grenzfunktion ist hier offensichtlich *nicht* stetig! Wir halten also fest:

> Konvergiert eine Folge stetiger Funktionen $f_n \colon D \to \mathbb{K}$ punktweise gegen eine Grenzfunktion $f \colon D \to \mathbb{K}$, so muss $f$ nicht notwendig stetig sein!

Analog zum Fall der Umordnungen von Reihen in Beispiel 7.9 wird auch hier der Ausweg aus diesem Problem darin bestehen, eine stärkere Form der Konvergenz einer Folge stetiger Funktionen einzuführen, die letztlich die Stetigkeit der Grenzfunktion sicherstellt.

In der Tat können wir an unserem obigen Beispiel $f_n(x) = x^n$ auch schon motivieren, wie dieses stärkere Kriterium aussehen wird, denn man sieht an diesem Bild bereits recht deutlich, wo das Problem liegt: Es ist zwar richtig, dass für jedes $x \in [0,1)$ der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x^n$ gleich 0 ist, d. h. dass $x^n < \varepsilon$ für alle $n$ ab einem gewissen $n_0$ gilt – aber dieses $n_0$ hängt extrem vom betrachteten Punkt $x$ ab und wird insbesondere für $x \to 1$ immer größer. So kann man z. B. für den Wert $x = a$ im Bild oben rechts noch $n_0 = 1$ wählen, beim Wert $x = b$ braucht man mindestens $n_0 = 3$, beim Wert $x = c$ schon mindestens $n_0 = 5$. Je weiter sich $x$ dem Wert 1 nähert, um so größer muss man dieses $n_0$ wählen – bis es im Grenzfall $x = 1$ schließlich gar kein solches $n_0$ mehr gibt, so dass 0 nicht mehr der Grenzwert der Folge $\lim\limits_{n\to\infty} x^n$ ist. Im Bild oben links hingegen kann man für die dargestellte $\varepsilon$-Umgebung um $f$ z. B. $n_0 = 3$ *für alle* $x$ (in dem dort betrachteten Intervall $[0,1]$) wählen, denn $f_3, f_4, f_5, \ldots$ liegen komplett in dem grau eingezeichneten Streifen.

Es kommt bei der Grenzwertdefinition also anscheinend darauf an, ob man das verlangte $n_0$ unabhängig vom betrachteten Punkt $x$ wählen kann. Dies führt auf die folgende Definition:

**Definition 8.34** (Gleichmäßige Konvergenz)**.** Es seien $D \subset \mathbb{K}$ und $f \colon D \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Weiterhin sei für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f_n \colon D \to \mathbb{K}$ gegeben – man nennt $(f_n)_n$ dann auch eine **Funktionenfolge** auf $D$.

(a) Ist $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in D$, d. h. gilt

$$\forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

so nennt man $(f_n)_n$ **punktweise konvergent** gegen $f$. Beachte, dass $n_0$ hierbei nicht nur von $\varepsilon$, sondern auch vom betrachteten Punkt $x$ abhängen darf.

(b) Kann man $n_0$ in (a) auch unabhängig von $x$ wählen, d. h. gilt sogar

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall x \in D \ \forall n \geq n_0 \colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

so heißt die Funktionenfolge $(f_n)_n$ auf $D$ **gleichmäßig konvergent** gegen $f$.

**Bemerkung 8.35.**

(a) Beachte, dass die gleichmäßige Konvergenz nach Definition kein „punktweises Konzept" ist, also nicht an jedem Punkt der Definitionsmenge $D$ separat überprüft werden kann. Es ergibt also z. B. keinen Sinn, zu sagen, eine Funktionenfolge auf $D$ sei „in jedem Punkt von $D$ gleichmäßig konvergent". Stattdessen muss man bei der Bestimmung der gleichmäßigen Konvergenz immer alle Punkte von $D$ gleichzeitig betrachten.

(b) Natürlich ist jede gleichmäßig konvergente Funktionenfolge $(f_n)_n$ auf $D$ auch punktweise konvergent mit der gleichen Grenzfunktion $f$.

Wollen wir also die gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)_n$ untersuchen, so werden wir in der Regel zunächst mit der punktweisen Konvergenz beginnen und für alle $x \in D$ die Grenzwerte $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ bestimmen. Existiert dann einer dieser Grenzwerte nicht, so ist die Funktionenfolge damit nicht punktweise, also auch nicht gleichmäßig konvergent. Ansonsten ist die so bestimmte Funktion $f$ die Grenzfunktion, mit der wir für die gleichmäßige Konvergenz die Bedingung aus Definition 8.34 (b) überprüfen müssen.

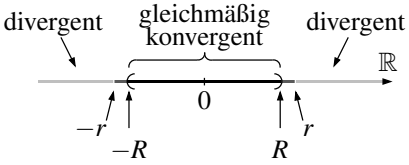
19

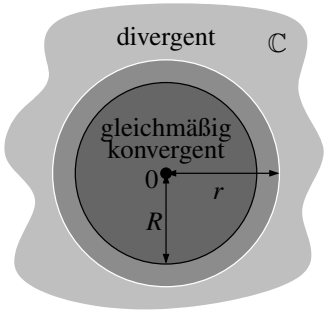
Unser wichtigstes Beispiel von Funktionenfolgen sind Potenzreihen wie z. B. die Exponentialreihe in Beispiel 8.33, und glücklicherweise sind diese in folgendem Sinne immer gleichmäßig konvergent.

**Satz 8.36** (Gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen)**.** *Jede Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius $r$ ist gleichmäßig konvergent auf jeder Menge der Form*

$$K_R := \{x \in \mathbb{K} : |x| \leq R\} \qquad \text{für } 0 \leq R < r$$

*(d. h. die Folge $(f_n)_n$ der Partialsummen $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ konvergiert gleichmäßig auf jedem $K_R$ gegen die Grenzfunktion $f$ mit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$).*




*Mit anderen Worten konvergieren Potenzreihen also gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Intervall (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. Kreis (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) innerhalb des Konvergenzgebiets.*

*Beweis.* Wir weisen das Kriterium aus Definition 8.34 (b) direkt nach. Es sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $R < r$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k$ nach Satz 7.27 absolut. Es gibt also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot R^k - \sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot R^k \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \cdot R^k < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$ gilt. Dann folgt für alle $n \geq n_0$ und $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| \leq R$ aber auch

$$|f(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \cdot |x|^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \cdot R^k < \varepsilon.$$

Da wir unser $n_0$ hierbei unabhängig von $x \in K_R$ wählen konnten, ist die Potenzreihe auf $K_R$ also gleichmäßig konvergent. □

Beachte, dass man den Wert von $R$ in Satz 8.36 beliebig nahe an $r$ wählen darf. Insbesondere findet man also zu jedem $x \in \mathbb{K}$ im Konvergenzgebiet $D = \{x \in \mathbb{K} : |x| < r\}$ ein $R$, so dass $x$ in $K_R$ enthalten ist. Da die gleichmäßige Konvergenz gemäß Bemerkung 8.35 (a) nicht punktweise überprüft werden kann, bedeutet dies jedoch *nicht*, dass die Potenzreihe auch auf ganz $D$ gleichmäßig konvergiert! Hier ist ein einfaches Gegenbeispiel dafür:

**Beispiel 8.37.** Die geometrische Reihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ hat nach Beispiel 7.3 (a) das Konvergenzgebiet $D = \{x \in \mathbb{K} : |x| < 1\}$, also den Konvergenzradius 1. Wir behaupten, dass $f$ auf $D$ nicht gleichmäßig konvergent ist, d. h. dass die Umkehrung der Bedingung aus Definition 8.34 (b)

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists x \in D \ \exists n \geq n_0 : \left| \sum_{k=0}^{\infty} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^k \right| \geq \varepsilon$$

gilt. Dazu wählen wir $\varepsilon := 1$; es sei $n_0 \in \mathbb{N}$ gegeben, und wir setzen $n := n_0$. Für alle $x \in D$ mit $x > 0$ ist nun nach der Formel für die geometrische Reihe aus Beispiel 7.3 (a)

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^k \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = x^{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Nähert sich $x$ nun innerhalb von $D$ dem Wert 1, so wächst dieser Ausdruck offensichtlich unbeschränkt an. Also gibt es insbesondere ein $x \in D$, für das dieser Ausdruck mindestens gleich $1 = \varepsilon$ ist, was zu zeigen war.

Wir kommen nun zu dem zentralen Satz, der in Beispiel 8.33 die Motivation für die Einführung der gleichmäßigen Konvergenz war:

**Satz 8.38** (Der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen ist stetig)**.** *Es seien $D \subset \mathbb{K}$ und $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n \colon D \to \mathbb{K}$, die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f \colon D \to \mathbb{K}$ konvergiert. Dann ist auch $f$ stetig.*

*Beweis.* Wir weisen das $\varepsilon$-$\delta$-Kriterium aus Definition 8.5 (a) für $f$ nach. Es seien dazu $a \in D$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } x \in D \text{ und alle } n \geq n_0 \tag{1}$$

gilt (insbesondere also auch für $x = a$). Wir benötigen dies nur für $n := n_0$: Wegen der Stetigkeit von $f_n$ gibt es dann ein $\delta > 0$ mit

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta. \tag{2}$$

Insgesamt folgt damit für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ nach der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| \\ &\leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ nach (1)}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(a)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ nach (2)}} + \underbrace{|f_n(a) - f(a)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ nach (1)}} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Folgerung 8.39** (Stetigkeit von Potenzreihen)**.** *Jede Potenzreihe in $\mathbb{K}$ ist in ihrem Konvergenzgebiet stetig.*

*Beweis.* Wir betrachten eine Potenzreihenfunktion $f$ in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius $r$, also eine Funktion der Form $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ mit $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < r$.

Es sei nun ein $c \in \mathbb{K}$ mit $|c| < r$ gegeben; wir müssen zeigen, dass $f$ in $c$ stetig ist. Wähle dazu ein $R > 0$ mit $|c| < R < r$. Dann ist $f$ nach Satz 8.36 auf $K_R = \{x \in \mathbb{K} : |x| \leq R\}$ der gleichmäßige Grenzwert der stetigen Partialsummen $f_n$. Also ist diese Grenzfunktion $f$ nach Satz 8.38 auf $K_R$ und damit insbesondere in $c$ stetig. □

**Beispiel 8.40.**

(a) Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ist als Potenzreihe mit Konvergenzradius $\infty$ nach Folgerung 8.39 auf ganz $\mathbb{K}$ stetig.

(b) Die reelle Funktionenfolge $(x^n)_n$ auf $[0,1]$ aus Beispiel 8.33 ist nach Satz 8.38 nicht gleichmäßig konvergent, da ihre Grenzfunktion nicht stetig ist. (Natürlich könnte man dies auch analog zu Beispiel 8.37 direkt nachrechnen.)

**Aufgabe 8.41** (Supremumsnorm)**.**

(a) Zu einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}$ mit $D \subset \mathbb{K}$ definieren wir die **Supremumsnorm**

$$\|f\|_{\sup} := \sup\{|f(x)| : x \in D\} \quad \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Zeige, dass eine Funktionenfolge $(f_n)_n$ auf $D$ genau dann gleichmäßig gegen $f$ konvergiert, wenn $\|f_n - f\|_{\sup} \to 0$ für $n \to \infty$ gilt.

(b) Zeige, dass die reelle Funktionenfolge $(f_n)_n$ mit $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ zwar nicht auf $\mathbb{R}_{>0}$, aber auf jedem Intervall $[a,\infty)$ mit $a > 0$ gleichmäßig konvergiert.

**Aufgabe 8.42.**

(a) Für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Zeige, dass die Funktionenfolge $(f_n)_n$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

(b) Zeige, dass die Exponentialreihe auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig konvergiert.

**Aufgabe 8.43** (Koeffizientenvergleich für Potenzreihen)**.** Es sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe über $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius mindestens $r > 0$.

(a) Zeige mit vollständiger Induktion: Ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < r$, so gilt bereits $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (d. h. ist der Wert der Reihe gleich 0 für alle diese $x$, so sind bereits alle Koeffizienten der Reihe gleich 0).

(b) Man zeige: Ist $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ eine weitere Potenzreihe mit Konvergenzradius mindestens $r$ und gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < r$, so ist bereits $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir nun noch das Konzept der *gleichmäßigen Stetigkeit* einführen, das wir später (z. B. in Satz 12.12) noch benötigen werden und das eine sehr ähnliche Idee wie die gleichmäßige Konvergenz hat:

**Definition 8.44** (Gleichmäßige Stetigkeit)**.** Es seien $D \subset \mathbb{K}$ und $f\colon D \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Bekanntlich heißt die Funktion $f$ nach Definition 8.5 stetig, wenn sie in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist, also wenn gilt

$$\forall a \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\colon |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Beachte, dass $\delta$ hierbei (analog zu $n_0$ in Definition 8.34 (a)) nicht nur von $\varepsilon$, sondern auch vom betrachteten Punkt $a$ abhängen darf. Kann man $\delta$ jedoch auch unabhängig von $a$ wählen, gilt also

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall a \in D\ \forall x \in D\colon |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

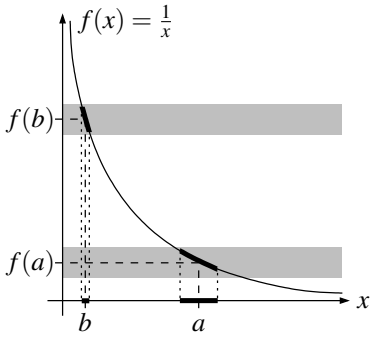
so nennt man $f$ auf $D$ **gleichmäßig stetig**.

**Bemerkung 8.45.** Genau wie die gleichmäßige Konvergenz (siehe Bemerkung 8.35 (a)) ist auch die gleichmäßige Stetigkeit einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}$ kein punktweises Konzept, sondern kann nur nachgewiesen werden, indem man alle Punkte von $D$ gleichzeitig betrachtet.

**Beispiel 8.46.** Wir behaupten, dass die nach Beispiel 8.15 stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$$

nicht gleichmäßig stetig ist. Anschaulich ist diese Aussage im Bild rechts dargestellt: Die Stetigkeit von $f$ bedeutet ja gerade, dass wir zu jeder $\varepsilon$-Umgebung $U_\varepsilon(f(x))$ eines Bildpunktes $f(x)$ eine $\delta$-Umgebung von $x$ finden, die ganz nach $U_\varepsilon(f(x))$ abgebildet wird. Zum Punkt $x = a$ haben wir in der Skizze eine $\varepsilon$-Umgebung von $f(a)$ grau eingezeichnet, und auf der $x$-Achse eine dazu passende $\delta$-Umgebung wie in Bemerkung 8.6 dick markiert. Wenn wir nun auf einen (viel) kleineren Wert $x = b$ gehen und das gleiche $\varepsilon$ wie oben behalten, so sehen wir, dass wir das zugehörige $\delta$ viel kleiner wählen müssen. Wenn sich $x$ der 0 nähert, müssen wir bei gleich bleibendem $\varepsilon$ das $\delta$ in der Tat sogar gegen 0 gehen lassen. Dies bedeutet, dass wir für festgehaltenes $\varepsilon$ kein $\delta$ finden können, das in *jedem* Punkt $x > 0$ funktioniert – und das wiederum bedeutet genau, dass $f$ nicht gleichmäßig stetig ist.




Wollen wir diese Aussage formal beweisen, so müssen wir die Negation der Bedingung aus Definition 8.44 nachweisen, d. h.

$$\exists\,\varepsilon > 0\ \forall\,\delta > 0\ \exists a \in D\ \exists x \in D\colon\ |x-a| < \delta \text{ und } |f(x)-f(a)| \geq \varepsilon.$$

Dies ist schnell gezeigt: Wir setzen $\varepsilon := 1$; es sei $\delta > 0$ beliebig. Dann wählen wir $x = \delta$ und $a = \frac{\delta}{1+\delta}$, und es gilt wegen $x > a$

$$|x-a| = \delta - \frac{\delta}{1+\delta} < \delta \qquad \text{und} \qquad |f(x)-f(a)| = \left|\frac{1}{\delta} - \frac{1+\delta}{\delta}\right| = 1 \geq \varepsilon.$$

Um dagegen die gleichmäßige Stetigkeit einer Funktion nachzuweisen, sind oft die folgenden beiden hinreichenden Bedingungen in Lemma 8.48 und Satz 8.50 nützlich, die sich deutlich einfacher überprüfen lassen als die Definition.

**Definition 8.47** (Lipschitz-Stetigkeit)**.** Es sei $D \subset \mathbb{K}$. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}$ heißt **Lipschitz-stetig**, wenn es ein $L \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass

$$|f(x)-f(y)| \leq L \cdot |x-y|$$

für alle $x, y \in D$ gilt. Man nennt $L$ in diesem Fall eine **Lipschitz-Konstante** für $f$.

**Lemma 8.48.** *Jede Lipschitz-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig (und damit insbesondere auch stetig).*

*Beweis.* Es seien $D \subset \mathbb{K}$ und $f\colon D \to \mathbb{K}$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante $L \in \mathbb{R}_{>0}$. Um die gleichmäßige Stetigkeit von $f$ wie in Definition 8.44 zu zeigen, sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Setzen wir dann $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$, so gilt für alle $a, x \in D$ mit $|x-a| < \delta$ wie gewünscht

$$|f(x)-f(a)| \overset{8.47}{\leq} L \cdot |x-a| < L\delta = \varepsilon. \qquad \square$$

**Beispiel 8.49.** Es sei

$$f\colon \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$$

noch einmal die Funktion aus Beispiel 8.46, bei der wir diesmal aber den Definitionsbereich so verkleinert haben, dass wir uns darin nicht mehr der 0 nähern können. Dann ist $f$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1, denn für alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ gilt

$$|f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{|x| \cdot |y|} \leq |x-y|.$$

Nach Lemma 8.48 ist diese gegenüber Beispiel 8.46 eingeschränkte Funktion $f$ nun also gleichmäßig stetig.

**Satz 8.50.** *Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenen reellen Intervall ist gleichmäßig stetig.*

*Beweis.* Angenommen, $f$ wäre nicht gleichmäßig stetig. Dann würde wie in Beispiel 8.46 das Gegenteil der Bedingung aus Definition 8.44 gelten, d. h.

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, x, y \in [a,b] \colon |y-x| < \delta \text{ und } |f(y)-f(x)| \geq \varepsilon.$$

Wählen wir ein solches $\varepsilon$, so finden wir also mit $\delta = \frac{1}{n}$ zu jedem $n \in \mathbb{N}_{>0}$ Zahlen $x_n, y_n \in [a,b]$ mit $|y_n - x_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$. Insbesondere ist dann $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$. Wählen wir nun nach dem Satz 6.21 von Bolzano-Weierstraß eine gegen ein $x \in [a,b]$ konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$, so folgt

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \qquad \text{und} \qquad \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} + \lim_{k\to\infty}(y_{n_k} - x_{n_k}) = x + 0 = x,$$

d. h. die entsprechende Teilfolge von $(y_n)_n$ konvergiert ebenfalls gegen $x$. Wegen der Stetigkeit von $f$ in $x$ ergibt sich dann aber nach dem Folgenkriterium aus Satz 8.12 (b)

$$\lim_{k\to\infty}(f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) - \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x) - f(x) = 0,$$

im Widerspruch zu $|f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \varepsilon$ für alle $k$. □

**Aufgabe 8.51.** Zeige dass die Wurzelfunktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ zwar gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

# 9. Spezielle Funktionen

Nachdem wir jetzt schon recht viel allgemeine Theorie kennengelernt haben, wollen wir diese nun anwenden, um einige bekannte spezielle Funktionen zu studieren (oder überhaupt erst einmal exakt zu definieren), die ihr bereits aus der Schule kennt: die Exponential- und Logarithmusfunktion, die allgemeine Potenz $x^a$ für $a \in \mathbb{R}$, die Winkelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen. Ausgangspunkt aller dieser Funktionen ist letztlich die in Definition 7.26 (b) bereits eingeführte Exponentialfunktion

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots \quad \text{für } x \in \mathbb{K}.$$

Aus Folgerung 7.36 wissen wir schon, dass diese Funktion die Funktionalgleichung

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{K}$$

erfüllt. Außerdem ist sie nach Beispiel 8.40 (a) stetig, und aus der Reihendarstellung sieht man sofort, dass $\exp(0) = 1$.

Die weiteren Eigenschaften der Exponentialfunktion sind im reellen und komplexen Fall trotz der gleich lautenden Definition sehr unterschiedlich. Wir werden diese beiden Fälle im Folgenden daher separat untersuchen.

## 9.A Logarithmen und allgemeine Potenzen

Wir beginnen mit der reellen Exponentialfunktion und zeigen zunächst einige ihrer wichtigen Eigenschaften.

**Satz 9.1** (Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion)**.**

(a) *Es gilt* $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(b) *Die Funktion* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend.*

(c) *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty \qquad \textit{und} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n \exp(x) = 0.$$

*Insbesondere ist also* $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ *und* $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

(d) *Für die Zahl* $\mathrm{e} := \exp(1)$ *gilt* $2 < \mathrm{e} < 3$. *(Man nennt* e *die* ***Eulersche Zahl****; eine explizite näherungsweise Berechnung der Exponentialreihe zeigt, dass* $\mathrm{e} = 2{,}71828\ldots$*.)*

*Beweis.*

(a) Für $x \geq 0$ ist dies aus der Reihendarstellung offensichtlich. Für $x \leq 0$ folgt aus der Funktionalgleichung

$$\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(0) = 1 \quad \text{und damit} \quad \exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)},$$

was nun wegen $-x \geq 0$ ebenfalls positiv ist.

(b) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Wegen $y - x > 0$ folgt aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion dann $\exp(y-x) > 1$. Da nach (a) außerdem $\exp(x) > 0$ gilt, erhalten wir mit der Funktionalgleichung wie gewünscht

$$\exp(y) = \exp(x) \cdot \exp(y-x) > \exp(x) \cdot 1 = \exp(x).$$

(c) Für $x > 0$ ergibt sich aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion natürlich

$$\exp(x) > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{und damit} \qquad \frac{\exp(x)}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!}.$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{(n+1)!} = \infty$ folgt damit auch $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty$.

Die Aussage für $x \to -\infty$ zeigt man analog: Für $x < 0$ ist $-x > 0$, und da wir in (a) schon gesehen haben, dass $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$ gilt, erhalten wir

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} < \frac{1}{(-x)^{n+1}/(n+1)!} \qquad \text{und damit} \qquad |x^n \exp(x)| < \frac{(n+1)!}{|x|}.$$

Wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(n+1)!}{|x|} = 0$ ergibt sich damit auch $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n \exp(x) = 0$.

(d) Aus der Exponentialreihe erhalten wir sofort

$$\mathrm{e} > \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = 2,$$

und wegen $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2 = 2^{n-1}$ mit Hilfe der geometrischen Reihe aus Beispiel 7.3 (a) auch

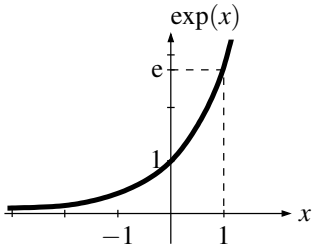
$$\mathrm{e} = \frac{1}{0!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3. \qquad \square$$

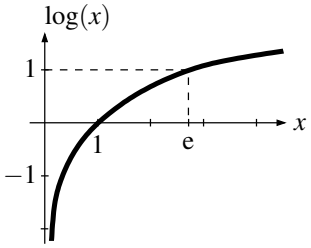
**Aufgabe 9.2** (Irrationalität von e)**.** Finde für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ explizit eine natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}$ mit $\frac{a}{n!} < \mathrm{e} < \frac{a+1}{n!}$, und zeige so, dass e irrational ist.

**Bemerkung 9.3.**

(a) Da die (uneigentlichen) Grenzwerte von $\exp(x)$ für $x \to \pm\infty$ nach Satz 9.1 (b) gleich $\infty$ bzw. 0 sind, bedeutet die Aussage desselben Satzes für $n > 0$ gerade, dass sich in diesen Grenzwerten, die ja von der Form $\frac{\infty}{\infty}$ bzw. $\pm\infty \cdot 0$ sind, die Exponentialfunktion gegenüber der Potenz $x^n$ durchsetzt. Man sagt auch, „die Exponentialfunktion ist für $x \to \pm\infty$ stärker als jede Potenz“.

(b) Im Bild unten links haben wir den Graphen der reellen Exponentialfunktion gemäß Satz 9.1 skizziert. Da exp nach Beispiel 8.40 (a) stetig und nach Satz 9.1 (b) streng monoton wachsend ist, existiert nach Satz 8.28 eine Umkehrfunktion (wie in Beispiel 8.29 zunächst für Start- und Zielmenge $[-R,R] \to [\exp(-R),\exp(R)]$ für alle $R > 0$, dann durch den Übergang $R \to \infty$ aber auch für $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$):




20

**Definition 9.4** (Logarithmus)**.** Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ wird mit

$$\log\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log(x)$$

bezeichnet und heißt die (natürliche) **Logarithmusfunktion**. Sie ist im Bild oben rechts dargestellt. Statt $\log(x)$ ist oft auch die Bezeichnung $\ln(x)$ üblich.

**Notation 9.5** (Schreibweise spezieller Funktionen)**.** Bei den speziellen Funktionen, die wir in diesem Kapitel kennenlernen werden, ist es zur Vereinfachung der Notation oft üblich, die Klammern

beim Funktionsargument wegzulassen, wenn es sich nur um eine einfache Zahl oder Variable handelt, also z. B. $\log x$ statt $\log(x)$ zu schreiben. Ist das Funktionsargument jedoch ein zusammengesetzter Ausdruck, sind die Klammern zwingend erforderlich: $\log(x+y)$ kann man nicht als $\log x + y$ schreiben, da $\log x + y$ immer als $(\log x) + y$ zu verstehen ist.

**Bemerkung 9.6** (Eigenschaften der Logarithmusfunktion)**.** Unsere bisher gezeigten Eigenschaften der Exponentialfunktion übertragen sich natürlich sofort auf die Logarithmusfunktion:

(a) log ist stetig und streng monoton wachsend nach Satz 8.28.

(b) $\log 1 = 0$ und $\log \mathrm{e} = 1$.

(c) Die Grenzwerte aus Satz 9.1 (b) übertragen sich durch Vertauschen von Start- und Zielraum auf den Logarithmus als $\lim\limits_{x\to\infty} \log x = \infty$ und $\lim\limits_{x\to 0} \log x = -\infty$.

(d) Wenden wir die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion auf $\log x$ und $\log y$ für $x, y > 0$ an, so erhalten wir

$$\exp(\log x + \log y) = \exp(\log x) \cdot \exp(\log y) = x \cdot y$$

und damit durch Logarithmieren

$$\log x + \log y = \log(x \cdot y) \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{R}_{>0},$$

was die **Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion** genannt wird.

Eine der wichtigsten Anwendungen der Logarithmusfunktion ist, dass man mit ihr allgemeine Potenzen definieren kann – also Potenzen der Form $x^a$, wobei $a$ nun nicht mehr wie bisher in $\mathbb{Z}$ liegen muss, sondern eine beliebige reelle Zahl sein kann:

**Definition 9.7** (Allgemeine Potenzen)**.** Für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die **Potenz**

$$x^a := \exp(a \log x)$$

(wir werden in Bemerkung 9.9 (a) noch sehen, dass dies für $a \in \mathbb{Z}$ mit unserer alten Definition aus Notation 3.9 (b) übereinstimmt – was dann auch diese neue, allgemeinere Definition motiviert).

**Lemma 9.8** (Rechenregeln für allgemeine Potenzen)**.** *Für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt*

(a) $x^0 = 1$ *und* $x^1 = x$;

(b) $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$ *und* $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$;

(c) $x^{ab} = (x^a)^b$;

(d) $(xy)^a = x^a \cdot y^a$.

*Beweis.* Alle Beweise sind einfaches Nachrechnen mit Hilfe der Funktionalgleichung:

(a) $x^0 = \exp(0 \cdot \log x) = \exp(0) = 1$ und $x^1 = \exp(\log x) = x$.

(b) Es ist

$$x^{a+b} = \exp((a+b)\log x) = \exp(a \log x + b \log x) = \exp(a \log x) \cdot \exp(b \log x) = x^a \cdot x^b.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $b = -a$, so ergibt sich ferner $1 = x^a \cdot x^{-a}$ und damit $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$.

(c) Es gilt

$$(x^a)^b = \exp(b \log(x^a)) = \exp(b \log(\exp(a \log x))) = \exp(ab \log x) = x^{ab}.$$

(d) Es ist

$$(xy)^a = \exp(a \log(xy)) = \exp(a \log x + a \log y) = \exp(a \log x) \cdot \exp(a \log y) = x^a \cdot y^a. \qquad \square$$

**Bemerkung 9.9.**

(a) Aus Lemma 9.8 (a) und (b) folgt insbesondere, dass im Fall $a \in \mathbb{N}$ für unsere allgemeine Potenz aus Definition 9.7

$$x^a = x^{1+\cdots+1} = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{a\text{-mal}} \qquad \text{und genauso} \qquad x^{-a} = x^{-1-\cdots-1} = \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x}}_{a\text{-mal}}$$

gilt, dass sie dann also mit der alten Definition der Potenz aus Notation 3.9 (b) übereinstimmt.

(b) Nach Lemma 9.8 (c) ist $x \mapsto x^{\frac{1}{a}}$ für $a \neq 0$ eine Umkehrfunktion zu $x \mapsto x^a$, denn es ist

$$(x^a)^{\frac{1}{a}} = x^1 = x \qquad \text{und} \qquad \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^a = x^1 = x$$

für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Da Umkehrfunktionen eindeutig sind und wir im Fall $a \in \mathbb{N}_{>0}$ aus Aufgabe 5.37 und Beispiel 8.29 bereits wissen, dass die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt[a]{x}$ ebenfalls eine solche Umkehrfunktion ist, sehen wir also, dass $x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $a \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt.

(c) Mit der Eulerschen Zahl e aus Satz 9.1 (d) ist offensichtlich $\mathrm{e}^a = \exp(a \log \mathrm{e}) = \exp a$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Man verwendet daher in der Regel die einfachere Potenzschreibweise $\mathrm{e}^a$ für $\exp a$.

(d) Beachte, dass wir die allgemeine Potenz $x^a$ mit $a \in \mathbb{R}$ nur für positive $x$ definieren konnten, weil für negative Zahlen kein Logarithmus existiert. In der Tat ist es auch einleuchtend, dass ein Ausdruck wie z. B. $(-1)^{\sqrt{2}}$ nicht sinnvoll definiert werden kann, da nicht einmal klar ist, ob diese Zahl positiv oder negativ sein sollte.

## 9.B Winkelfunktionen

Nach der reellen wollen wir nun die komplexe Exponentialfunktion studieren, die uns schließlich zu den Winkelfunktionen führen wird. Wie in Bemerkung 9.9 (c) werden wir dabei die Exponentialfunktion auch im Komplexen in der Regel mit $z \mapsto \mathrm{e}^z$ bezeichnen (obwohl es keine allgemeine Potenz $w^z$ für $w, z \in \mathbb{C}$ gibt). Ihre wesentlichen Eigenschaften, die wir benötigen, um den Zusammenhang mit Winkelfunktionen herstellen zu können, sind die folgenden:

**Satz 9.10** (Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion)**.** *Es gilt:*

(a) $\mathrm{e}^{\overline{z}} = \overline{\mathrm{e}^z}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$*;*

(b) $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}| = 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$*.*

*Beweis.*

(a) Für die Partialsummen $f_n(z) := \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$ der Exponentialfunktion folgt natürlich $f_n(\overline{z}) = \overline{f_n(z)}$ durch fortgesetztes Anwenden von Lemma 6.9 (a). Da die komplexe Konjugation $z \mapsto \overline{z}$ nach Beispiel 8.7 (c) stetig ist, ergibt sich also nach dem Folgenkriterium für Stetigkeit aus Satz 8.12 (b)

$$\mathrm{e}^{\overline{z}} = \lim_{n\to\infty} f_n(\overline{z}) = \lim_{n\to\infty} \overline{f_n(z)} = \overline{\lim_{n\to\infty} f_n(z)} = \overline{\mathrm{e}^z}.$$

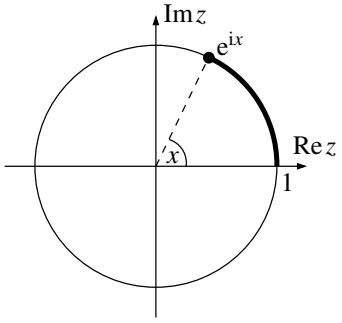
(b) Wegen $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ (siehe Bemerkung 6.4) erhalten wir nun mit (a)

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}| = \sqrt{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \cdot \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}} = \sqrt{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \cdot \mathrm{e}^{\overline{\mathrm{i}x}}} = \sqrt{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}} = \sqrt{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-\mathrm{i}x}} = \sqrt{\mathrm{e}^0} = 1. \qquad \square$$

**Bemerkung 9.11.** Satz 9.10 (b) besagt gerade, dass die komplexe Zahl $e^{ix}$ für *reelle* $x$ immer auf dem Rand des Einheitskreises liegt. Multiplizieren wir zwei solche Zahlen $e^{ix}$ und $e^{iy}$ für $x, y \in \mathbb{R}$ miteinander, so erhalten wir einerseits nach der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion die Zahl

$$e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$$

(d. h. die Exponenten addieren sich), andererseits haben wir aber auch schon in Bemerkung 6.5 gesehen, dass sich bei der komplexen Multiplikation die Winkel, die die Zahlen mit der positiven reellen Achse einschließen, ebenfalls addieren. Wir können den Exponenten $x$ der Zahl $e^{ix}$ daher wie im Bild rechts als ein Maß für diesen Winkel auffassen.




In der Tat werden wir in Aufgabe 9.16 sehen, dass dieses $x$ genau die (im Bild oben rechts dick eingezeichnete) Länge des Kreisbogens ist, der von 1 zu der Zahl $e^{ix}$ führt – man sagt auch, dass $x$ der im **Bogenmaß** gemessene Winkel ist. Wir werden diese Aussage im Folgenden nicht benötigen, sondern verwenden sie hier nur als Motivation dafür, dass Real- und Imaginärteil von $e^{ix}$ (also die beiden Koordinaten dieses Punktes in der Ebene) dann wie aus der Schule bekannt der Kosinus bzw. Sinus des Winkels $x$ sein sollten. Diese Idee machen wir nun zu unserer *Definition* von Kosinus und Sinus.

**Definition 9.12** (Kosinus und Sinus)**.** Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir **Kosinus** und **Sinus** als die reellen Zahlen

$$\cos x := \operatorname{Re}(e^{ix}) \qquad \text{und} \qquad \sin x := \operatorname{Im}(e^{ix}),$$

so dass also $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ die Zerlegung der komplexen Exponentialfunktion in Real- und Imaginärteil ist.

Bevor wir die Eigenschaften dieser beiden Funktionen studieren, wollen wir erst einmal zwei einfache alternative Darstellungsweisen notieren:

**Lemma 9.13** (Alternative Darstellung von Kosinus und Sinus)**.**

(a) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist*

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \qquad \textit{und} \qquad \sin x = -\frac{i}{2}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right).$$

(b) *Kosinus und Sinus lassen sich darstellen als reelle Potenzreihen mit Konvergenzradius $\infty$*

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots,$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots.$$

*Insbesondere sind Kosinus und Sinus nach Folgerung 8.39 also stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$.*

*Beweis.*

(a) Dies folgt aus den allgemeinen Formeln $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $\operatorname{Im} z = -\frac{i}{2}(z - \bar{z})$ (siehe Bemerkung 6.4) zusammen mit Satz 9.10 (a).

(b) Die Potenzreihendarstellungen ergeben sich mit (a) sofort aus

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + i\frac{x^1}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\text{und} \qquad e^{-ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n!} = 1 - i\frac{x^1}{1!} - \frac{x^2}{2!} + i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + i\frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

da man konvergente Reihen nach Lemma 7.4 (a) gliedweise addieren kann. Weil diese Reihendarstellung für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihen gleich $\infty$. □

Wir listen nun zunächst die einfachsten Eigenschaften von Kosinus und Sinus auf, die sich direkt aus der Definition ergeben.

**Satz 9.14** (Eigenschaften von Kosinus und Sinus)**.** *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

(a) $\cos(-x) = \cos x$ *und* $\sin(-x) = -\sin x$. *(Der Graph von* cos *ist also achsensymmetrisch zur vertikalen Achse, der von* sin *punktsymmetrisch zum Ursprung).*

(b) $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$*; insbesondere ist also* $|\cos x| \leq 1$ *und* $|\sin x| \leq 1$.

(c) ***(Additionstheoreme)***

$$\begin{aligned} & \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \textit{und} \qquad & \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \end{aligned}$$

*(wobei die Gleichungen so zu verstehen sind, dass an beiden Stellen das obere oder an beiden Stellen das untere Vorzeichen zu nehmen ist).*

*Beweis.*

(a) Dies folgt z. B. unmittelbar aus Lemma 9.13 (a).

(b) Nach Satz 9.10 (b) ist $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = (\mathrm{Re}(e^{ix}))^2 + (\mathrm{Im}(e^{ix}))^2 = |e^{ix}|^2 = 1$.

(c) Einerseits gilt nach der Funktionalgleichung der komplexen Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= e^{ix} \cdot e^{iy} = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i\big(\sin x \cos y + \cos x \sin y\big), \end{aligned}$$

andererseits nach Definition aber auch

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i \sin(x+y).$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert nun die behaupteten Formeln für $\cos(x+y)$ und $\sin(x+y)$. Die Formeln für $\cos(x-y)$ und $\sin(x-y)$ ergeben sich daraus durch den Übergang $y \to -y$ mit (a). □

**Notation 9.15** ($\cos^n x$ und $\sin^n x$)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ schreibt man zur Abkürzung oft auch $\cos^n x$ und $\sin^n x$ anstatt $(\cos x)^n$ und $(\sin x)^n$. Die Formel aus Satz 9.14 (b) schreibt sich dann z. B. kürzer als $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Beachte aber, dass dies leicht zu Verwechslungen führen kann, weil wir die Umkehrfunktion einer bijektiven Funktion $f$ in Definition 2.20 ja mit $x \mapsto f^{-1}(x)$ bezeichnet haben, dies aber nach dieser neuen Notation auch als $x \mapsto (f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ interpretiert werden könnte – was natürlich etwas völlig anderes ist. Wir werden daher für Kosinus und Sinus die Schreibweise $\cos^{-1}(x)$ bzw. $\sin^{-1}(x)$ überhaupt nicht verwenden, und den Umkehrfunktionen dieser beiden Funktionen andere Namen geben (siehe Definition 9.25).

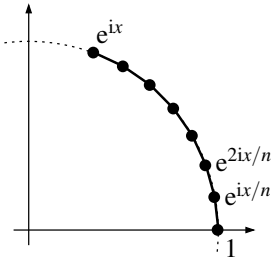
**Aufgabe 9.16** (Bogenmaß)**.**

(a) Berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

(b) Es sei $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wir wollen zeigen, dass die „Bogenlänge“ entlang des Einheitskreises von 1 nach $e^{ix} \in \mathbb{C}$ gleich $x$ ist und $e^{ix}$ damit als der Punkt auf dem Einheitskreis aufgefasst werden kann, der mit der positiven reellen Achse den Winkel $x$ „im Bogenmaß“ einschließt.

Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ unterteilen wir dazu den Kreisbogen wie im Bild durch die Zwischenpunkte $e^{ikx/n}$ mit $k = 0, \ldots, n$. Die Länge des geraden Streckenzuges, der diese Punkte der Reihe nach miteinander verbindet, ist dann

$$L_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left| e^{i(k+1)x/n} - e^{ikx/n} \right|.$$




Zeige, dass $\lim\limits_{n \to \infty} L_n = x$.

**Aufgabe 9.17.** Es sei $x \in \mathbb{R}$. Finde und beweise eine explizite Formel für die Summen

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

Als Nächstes wollen wir die Nullstellen und die Periodizität von Kosinus und Sinus untersuchen. Aus Bemerkung 9.11 (und dem, was ihr aus der Schule wisst) ist z. B. klar, dass diese beiden Funktionen die Periode $2\pi$ besitzen sollten. Aber bisher wissen wir überhaupt noch nicht, was $\pi$ eigentlich genau ist! Wie ihr euch vielleicht schon denken könnt, wird auch hier der Ausweg wieder darin bestehen, die Sache rückwärts anzugehen und die Zahl $\pi$ über die Eigenschaften der Kosinus- und Sinusfunktion zu *definieren*. Dazu benötigen wir das folgende Lemma.

**Lemma 9.18.**

(a) *Für alle* $x \in (0,2)$ *ist* $\sin x > 0$.

(b) *Die Kosinusfunktion ist im Intervall* $[0,2]$ *streng monoton fallend, und es gilt* $\cos 0 > 0$ *sowie* $\cos 2 < 0$.

*Beweis.* Wir bemerken zunächst, dass die Summanden der Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für $0 < x \leq 2$ ab dem $x^1$-Term betragsmäßig monoton fallend sind, denn für $n \geq 1$ ist

$$\left| \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} \right| = \frac{x}{n+1} \leq \frac{2}{1+1} = 1.$$

Dasselbe gilt dann natürlich auch für die Glieder der Kosinus- und Sinusreihe, die nach Lemma 9.13 (b) ja bis auf das Vorzeichen genau die geraden bzw. ungeraden Terme der Exponentialreihe sind. Da die Kosinus- und Sinusreihe zudem alternierend sind, sind ihre Partialsummen nach Satz 7.8 damit abwechselnd obere und untere Schranken für den Grenzwert (sofern wir mindestens bis zum $x^1$-Term aufsummieren, ab dem die Summanden betragsmäßig monoton fallen).

(a) Nach unserer Vorbemerkung folgt nun sofort für alle $x \in (0,2)$

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} = x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) > x\left(1 - \frac{2^2}{6}\right) = \frac{x}{3} > 0.$$

(b) Natürlich ist $\cos 0 = 1 > 0$. Für $\cos 2$ gilt wieder nach der Vorbemerkung

$$\cos 2 \leq 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3} < 0.$$

Es bleibt also nur noch die strenge Monotonie zu zeigen. Es seien dazu $x, y \in [0,2]$ mit $x < y$ gegeben. Mit den Additionstheoremen aus Satz 9.14 (c) ergibt sich

$$\cos\left(\frac{y+x}{2} \pm \frac{y-x}{2}\right) = \cos\frac{y+x}{2} \cdot \cos\frac{y-x}{2} \mp \sin\frac{y+x}{2} \cdot \sin\frac{y-x}{2}.$$

Subtraktion dieser beiden Gleichungen voneinander liefert nun

$$\cos\Big(\underbrace{\frac{y+x}{2} + \frac{y-x}{2}}_{=y}\Big) - \cos\Big(\underbrace{\frac{y+x}{2} - \frac{y-x}{2}}_{=x}\Big) = -2\sin\underbrace{\frac{y+x}{2}}_{\in(0,2)} \cdot \sin\underbrace{\frac{y-x}{2}}_{\in(0,2)},$$

mit (a) also $\cos y - \cos x < 0$ und damit wie behauptet $\cos x > \cos y$. □

Da die Kosinusfunktion nach Lemma 9.13 (b) stetig ist, ergibt sich mit dem Zwischenwertsatz 8.21 aus Lemma 9.18 (b) also, dass es *genau ein* $x \in (0,2)$ gibt mit $\cos x = 0$. Aus der Interpretation von Bemerkung 9.11 sehen wir, dass diese Nullstelle des Kosinus genau bei $x = \frac{\pi}{2}$ auftreten sollte, also dort wo $e^{ix}$ auf der imaginären Achse liegt. Wir benutzen dies nun, um die Zahl $\pi$ zu *definieren*:

**Definition 9.19** (Die Zahl $\pi$)**.** Wir definieren die Zahl $\pi \in \mathbb{R}$ als das Doppelte der (nach obigen Überlegungen eindeutig bestimmten) Nullstelle der Kosinusfunktion im Intervall $[0,2]$. (Eine näherungsweise Berechnung dieser Nullstelle zeigt, dass $\pi = 3,14159\ldots$.)

**Bemerkung 9.20.**

(a) Unsere Definition 9.19 ist natürlich nicht die einzig mögliche Art, wie man die Zahl $\pi$ definieren kann. Man könnte genauso gut auch irgendeine andere charakteristische Eigenschaft dieser Zahl als Definition verwenden, wie z. B. (was ja häufig gesagt wird) den Flächeninhalt des Einheitskreises. Allerdings wissen wir bisher noch gar nicht, wie man derartige Flächeninhalte überhaupt definieren und berechnen kann. Für uns hat die etwas merkwürdig scheinende Definition 9.19 daher einfach den Vorteil, dass sie am schnellsten zu den gewünschten Resultaten führt (insbesondere auch ohne Flächeninhalte berechnen zu können).

(b) Da die Kosinusfunktion nach Lemma 9.18 (b) auf $[0,2]$ streng monoton fallend ist, ist ihre Einschränkung auf das Intervall $[0,\frac{\pi}{2}]$ damit eine bijektive, streng monoton fallende Funktion, die von $\cos 0 = 1$ nach $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ läuft. Wir wollen nun sehen, wie wir aus diesem Abschnitt der Kosinusfunktion die Kosinus- und Sinusfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ rekonstruieren können.

**Satz 9.21** (Periodizität von Kosinus und Sinus)**.**

(a) *An den Stellen* $x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$ *nehmen* $e^{ix}$, $\cos x$ *und* $\sin x$ *die folgenden Werte an:*

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e^{ix}$ | $1$ | $i$ | $-1$ | $-i$ | $1$ |
| $\cos x$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
| $\sin x$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |

(b) *Kosinus und Sinus sind* $2\pi$*-periodisch, d. h. es gilt* $\cos(x+2\pi) = \cos x$ *und* $\sin(x+2\pi) = \sin x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(c) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $\cos(\pi - x) = -\cos x$ *und* $\sin(\frac{\pi}{2} \pm x) = \cos x$.

*Beweis.*

(a) Nach Definition 9.19 ist $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Für den Sinus gilt damit $\sin^2\frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1$ nach Satz 9.14 (b); da außerdem $\sin\frac{\pi}{2} > 0$ nach Lemma 9.18 (a) gilt, muss also $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ sein. Damit ist $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$.

Die übrigen behaupteten Werte für $e^{in\frac{\pi}{2}}$ mit $n \in \{0,1,2,3,4\}$ folgen damit sofort nach der Funktionalgleichung aus $e^{in\frac{\pi}{2}} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^n = i^n$. Aufteilen dieser Zahlen in Real- und Imaginärteil liefert dann die Werte für Kosinus und Sinus in der Tabelle.

(b) Nach (a) ist $e^{i\cdot 2\pi} = 1$ und damit $e^{i\cdot(x+2\pi)} = e^{ix}\cdot e^{i\cdot 2\pi} = e^{ix}$. Aufteilen in Real- und Imaginärteil liefert wieder die Behauptung.

(c) Wiederum mit (a) ist

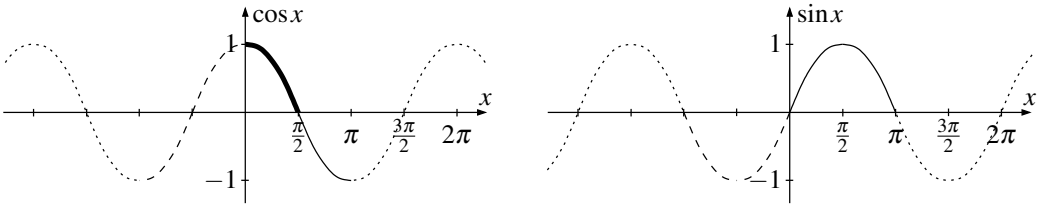
$$\cos(\pi - x) = \cos\pi\cos x + \sin\pi\sin x = (-1)\cdot\cos x + 0\cdot\sin x = -\cos x$$

$$\text{und} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x \pm \cos\frac{\pi}{2}\sin x = 1\cdot\cos x \pm 0\cdot\sin x = \cos x$$

nach den Additionstheoremen aus Satz 9.14 (c). □

**Bemerkung 9.22.** Mit Satz 9.21 können wir nun aus dem Verlauf der Kosinusfunktion im Intervall $[0,\frac{\pi}{2}]$ (nach Bemerkung 9.20 (b) streng monoton fallend von 1 nach 0 verlaufend; im Bild unten dick eingezeichnet) die gesamte Kosinus- und Sinusfunktion rekonstruieren:

- Satz 9.21 (c) für $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$ legt zunächst Kosinus und Sinus im Intervall $[0,\pi]$ fest: Die Graphen verlaufen hier „genauso“ wie beim Kosinus von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, nur gedreht bzw. gespiegelt (im Bild unten als durchgezogene Linie markiert);
- Satz 9.14 (a) bestimmt Kosinus und Sinus damit dann auch im Intervall $[-\pi,\pi]$ (im Bild gestrichelt eingezeichnet);
- Satz 9.21 (b) schließlich besagt dann, dass dieser Verlauf von Kosinus und Sinus in beide Richtungen $2\pi$-periodisch fortgesetzt wird (wie im Bild gepunktet eingezeichnet).




21

Wie in der Schule definiert man schließlich noch den Tangens:

**Definition 9.23** (Tangens)**.** Für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$, also nach Bemerkung 9.22 für alle $x$ mit $\cos x \neq 0$, heißt

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

der **Tangens** von $x$.

**Bemerkung 9.24** (Eigenschaften des Tangens)**.** Die wesentlichen Eigenschaften des Tangens ergeben sich unmittelbar aus denen des Kosinus und Sinus:

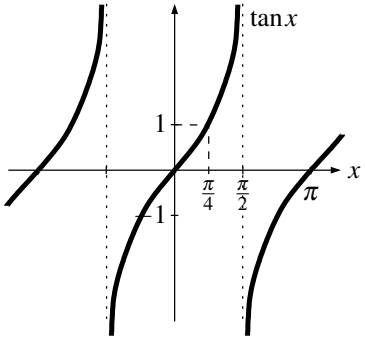
(a) Der Tangens ist auf seiner Definitionsmenge als Quotient stetiger Funktionen stetig.

(b) Es ist

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

nach Satz 9.14 (a) (d. h. der Graph von tan ist punktsymmetrisch zum Ursprung), und

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$




nach Bemerkung 9.22 (d. h. tan ist periodisch mit Periode $\pi$). Der Graph der Tangensfunktion ist wegen dieser Symmetrien also bereits durch den Graphen im Intervall $[0, \frac{\pi}{2})$ bestimmt.

(c) Es ist $\tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$ sowie $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, denn nach Satz 9.21 (c) ist $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$. Weiterhin ist

$$\lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}} \tan x = \infty,$$

da in diesem Grenzfall $\sin x \to 1$ gilt und $\cos x$ von der positiven Seite gegen 0 konvergiert.

(d) Die Tangensfunktion ist auf $[0, \frac{\pi}{2})$ (und damit nach der Symmetrie aus (b) auch auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) streng monoton wachsend: Für $x, y \in [0, \frac{\pi}{2})$ mit $x < y$ ist $\sin x < \sin y$ und $\cos x > \cos y > 0$ nach Bemerkung 9.22, also

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} < \frac{\sin y}{\cos y} = \tan y.$$

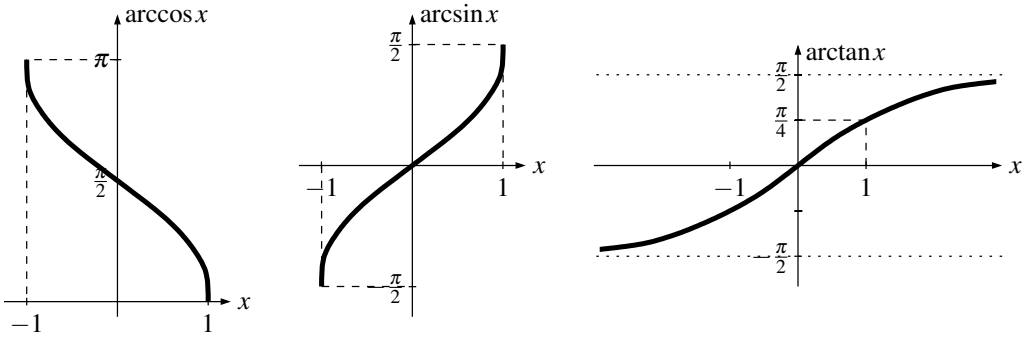
Wir können nun natürlich auf den Intervallen, auf denen die Winkelfunktionen stetig und streng monoton sind, nach Satz 8.28 die Umkehrfunktionen definieren. Aufgrund der Periodizität haben wir dabei in allen drei Fällen eine Wahl, *welches* solche Intervall wir betrachten. Üblicherweise verwendet man die folgenden:

**Definition 9.25** (Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen)**.** Die Umkehrfunktion von ...

(a) $\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ heißt **Arkuskosinus** $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$.

(b) $\sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ heißt **Arkussinus** $\arcsin\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(c) $\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ heißt **Arkustangens** $\arctan\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

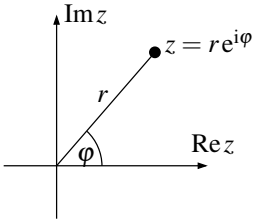



**Bemerkung 9.26.**

(a) Beachte, dass die Arkusfunktionen *nur in den betrachteten Intervallen* die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen sind; es ist also z. B. $\arcsin(\sin x) = x$ nur für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, wohingegen z. B. $\arcsin(\sin \pi) = \arcsin 0 = 0$ ist.

(b) Wie bei den anderen bisher betrachteten Umkehrfunktionen ergeben sich die Eigenschaften der Arkusfunktionen natürlich wieder direkt aus denen der Winkelfunktionen. So sind z. B. alle Arkusfunktionen stetig und streng monoton nach Satz 8.28 (wachsend für arcsin und arctan, fallend für arccos), und die wichtigsten speziellen Werte und Symmetrien sind wie im Bild oben dargestellt.

Als Anwendung der Arkusfunktionen wollen wir zum Abschluss dieses Kapitels nun noch die sogenannte Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen behandeln, mit der sich Rechnungen in $\mathbb{C}$ oft wesentlich vereinfachen lassen. Die Idee dabei ist einfach, dass man durch Multiplikation einer Zahl $e^{i\varphi}$ auf dem Einheitskreis (siehe Bemerkung 9.11) mit einer positiven reellen Zahl $r$ jeden Punkt der komplexen Zahlenebene (mit Ausnahme des Nullpunkts) erreichen können sollte, wobei wie im Bild rechts $r$ gerade der Betrag und $\varphi$ der Winkel des betrachteten Punktes ist. Man kann einen solchen Punkt also auch durch Angabe der Werte von $r$ und $\varphi$ (anstatt durch Real- und Imaginärteil) charakterisieren:




**Satz 9.27** (Polarkoordinatendarstellung)**.**

(a) *Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ lässt sich in der Form $z = re^{i\varphi}$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ schreiben.*

(b) *Die Darstellung aus (a) ist eindeutig bis auf ganzzahlige Vielfache von $2\pi$ in $\varphi$, d. h. für $r, r' \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$ gilt $re^{i\varphi} = r'e^{i\varphi'}$ genau dann wenn $r' = r$ und $\varphi' - \varphi = 2\pi n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$.*

*Man nennt $r$ und $\varphi$ die* ***Polarkoordinaten*** *von $z$.*

*Beweis.*

(a) Wir setzen $r := |z|$. Es bleibt also noch zu zeigen, dass es ein $\varphi \in \mathbb{R}$ gibt mit $z = |z|e^{i\varphi}$, d. h. dass sich die komplexe Zahl $\frac{z}{|z|}$, die ja jetzt Betrag 1 hat, in der Form $e^{i\varphi}$ schreiben lässt. Aufgeteilt in Real- und Imaginärteil bedeutet dies genau, dass wir $\frac{z}{|z|} =: x + iy$ als $\cos\varphi + i\sin\varphi$ schreiben wollen, d. h. wir suchen zu $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + y^2 = 1$ eine Zahl $\varphi \in \mathbb{R}$ mit

$$\cos\varphi = x \qquad \text{und} \qquad \sin\varphi = y. \tag{$*$}$$

Wegen $x^2 + y^2 = 1$ ist insbesondere $|x| \leq 1$, wir können also $\alpha := \arccos x$ setzen, so dass schon einmal $\cos\alpha = x$ gilt. Nun ist mit Satz 9.14 (b)

$$y^2 = 1 - x^2 = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$

und damit $y = \pm\sin\alpha$. Im Fall des Vorzeichens „+“ ergibt nun $\varphi := \alpha$, im Fall des Vorzeichens „−“ hingegen $\varphi := -\alpha$ die gewünschten Relationen $(*)$.

(b) Zunächst ist $re^{i\varphi} = r'e^{i\varphi'}$ genau dann, wenn $r = r'$ und $e^{i\varphi} = e^{i\varphi'}$ (für die Richtung „⇐“ nehmen wir auf beiden Seiten den Betrag). Weiterhin ist $e^{i\varphi} = e^{i\varphi'}$, also $e^{i(\varphi'-\varphi)} = 1$, äquivalent zu

$$\cos(\varphi'-\varphi) = 1 \qquad \text{und} \qquad \sin(\varphi'-\varphi) = 0.$$

Aus Bemerkung 9.22 ergibt sich nun, dass dies genau dann der Fall ist, wenn $\varphi'-\varphi$ ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi$ ist. □

**Beispiel 9.28.**

(a) In Polarkoordinaten ist insbesondere die Multiplikation zweier komplexer Zahlen sehr einfach: Es ist

$$(r_1 e^{i\varphi_1}) \cdot (r_2 e^{i\varphi_2}) = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

was die algebraische Version der geometrischen Aussage aus Bemerkung 6.5 ist, dass sich bei der Multiplikation komplexer Zahlen die Beträge multiplizieren und die Winkel addieren.

(b) (Einheitswurzeln) In Polarkoordinaten können wir in $\mathbb{C}$ besonders einfach die Gleichung $z^n = 1$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ lösen. Schreiben wir nämlich $z = re^{i\varphi}$, so wollen wir also

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = 1 = 1e^{i\cdot 0},$$

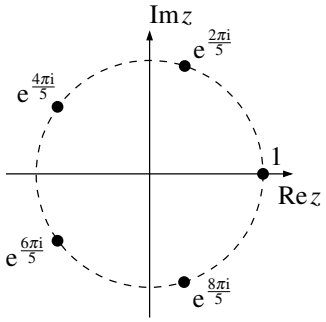
was nach der Eindeutigkeitsaussage aus Satz 9.27 (b) bedeutet, dass

$$r^n = 1 \qquad \text{und} \qquad n\varphi = 2\pi k \text{ für ein } k \in \mathbb{Z},$$

also $r = 1$ und $\varphi = \frac{2\pi k}{n}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Da man die Polarkoordinaten stets so wählen kann, dass $\varphi \in [0, 2\pi)$ ist, genügt es dabei, sich auf die Werte $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ zu beschränken. Die komplexen Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ sind also genau die $n$ Zahlen

$$z_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}} \qquad \text{für } k = 0, \ldots, n-1.$$

Man bezeichnet diese Zahlen als die $n$-ten **Einheitswurzeln**; sie bilden die Ecken eines regelmäßigen $n$-Ecks (wie im Bild rechts für das Beispiel $n = 5$ dargestellt).




**Aufgabe 9.29.**

(a) Bestimme $\cos\frac{\pi}{6}$ und $\sin\frac{\pi}{6}$.

(b) Stelle alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^6 = -8$ sowohl in Polarkoordinaten $z = re^{i\varphi}$ als auch ohne Verwendung von Winkelfunktionen in der Form $z = x + iy$ dar. Wo liegen sie in der komplexen Zahlenebene?

**Aufgabe 9.30.**

(a) Zeige, dass

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$, für die diese Ausdrücke definiert sind.

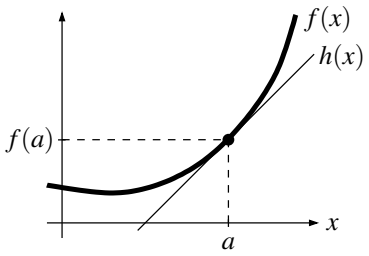
(b) Skizziere die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arctan x + \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

und begründe dabei alle wesentlichen qualitativen Merkmale des Funktionsgraphen.

# 10. Differentialrechnung

Wir kommen nun zum wohl wichtigsten Teil der Analysis (in einer Veränderlichen), der sogenannten Differentialrechnung. Ziel der Differentialrechnung ist es, wie im Bild rechts eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}$ in einem gegebenen Punkt $a \in D \subset \mathbb{K}$ *linear zu approximieren*, d. h. eine Gerade $h$ zu finden, die $f$ in einer kleinen Umgebung von $a$ möglichst gut annähert. Mit anderen Worten können wir $h$ als *Tangente* an den Graphen von $f$ im Punkt $a$ auffassen.




In der Praxis ist dies natürlich oft wünschenswert, denn immer wenn wir aus irgendwelchen Gründen wissen, dass wir die Funktion $f$ nur in der Nähe von $a$ benötigen werden, dann können wir die womöglich sehr komplizierte Funktion $f$ näherungsweise durch eine Gerade ersetzen, also durch eine viel einfacher zu behandelnde Funktion.

Wie kann man nun diese Tangente $h$ bestimmen? Als Gerade durch den Punkt $(a, f(a))$ muss sie natürlich von der Form $h(x) = f(a) + c\,(x-a)$ für ein $c \in \mathbb{K}$ sein, wobei dieses $c$ die Steigung der Geraden angibt. Wir möchten also erreichen, dass

$$f(x) \approx f(a) + c\,(x-a),$$

wobei das Symbol „$\approx$“ hier nicht exakt definiert ist, sondern nur den anschaulichen Sachverhalt „ist für $x$ in der Nähe von $a$ in etwa gleich“ beschreiben soll. Es müsste dann also

$$c \approx \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

sein. Aufgrund unserer Vorarbeiten wissen wir aber natürlich nun, wie man dies mathematisch exakt formulieren muss: Die beste Näherung erhalten wir für den Grenzwert

$$c = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(sofern er existiert). Derartige Grenzwerte wollen wir nun also in der Differentialrechnung studieren.

## 10.A Ableitungen von Funktionen

Bevor wir den obigen Grenzwert von $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ für $x \to a$ exakt definieren können, müssen wir noch kurz eine (recht schwache) Bedingung an die Definitionsmenge $D$ der betrachteten Funktion stellen: Da dieser Quotient nur für $x \in D \backslash \{a\}$ definiert ist, muss $a$ nach Definition 8.3 ein Berührpunkt von $D\backslash\{a\}$ sein, damit der Grenzwert dieses Ausdrucks für $x \to a$ überhaupt definierbar ist, also damit man sich innerhalb von $D\backslash\{a\}$ dem Punkt $a$ beliebig nähern kann. Wir wollen diese Bedingung nun formalisieren.

**Definition 10.1** (Isolierte Punkte)**.** Es sei $D \subset \mathbb{K}$. Ein Punkt $a \in D$ heißt **isolierter Punkt** von $D$, wenn es eine $\varepsilon$-Umgebung von $a$ gibt, die außer $a$ keinen Punkt von $D$ enthält (also „wenn man sich innerhalb von $D\backslash\{a\}$ dem Punkt $a$ nicht beliebig nähern kann“).

**Beispiel 10.2.**

(a) Die Menge $\mathbb{Z}$ besteht nur aus isolierten Punkten.

(b) Intervalle in $\mathbb{R}$ – egal ob offene, halboffene, abgeschlossene oder uneigentliche – haben keine isolierten Punkte (solange sie nicht ein einpunktiges Intervall $[a,a]$ sind). Vereinigungen derartiger Intervalle haben ebenfalls keine isolierten Punkte.

Durch Negation der Bedingung aus Definition 10.1 sehen wir, dass ein Punkt $a \in D$ *kein* isolierter Punkt von $D$ ist, wenn in jeder $\varepsilon$-Umgebung von $a$ ein Punkt von $D\backslash\{a\}$ liegt, also wenn $a$ ein Berührpunkt von $D\backslash\{a\}$ ist. Um Grenzwerte für $x \to a$ mit $x \in D$ und $x \neq a$ in jedem Punkt $a \in D$ bilden zu können, machen wir wie oben erläutert jetzt also die

| Grundvoraussetzung für dieses Kapitel: Die Definitionsmengen aller betrachteten Funktionen haben keine isolierten Punkte. |
|---|

Damit können wir nun wie oben motiviert die Steigungen der lokalen linearen Approximationen einer gegebenen Funktion als Grenzwerte berechnen:

**Definition 10.3** (Differenzierbarkeit)**.** Es seien $D \subset \mathbb{K}$ und $f\colon D \to \mathbb{K}$ eine Funktion.

(a) Die Funktion $f$ heißt **differenzierbar** in $a \in D$, wenn der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

in $\mathbb{K}$ existiert (ein uneigentlicher Grenzwert $\pm\infty$ im reellen Fall wie in Definition 8.19 ist hier also nicht zugelassen). Die Zahl $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ bezeichnet man oft als **Differenzenquotient**, ihren Grenzwert $f'(a)$ – sofern er existiert – als **Differentialquotient** oder **Ableitung** von $f$ in $a$. Da es offensichtlich ist, dass wir hier bei der Grenzwertbildung $x \neq a$ beachten müssen, werden wir diese Bedingung in der Regel nicht jedes Mal wieder explizit hinschreiben.

(b) Man nennt $f$ differenzierbar (auf $D$), wenn $f$ in jedem Punkt von $D$ differenzierbar ist. Offensichtlich erhält man dann eine Funktion $f'\colon D \to \mathbb{K}$, $x \mapsto f'(x)$, die die Ableitungsfunktion (oder ebenfalls kurz Ableitung) von $f$ genannt wird.

Wie oben erläutert ist $f'(a)$ also (zumindest im reellen Fall) die Steigung der Tangenten an den Graphen von $f$ im Punkt $(a, f(a))$.

**Beispiel 10.4.**

(a) Jede Gerade $f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto mx + b$ mit $m, b \in \mathbb{K}$ ist differenzierbar mit Ableitung $m$, denn

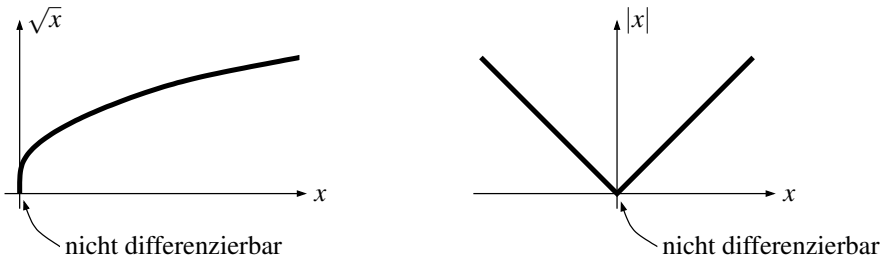
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(mx + b) - (ma + b)}{x - a} = m.$$

Dies ist geometrisch natürlich klar, denn eine solche Gerade ist ihre eigene Tangente in jedem Punkt und hat damit überall die Steigung $m$.

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ die Wurzelfunktion. Dann ist für alle $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})(\sqrt{x} - \sqrt{a})} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{a}} & \text{für } a > 0, \\ \infty & \text{für } a = 0. \end{cases}$$

Also ist $f$ differenzierbar auf $\mathbb{R}_{>0}$ mit Ableitung $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, aber nicht differenzierbar auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Anschaulich ist $f$ nicht differenzierbar in 0, weil $f$ dort „unendliche Steigung“ hat und die lineare Approximation daher eine senkrechte Gerade sein müsste (siehe Bild unten links).



(c) Die Betragsfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist nicht differenzierbar in 0 nach dem Folgenkriterium, denn die Folge $(x_n)_n$ mit $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert gegen 0, aber der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_n|}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{(-1)^n/n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

existiert nicht. Anschaulich ist $f$ deswegen nicht differenzierbar in 0, weil der Funktionsgraph dort einen „Knick" hat und sich die Funktion daher dort nicht durch eine Gerade approximieren lässt (siehe Bild oben rechts).

Wir haben gerade mit Beispiel 10.4 (b) und (c) zwei Beispiele von Funktionen gesehen, die (in einem Punkt) stetig, aber nicht differenzierbar sind. Wir wollen nun zeigen, dass umgekehrt aber jede differenzierbare Funktion stetig ist. Hierfür benötigen wir das folgende Lemma, das wir auch später noch einmal verwenden werden.

**Lemma 10.5** (Äquivalentes Kriterium für Differenzierbarkeit)**.** *Es seien $D \subset \mathbb{K}$, $f\colon D \to \mathbb{K}$ eine Funktion und $a \in D$. Dann sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent:*

(a) *$f$ ist differenzierbar in $a$.*

(b) *Es gibt eine in $a$ stetige Funktion $\varphi\colon D \to \mathbb{K}$ mit $f(x) - f(a) = \varphi(x) \cdot (x-a)$ für alle $x \in D$.*

*In diesem Fall ist dann $\varphi(a) = f'(a)$.*

*Beweis.* Die gegebene Bedingung an $\varphi$ legt diese Funktion für alle $x \neq a$ offensichtlich fest als den Differenzenquotienten

$$\varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Damit besagt (b) also genau, dass diese Funktion stetig nach $a$ fortsetzbar ist. Dies ist gemäß Definition 8.5 (b) aber exakt dasselbe wie die Aussage (a), dass der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (*)$$

existiert, also dass $f$ in $a$ differenzierbar ist. Ist dies der Fall, so ist der Ausdruck $(*)$ dann aber sowohl gleich der stetigen Fortsetzung $\varphi(a)$ von $\varphi$ in $a$ als auch gleich der Ableitung $f'(a)$. □

**Bemerkung 10.6.** Anschaulich gibt die Funktion $\varphi$ aus Lemma 10.5 im Punkt $x$ genau die Steigung der Geraden durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$ an – die im Grenzfall $x \to a$ dann zur Tangentensteigung wird.

**Folgerung 10.7.** *Es seien $D \subset \mathbb{K}$, $f\colon D \to \mathbb{K}$ eine Funktion und $a \in D$. Ist $f$ differenzierbar in $a$, so ist $f$ auch stetig in $a$.*

*Beweis.* Ist $f$ differenzierbar in $a$, so gibt es nach Lemma 10.5 eine in $a$ stetige Funktion $\varphi\colon D \to \mathbb{K}$ mit $f(x) = f(a) + \varphi(x)(x-a)$. Insbesondere existiert also der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \varphi(a)$, und damit nach den Grenzwertsätzen aus Satz 8.14 auch

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \big(f(a) + \varphi(x)(x-a)\big) = f(a) + \varphi(a)(a-a) = f(a),$$

d. h. $f$ ist stetig in $a$. □

Genau wie bei unserer Untersuchung der Stetigkeit wollen wir nun zeigen, dass sich die Differenzierbarkeit von Funktionen auf Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten, Verkettungen, Umkehrfunktionen und schließlich auch auf Potenzreihen überträgt – und auch wie man dann die Ableitungen dieser neuen Funktionen berechnet. Wir beginnen mit den vier Grundrechenarten.

**Satz 10.8** (Rechenregeln für Ableitungen)**.** *Die Funktionen $f, g\colon D \to \mathbb{K}$ seien differenzierbar in $a \in D$. Dann gilt:*

(a) *$f \pm g$ ist differenzierbar in $a$ mit Ableitung $(f \pm g)'(a) = (f' \pm g')(a)$.*

(b) ***(Produktregel)** $fg$ ist differenzierbar in $a$ mit $(fg)'(a) = (f'g + fg')(a)$.*

(c) ***(Quotientenregel)*** *Ist $g(a) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar in $a$ mit $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(\frac{f'g - fg'}{g^2}\right)(a)$.*

*Beweis.*

(a) Wir führen den Beweis hier nur für die Addition, der für die Subtraktion ist analog:

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)-(f(a)+g(a))}{x-a} = \lim_{x\to a}\Big(\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)} + \underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\to g'(a)}\Big)\\ &= (f'+g')(a).\end{aligned}$$

(b) Da $g$ in $a$ differenzierbar, nach Folgerung 10.7 also auch stetig ist, gilt $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$. Damit ergibt sich nach den Rechenregeln für Grenzwerte aus Satz 8.14

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\Big(\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)}\cdot\underbrace{g(x)}_{\to g(a)} + f(a)\cdot\underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\to g'(a)}\Big)\\ &= (f'g+fg')(a).\end{aligned}$$

(c) Da $g$ als differenzierbare Funktion nach Folgerung 10.7 auch stetig ist, ist $g$ wegen $g(a) \neq 0$ nach Bemerkung 8.8 in einer $\varepsilon$-Umgebung von $a$ nirgends 0. Damit stimmt die Definitionsmenge von $\frac{f}{g}$ dort mit $D$ überein. Also ist $a$ kein isolierter Punkt dieser Definitionsmenge, und wir können sinnvoll über die Ableitung von $\frac{f}{g}$ in $a$ sprechen.

Die eigentliche Berechnung dieser Ableitung ist nun analog zu (b):

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)g(a)}\cdot\frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a} \underbrace{\frac{1}{g(x)g(a)}}_{\to 1/(g(a))^2}\cdot\Big(\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)}\cdot g(a) - f(a)\cdot\underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\to g'(a)}\Big)\\ &= \left(\frac{f'g-fg'}{g^2}\right)(a).\end{aligned}$$

□ 22

**Beispiel 10.9.**

(a) Wir zeigen mit Induktion über $n$, dass die Ableitung der Potenzfunktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ durch $f'(x) = nx^{n-1}$ gegeben ist. Der Induktionsanfang für $n=0$ ergibt sich dabei aus Beispiel 10.4 (a). Wissen wir nun für ein $n\in\mathbb{N}$, dass die Ableitung von $x\mapsto x^n$ gleich $x\mapsto nx^{n-1}$ ist, so folgt mit der Produktregel für die Ableitung von $f(x) = x^{n+1} = x^n\cdot x$

$$f'(x) = nx^{n-1}\cdot x + x^n\cdot 1 = (n+1)x^n,$$

da die Ableitung der Funktion $x\mapsto x$ nach Beispiel 10.4 (a) die konstante Funktion 1 ist.

(b) Aus der Produktregel und Beispiel 10.4 (a) folgt insbesondere für alle $c\in\mathbb{K}$ und jede differenzierbare Funktion $f\colon D\to\mathbb{K}$, dass $(cf)' = c\cdot f'$.

(c) Mit den Regeln aus Satz 10.8 (und Beispiel 10.4 (a)) können wir nun offensichtlich die Ableitung jeder rationalen Funktion, also jeder Funktion der Form $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit Polynomfunktionen $p$ und $q$ berechnen. Ist z. B. $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ selbst eine Polynomfunktion, so ist $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$ nach (a), (b) und Satz 10.8 (a).

Wir kommen jetzt zu Verkettungen und Umkehrfunktionen.

**Satz 10.10 (Kettenregel).** *Es seien $f\colon D \to \mathbb{K}$ und $g\colon D' \to \mathbb{K}$ zwei Funktionen, so dass $f(D) \subset D'$. Ist dann $a \in D$, so dass $f$ differenzierbar in $a$ und $g$ differenzierbar in $f(a)$ ist, so ist auch die Verkettung $g \circ f$ differenzierbar in $a$, und es gilt*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a),$$

*d. h. „die Ableitung einer Verkettung ist das Produkt der beiden Ableitungen“.*

*Beweis.* Da $f$ und $g$ in $a$ bzw. $f(a)$ differenzierbar sind, gibt es nach Lemma 10.5 Funktionen $\varphi\colon D \to \mathbb{K}$ und $\psi\colon D' \to \mathbb{K}$, die in $a$ bzw. $f(a)$ stetig sind, und für die

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \varphi(x)\,(x-a) && \text{für alle } x \in D \\ \text{bzw.} \quad g(y) - g(f(a)) &= \psi(y)\,(y - f(a)) && \text{für alle } y \in D' \end{aligned}$$

sowie $\varphi(a) = f'(a)$ und $\psi(f(a)) = g'(f(a))$ gelten. Setzen wir nun $y = f(x)$, so erhalten wir durch Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite

$$g(f(x)) - g(f(a)) = \psi(f(x))\,(f(x) - f(a)) = \psi(f(x))\,\varphi(x)\,(x-a)$$

für alle $x \in D$. Da $f$ und $\varphi$ in $a$ sowie $\psi$ in $f(a)$ stetig sind, ist nun aber auch $x \mapsto \psi(f(x))\,\varphi(x)$ in $a$ stetig, und somit ergibt sich aus der Richtung „(b) $\Rightarrow$ (a)“ von Lemma 10.5 angewendet auf $g \circ f$, dass diese Funktion in $a$ differenzierbar ist mit $(g \circ f)'(a) = \psi(f(a))\,\varphi(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$. □

**Satz 10.11** (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** *Es seien $D, D' \subset \mathbb{K}$ und $f\colon D \to D'$ eine bijektive Funktion mit Umkehrfunktion $f^{-1}\colon D' \to D$. Ist dann $a \in D$ ein Punkt, so dass $f$ differenzierbar in $a$ ist mit $f'(a) \neq 0$, und so dass $f^{-1}$ stetig in $f(a)$ ist, so ist auch $f^{-1}$ differenzierbar in $f(a)$ mit*

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

*Beweis.* Wie im vorherigen Beweis gibt es nach Lemma 10.5 eine in $a$ stetige Funktion $\varphi\colon D \to \mathbb{K}$ mit $f(x) - f(a) = \varphi(x)\,(x-a)$ für alle $x \in D$. Mit $y := f(x)$ und $b := f(a)$ (also $x = f^{-1}(y)$ und $a = f^{-1}(b)$) können wir dies schreiben als

$$y - b = \varphi(f^{-1}(y))\,(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)) \quad \text{für alle } y \in D'.$$

Da $\varphi \circ f^{-1}$ nach Voraussetzung in $b$ stetig ist und den Wert $\varphi(f^{-1}(b)) = \varphi(a) = f'(a) \neq 0$ hat, ist diese Funktion nach Bemerkung 8.8 auch in einer $\varepsilon$-Umgebung von $b$ ungleich 0. Dort ist dann also

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(b) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}\,(y-b) \quad \text{für alle } y,$$

woraus mit Lemma 10.5 folgt, dass $f^{-1}$ in $b$ differenzierbar ist mit $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}$. □

**Bemerkung 10.12.** Im Fall einer reellen, streng monotonen Funktion $f$ benötigen wir die Voraussetzung der Stetigkeit von $f^{-1}$ in $f(a)$ in Satz 10.11 nicht, da dies nach Satz 8.28 automatisch erfüllt ist. Die Bedingung $f'(a) \neq 0$ ist hingegen auch in diesem Fall nicht überflüssig: Das Beispiel der reellen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ mit $f'(0) = 0$ zeigt, dass eine differenzierbare, streng monotone Funktion in einem Punkt auch Ableitung Null haben kann.

**Beispiel 10.13.** In den Sätzen 10.10 und 10.11 werden nicht alle Ableitungen an derselben Stelle $a$, sondern manche auch an $f(a)$ ausgewertet. Man macht dies „automatisch“ richtig, wenn man wie in den folgenden beiden Beispielen für die Definitions- und Wertemengen der beteiligten Funktionen bestimmte Variablennamen festlegt und darauf achtet, dass Funktionen und ihre Ableitungen immer an der entsprechenden Variablen ausgewertet werden.

(a) Die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = \sqrt{x^2+1}$ ist von der Form $h = g \circ f$ mit $f\colon x \mapsto u = x^2+1$ und $g\colon u \mapsto y = \sqrt{u}$. Ihre Ableitung ergibt sich daher nach der Kettenregel aus Satz 10.10 zu

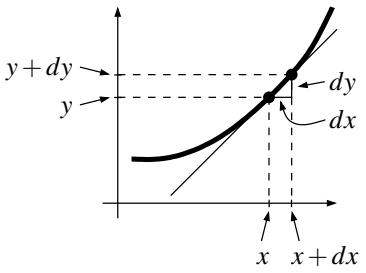
$$h'(x) = g'(u) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

denn $f'(x) = 2x$ und $g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ nach Beispiel 10.9 (c) und 10.4 (b).

(b) Nach Beispiel 10.9 (a) ist die Ableitung der Potenzfunktion $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto y = x^n$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gleich $f'(x) = nx^{n-1}$. Damit ist die Ableitung ihrer Umkehrfunktion, also der $n$-ten Wurzelfunktion $f^{-1}\colon y \mapsto x = \sqrt[n]{y} = y^{1/n}$, nach Satz 10.11 gleich

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}.$$

**Notation 10.14** (Differentialschreibweise)**.** Die Regeln aus den Sätzen 10.10 und 10.11 lassen sich leicht mit Hilfe der sogenannten Differentialschreibweise merken: Man legt hierzu wie in Beispiel 10.13 für eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}$ bestimmte Variablennamen für Definitions- und Wertemenge fest, etwa $y = f(x)$, und schreibt die Ableitung $f'(x)$ dann als formalen Quotienten $\frac{dy}{dx}$, wobei die „Differentiale“ $dx$ und $dy$ wie im Bild rechts für eine (unendlich kleine) Differenz in den $x$- und $y$-Werten stehen sollen.




Wichtig dabei ist, dass dies nur eine formale Schreibweise ist – es gibt nicht wirklich Objekte $dx$ und $dy$, die hier durcheinander geteilt werden. Dennoch nehmen die Sätze 10.10 und 10.11 in dieser Schreibweise eine sehr natürliche Form an, die so aussieht, als könnte man mit diesen „Brüchen“ wirklich rechnen:

(a) (Verkettung) Ist $h = g \circ f$ eine Verkettung und setzen wir $u = f(x)$, $y = g(u)$ und damit $y = h(x)$, so besagt Satz 10.10 einfach $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, so als ob man hier mit $du$ erweitern würde.

(b) (Umkehrfunktion) Ist $y = f(x)$, also $x = f^{-1}(y)$, so würden wir die Ableitung von $f^{-1}$ ja als $\frac{dx}{dy}$ schreiben, und damit sagt Satz 10.11 gerade $\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$, so als ob man hier einfach den Kehrwert des Bruches $\frac{dy}{dx}$ bilden würde.

**Aufgabe 10.15.** Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Man beweise oder widerlege:

(a) Ist $f$ differenzierbar in 0 und $g(0) = 0$, dann ist $f \cdot g$ differenzierbar in 0.

(b) Ist $f$ differenzierbar in 0 und $f(0) = 0$, dann ist $f \cdot g$ differenzierbar in 0.

(c) Sind $f$ und $g$ differenzierbar in 0 mit $f(0) = 0$ und $f(x)g(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann gilt $g(0) \neq 0$.

**Aufgabe 10.16.** Es seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeige, dass für jedes $a \in D$ und $c \in \mathbb{R}$ die folgenden beiden Bedingungen äquivalent sind:

(a) Die Funktion $f$ ist differenzierbar in $a$ mit $f'(a) = c$.

(b) Für zwei beliebige gegen $a$ konvergente Folgen $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ in $D$ mit $x_n \leq a \leq y_n$ und $x_n \neq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

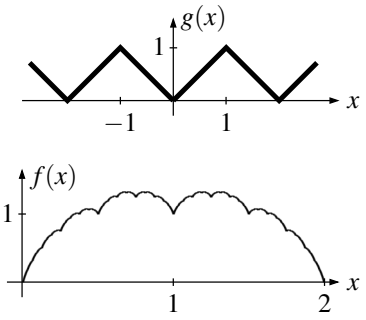
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = c.$$

**Aufgabe 10.17.** Wir betrachten wie im Bild rechts dargestellt die „Zickzackfunktion“ $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die periodisch mit Periodenlänge 2 ist und auf $[-1,1]$ mit der Betragsfunktion übereinstimmt. Zeige, dass dann die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(2^n x)}{2^n}$$

in jedem Punkt stetig und in keinem Punkt differenzierbar ist.

(Hinweis: Für die Differenzierbarkeit ist Aufgabe 10.16 nützlich.)




## 10.B Extremwerte und der Mittelwertsatz

Nachdem wir nun schon einige Ableitungen berechnen können, wollen wir uns als Nächstes anschauen, welche Informationen man über eine differenzierbare Funktion aus ihrer Ableitung erhalten kann. Am wichtigsten ist dabei, dass man mit Hilfe der Ableitung sehr leicht die Stellen finden kann, an denen eine Funktion ihre größten bzw. kleinsten Werte annimmt. Dies zu untersuchen ist natürlich nur für reelle Funktionen sinnvoll, und daher beschränken wir uns im Folgenden auf solche.

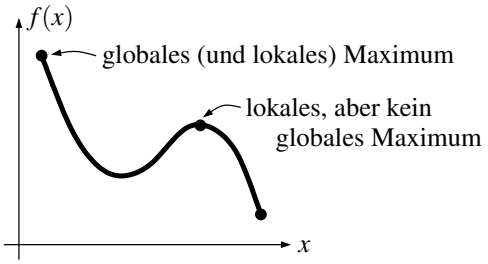
**Definition 10.18** (Extrema)**.** Es seien $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$. Man sagt, ...

(a) $f$ habe in $a$ ein **(globales) Maximum**, wenn $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in D$.

(b) $f$ habe in $a$ ein **lokales Maximum**, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \varepsilon$. Gilt sogar $f(a) > f(x)$ für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \varepsilon$ und $x \neq a$, so nennt man das lokale Maximum **isoliert**.

Analog definiert man globale und lokale (isolierte) **Minima**. Hat $f$ in $a$ ein (globales, lokales, isoliertes) Maximum oder Minimum, so sagt man auch, dass $f$ dort ein (globales, lokales, isoliertes) **Extremum** hat.

**Bemerkung 10.19.** Ein globales Maximum (analog Minimum) bedeutet also gerade, dass $f$ dort den größten aller möglichen Funktionswerte annimmt; ein lokales Maximum dagegen nur, dass $f$ in einer kleinen Umgebung des betrachteten Punktes den größten Wert hat. Offensichtlich ist also jedes globale Maximum auch ein lokales. Das Bild rechts zeigt, dass die Umkehrung nicht notwendig richtig ist.




Wie wir im Bild schon sehen, zeichnet sich ein lokales Extremum, *das nicht am Rand des Definitionsbereichs liegt*, dadurch aus, dass die Ableitung, also die Steigung der Funktion, dort gleich 0 ist:

**Lemma 10.20** (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)**.** *Hat eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in (a,b)$ ein lokales Extremum und ist $f$ dort differenzierbar, so gilt $f'(x) = 0$.*

*Beweis.* Wir beweisen das Lemma für ein Maximum; der Beweis für ein Minimum ist natürlich analog. Nach eventuellem Verkleinern des Definitionsintervalls $(a,b)$ können wir weiterhin ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $f$ in $x$ sogar ein globales Maximum hat. Wähle nun eine Folge $(x_n)_n$ in $(a,b)$ mit $x_n \to x$ und $x_n > x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ – also eine Folge in $D$, die sich dem Punkt $x$ von rechts nähert. Die Ableitung $f'(x)$, die nach Voraussetzung existiert, können wir dann nach dem Folgenkriterium aus Satz 8.12 als

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}$$

berechnen. Nun ist der Zähler dieses Bruches immer kleiner oder gleich 0 (weil $f$ in $x$ ein Maximum hat), und der Nenner immer größer als Null – und damit folgt $f'(x) \leq 0$ nach Satz 5.24 (a). Durch eine Folge, die sich von links dem Punkt $x$ nähert, erhält man genauso $f'(x) \geq 0$, und damit letztendlich $f'(x) = 0$. □

**Bemerkung 10.21.** Hat eine reelle Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenen Intervall in einem Punkt $x \in [a,b]$ ein lokales Extremum, so gibt es also zwei Möglichkeiten:

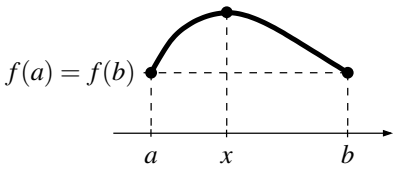
(a) $x \in (a,b)$: Nach Lemma 10.20 muss dann $f'(x) = 0$ sein, falls $f$ dort differenzierbar ist. Beachte aber, dass die Bedingung $f'(x) = 0$ nicht hinreichend dafür ist, dass in $x$ ein lokales Extremum vorliegt – dies zeigt das Beispiel der Funktion $f(x) = x^3$, für die zwar $f'(0) = 0$ gilt, die bei $x = 0$ aber kein Extremum hat. Punkte $x \in (a,b)$, für die $f'(x) = 0$ gilt, die also als lokales Extremum im Inneren des Definitionsintervalls in Frage kommen, werden oft **kritische Punkte** genannt. Wir werden später noch sehen, wie man feststellen kann, ob ein kritischer Punkt wirklich ein lokales Extremum ist oder nicht (siehe Bemerkung 10.25 und Satz 11.18).

(b) $x = a$ oder $x = b$: In diesem Fall muss die Ableitung von $f$ in $x$ nicht notwendig 0 sein (wie z. B. beim globalen Maximum der Funktion in Bemerkung 10.19). Solche Extremwerte am Rand des Definitionsintervalls nennt man **Randextrema**.

Als Nächstes wollen wir mit Hilfe der Ableitung einer reellen Funktion ihre Monotonieeigenschaften untersuchen. Wir beweisen dazu zunächst zwei einfache Resultate, die wir auch noch für spätere Anwendungen benötigen werden.

**Satz 10.22 (Satz von Rolle).** *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $(a,b)$ differenzierbar ist. Gilt dann $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $x \in (a,b)$ mit $f'(x) = 0$.*

*Beweis.* Da $f$ stetig ist, nimmt $f$ nach Satz 8.25 auf dem Intervall $[a,b]$ Maximum und Minimum an. Sind diese beide gleich $f(a) = f(b)$, so ist $f$ offensichtlich konstant und wir können ein beliebiges $x \in (a,b)$ wählen. Andernfalls können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass das Maximum von $f$ größer als $f(a) = f(b)$ ist, also im Inneren des Definitionsintervalls angenommen wird. Dort gilt dann aber $f'(x) = 0$ nach Lemma 10.20. □

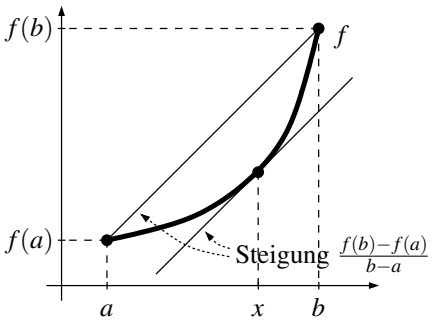



**Satz 10.23 (Mittelwertsatz).**

(a) *(1. Version) Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf dem offenen Intervall $(a,b)$ differenzierbar ist. Dann gibt es ein $x \in (a,b)$ mit $f(b) - f(a) = f'(x)\,(b-a)$, also*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

*Mit anderen Worten wird die Steigung der Geraden zwischen $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ wie im Bild rechts an einer Stelle $x \in (a,b)$ als Tangentensteigung angenommen.*




(b) *(2. Version) Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige, auf $(a,b)$ differenzierbare Funktionen. Dann gibt es ein $x \in (a,b)$ mit*

$$f'(x) \cdot (g(b) - g(a)) = g'(x) \cdot (f(b) - f(a)).$$

*Beweis.* Es genügt, die allgemeinere Aussage (b) zu zeigen, da sich Teil (a) sofort daraus ergibt, wenn man $g(x) = x$ setzt. Wir betrachten dazu die Funktion

$$h\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto (f(x) - f(a))\,(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))\,(f(b) - f(a)).$$

Mit $f$ und $g$ ist auch $h$ auf $[a,b]$ stetig und auf $(a,b)$ differenzierbar; außerdem ist $h(a) = h(b) = 0$. Nach dem Satz 10.22 von Rolle gibt es also ein $x \in (a,b)$ mit $h'(x) = 0$, und wegen

$$h'(x) = f'(x)\,(g(b) - g(a)) - g'(x)\,(f(b) - f(a))$$

ergibt sich daraus genau die Behauptung. □

Der Mittelwertsatz wirkt auf den ersten Blick etwas unscheinbar, ist in der Tat aber sehr wichtig, da er es erlaubt, einen Differenzenquotienten (und damit letztlich die Differenz zweier Funktionswerte) durch einen Differentialquotienten (also eine Ableitung) auszudrücken. Wie bereits angekündigt ist ein erstes Beispiel hierfür, dass man die Monotonie von Funktionen mit Hilfe von Ableitungen untersuchen kann.

**Folgerung 10.24** (Monotonie differenzierbarer Funktionen)**.** *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, auf $(a,b)$ differenzierbare Funktion. Gilt dann für alle $x \in (a,b)\ldots$*

(a) $f'(x) \geq 0$ *(bzw. $f'(x) > 0$), so ist $f$ monoton (bzw. streng monoton) wachsend.*

(b) $f'(x) \leq 0$ *(bzw. $f'(x) < 0$), so ist $f$ monoton (bzw. streng monoton) fallend.*

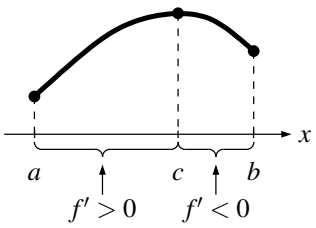
(c) $f'(x) = 0$*, so ist $f$ konstant.*

*Beweis.* Es seien $x, y \in [a,b]$ mit $x < y$. Nach dem Mittelwertsatz 10.23 (a) angewendet auf das Intervall $[x,y]$ gibt es dann ein $c \in (x,y) \subset (a,b)$ mit $f(y) - f(x) = f'(c)\,(y-x)$. Im Fall (a) ist nun $f'(c) \geq 0$ bzw. $f'(c) > 0$, und damit $f(y) - f(x) \geq 0$ bzw. $f(y) - f(x) > 0$, d. h. $f$ ist monoton (bzw. streng monoton) wachsend. Teil (b) ergibt sich natürlich genauso, und (c) folgt aus der Kombination der beiden Teile. □

**Bemerkung 10.25** (Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema)**.** Mit Folgerung 10.24 ergibt sich ein einfaches *hinreichendes* Kriterium für ein (lokales) Extremum: Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $(a,b)$ differenzierbar, und gibt es ein $c \in (a,b)$ mit

$$f'(x) > 0 \text{ für alle } x < c \text{ und } f'(x) < 0 \text{ für alle } x > c$$

(d. h. hat $f'$ einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ in $c$), so ist $f$ nach Folgerung 10.24 streng monoton wachsend auf $[a,c]$ und streng monoton fallend auf $[c,b]$, d. h. $f$ hat ein isoliertes lokales Maximum in $c$. Eine analoge Aussage gilt natürlich auch für ein Minimum.




23

Wir sehen also, dass man mit Hilfe der Ableitung gut die Extrema von differenzierbaren Funktionen finden kann. Um dies in der Praxis auch anwenden zu können, müssen wir aber auch noch in der Lage sein, von komplizierteren Funktionen – z. B. den „speziellen Funktionen“ aus Kapitel 9 – die Ableitung zu berechnen oder überhaupt erst einmal ihre Differenzierbarkeit nachzuweisen. Da diese Funktionen oftmals über Potenzreihen definiert sind, müssen wir uns also mit der Differenzierbarkeit solcher Potenzreihen (oder allgemeiner von Funktionenfolgen) beschäftigen. Entscheidend hierfür ist die folgende Aussage, die ebenfalls zentral den Mittelwertsatz verwendet.

**Satz 10.26** (Vertauschbarkeit von Differentiation und Grenzwertbildung)**.** *Es seien $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $(f_n)_n$ mit $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ eine Folge differenzierbarer Funktionen. Wir setzen voraus, dass*

- *$(f_n)_n$ punktweise gegen eine Grenzfunktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert, und*
- *die Ableitungen $f_n'$ stetig sind und gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $g\colon D \to \mathbb{R}$ konvergieren.*

*Dann ist $f$ differenzierbar mit $f' = g$ (d. h. „Differentiation und Grenzwertbildung können vertauscht werden“; es ist $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$).*

*Beweis.* Für alle $a \in D$ zeigen wir direkt mit der Grenzwertdefinition, dass $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = g(a)$. Es sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $g$ nach Satz 8.38 als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen stetig

ist, gibt es zunächst ein $\delta > 0$, so dass

$$|g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x-a| < \delta. \tag{1}$$

Außerdem konvergiert $(f_n')_n$ nach Voraussetzung gleichmäßig gegen $g$, d. h. es gibt auch ein (von $x$ unabhängiges) $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n'(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für alle } x \in D \text{ und } n \geq n_0. \tag{2}$$

Es seien nun $x \in D$ mit $x \neq a$ und $|x-a| < \delta$ sowie $n \geq n_0$ beliebig. Nach dem Mittelwertsatz 10.23 (a) gibt es dann ein $c$ zwischen $a$ und $x$ (für das also insbesondere auch $|c-a| < |x-a| < \delta$ gilt) mit

$$\frac{f_n(x) - f_n(a)}{x-a} = f_n'(c). \tag{3}$$

Setzen wir dies nun alles zusammen, so erhalten wir mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}\left|\frac{f_n(x) - f_n(a)}{x-a} - g(a)\right| &\overset{(3)}{=} |f_n'(c) - g(a)| = |f_n'(c) - g(c) + g(c) - g(a)| \\ &\leq |f_n'(c) - g(c)| + |g(c) - g(a)| \\ &\overset{(1),(2)}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3},\end{aligned}$$

wobei wir (1) und (2) für den Punkt $c$ angewendet haben. Nehmen wir hier nun den Grenzwert für $n \to \infty$, so erhalten wir daraus mit Satz 5.24 (a) für alle $x$ mit $|x-a| < \delta$

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - g(a)\right| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, bedeutet dies aber genau, dass $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = g(a)$. □

Auch wenn der Beweis dieses Satzes recht kompliziert war, ist die Aussage doch sehr einfach anzuwenden. So ergibt sich z. B. in dem für uns wichtigsten Fall von Potenzreihen:

**Folgerung 10.27** (Differenzierbarkeit von Potenzreihen)**.** *Es sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $r$. Dann ist $f$ im Konvergenzgebiet $(-r,r)$ differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$, d. h. „Potenzreihen können gliedweise differenziert werden“.*

*Beweis.* Es sei $c \in (-r,r)$; wir wollen zeigen, dass $f$ in $c$ differenzierbar ist mit Ableitung $f'(c) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k c^{k-1}$. Wähle dazu ein $R$ mit $|c| < R < r$. Dann ist die Folge der Partialsummen $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ nach Satz 8.36 auf $(-R,R)$ gleichmäßig konvergent gegen $f$. Die Ableitung dieser Partialsummenfunktionen sind nach Beispiel 10.9 (c) die stetigen Funktionen $f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$. Da die Reihe $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ nach Aufgabe 7.32 den gleichen Konvergenzradius $r$ wie $f$ hat, konvergieren genauso auch die $f_n'$ auf $(-R,R)$ gleichmäßig gegen $g$.

Damit haben wir alle Voraussetzungen überprüft, um Satz 10.26 auf die Folge $(f_n)_n$ auf $(-R,R)$ anwenden zu können. Der Satz liefert uns also $f' = g$ auf $(-R,R)$, und damit insbesondere auch im Punkt $c$. □

Mit Folgerung 10.27 (und unseren vorherigen Resultaten) können wir jetzt endlich von „praktisch allen“ Funktionen die Ableitungen berechnen:

**Beispiel 10.28** (Ableitungen spezieller Funktionen)**.**

(a) Die Ableitung der Exponentialfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ergibt sich durch gliedweises Differenzieren zu

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \mathrm{e}^x;$$

die Exponentialfunktion ist also gleich ihrer eigenen Ableitung.

(b) Die Ableitung der Sinusfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ ist analog

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \cdot \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos x.$$

Genauso berechnet man $\cos'(x) = -\sin x$. Aus der Quotientenregel von Satz 10.8 (c) ergibt sich damit

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

(c) Die Ableitungen der Umkehrfunktionen zu (a) und (b) folgen nun sofort aus Satz 10.11: Mit $f\colon x \mapsto y = \mathrm{e}^x$, also $f'(x) = \mathrm{e}^x$ und $f^{-1}(y) = \log y$ ist z. B.

$$\log'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{y}.$$

Für $f\colon x \mapsto y = \sin x$, also $f'(x) = \cos x$ und $f^{-1}(y) = \arcsin y$ ist analog

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

wobei wir in $(*)$ die Gleichung aus Satz 9.14 (b) benutzen (sowie dass der Arkussinus streng monoton wachsend ist, so dass wir hier das positive Vorzeichen der Wurzel nehmen müssen). Genauso zeigt man

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad \text{und} \qquad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

(d) Die Ableitung der Potenzfunktion $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^a = \mathrm{e}^{a \log x}$ (mit festem Exponenten $a \in \mathbb{R}$) ist nach der Kettenregel aus Satz 10.10

$$f'(x) = \mathrm{e}^{a \log x} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a x^{a-1},$$

das Ergebnis ist also für alle $a \in \mathbb{R}$ das gleiche wie schon für die speziellen Exponenten in Beispiel 10.9 (a) und 10.13 (b). Ebenfalls nach der Kettenregel ist die Ableitung der Potenzfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x = \mathrm{e}^{x \log a}$ mit fester Basis $a \in \mathbb{R}_{>0}$ dagegen

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x \log a} \cdot \log a = a^x \cdot \log a.$$

**Bemerkung 10.29.**

(a) Man kann zeigen, dass die Aussage von Satz 10.26 (und damit auch von Folgerung 10.27) genauso auch im komplexen Fall gilt. Da wir in unserem Beweis dieser Aussagen den Mittelwertsatz verwendet haben (der nur in $\mathbb{R}$ gilt), benötigt man hierfür jedoch andere Argumente. Wir werden den komplexen Fall im Folgenden in dieser Vorlesung aber nicht benötigen – die Untersuchung komplex differenzierbarer Funktionen bzw. Potenzreihen ist der wesentliche Inhalt der Vorlesung „Einführung in die Funktionentheorie“, die ihr im zweiten Studienjahr hören könnt.

(b) Ohne die Voraussetzung der (gleichmäßigen) Konvergenz der Folge der Ableitungen in Satz 10.26 wäre die Aussage im Allgemeinen falsch: Betrachten wir z. B. die Folge der Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{n} \sin(nx)$, so gilt zwar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x$, d. h. $(f_n)_n$ konvergiert punktweise (und in der Tat auch gleichmäßig) gegen die Nullfunktion, die ja Ableitung 0 hat – aber die Folge der Ableitungen $f_n'(x) = \cos(nx)$ konvergiert für $n \to \infty$ noch nicht einmal punktweise! Hier können Differentiation und Grenzwertbildung also nicht vertauscht werden.

**Aufgabe 10.30.** Bestimme alle lokalen und globalen Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{1+2|x|}$.

**Aufgabe 10.31.** Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Man zeige:

(a) Ist $f'(a) > 0$ und $f'(b) < 0$, so gibt es ein $x \in (a,b)$ mit $f'(x) = 0$.

(b) Für alle $c$ zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f'(x) = c$. (Ableitungen erfüllen also den Zwischenwertsatz, obwohl sie nach Aufgabe 10.33 (d) nicht stetig sein müssen.)

**Aufgabe 10.32.** Untersuche die Funktionenfolge $(f_n)_n$ mit $f_n\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{n+1}\mathrm{e}^{-nx}$ auf gleichmäßige Konvergenz.

**Aufgabe 10.33.** Finde $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so dass $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x^m \sin \frac{1}{x^n} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ ...

(a) unstetig ist.

(b) stetig, aber nicht differenzierbar ist.

(c) differenzierbar mit unbeschränkter Ableitung ist.

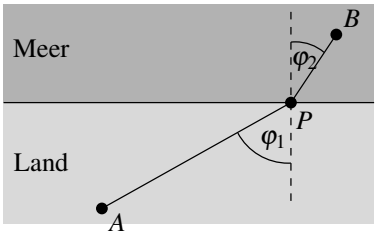
(d) differenzierbar mit beschränkter, aber unstetiger Ableitung ist.

(e) differenzierbar mit stetiger Ableitung ist.

Skizziere für kleine Werte von $m$ und $n$ auch die Graphen dieser Funktionen!

**Aufgabe 10.34.** Ein Rettungsschwimmer, der sich an Land am Punkt $A$ befindet, möchte eine im Meer ertrinkende Person am Punkt $B$ retten. Er läuft dazu zunächst entlang einer geraden Linie zu einem Punkt $P$ am Ufer, und schwimmt von dort wieder entlang einer geraden Linie nach $B$. Wenn er mit der Geschwindigkeit $v_1$ laufen und mit der Geschwindigkeit $v_2$ schwimmen kann, wo muss er dann den Punkt $P$ wählen, damit er möglichst schnell bei $B$ ist? Zeige, dass diese minimale Zeit genau dort erreicht wird, wo

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

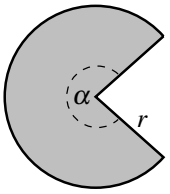



Für die Physiker und physikalisch Interessierten unter euch: Dies ist übrigens genau das Brechungsgesetz für Licht – auch Licht bewegt sich so, dass es schnellstmöglich ans Ziel kommt!

**Aufgabe 10.35.** Wir betrachten wie im Bild unten rechts Kreissektoren mit variablem Öffnungswinkel $\alpha \in (0, 2\pi)$ und Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$.

Welcher solche Kreissektor hat bei vorgegebenem Flächeninhalt $F$ den kleinstmöglichen Umfang $U$? Bestimme für diesen Fall $r$, $\alpha$ und $U$ in Abhängigkeit von $F$.

(Der Umfang beinhaltet dabei auch die beiden Geradenstücke zum Mittelpunkt. Die Formeln für den Flächeninhalt und Umfang eines Kreissektors können als bekannt vorausgesetzt werden.)




**Aufgabe 10.36.** Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $D$ definierte Funktion. Wir setzen voraus, dass es $b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $|f(x) - f(y)| \leq c\,|x-y|^b$ für alle $x, y \in D$ mit $x \neq y$. Man zeige:

(a) $f$ ist gleichmäßig stetig.

(b) Ist $b > 1$, so ist $f$ konstant.

**Aufgabe 10.37.** Zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$;

(b) $\left|\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-y^2}\right| \leq \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}} \cdot |x-y|$.

**Aufgabe 10.38.** Es sei $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und beschränkt. Zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass es eine Folge $(x_n)_n$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) = 0$.

# 11. Anwendungen der Differentialrechnung

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, wie wir von „nahezu allen“ Funktionen ihre Ableitung berechnen können und welche elementaren Eigenschaften der Funktion man daran ablesen kann. In diesem Kapitel wollen wir nun zwei weitere Anwendungen vorstellen, die sich aus der Differentialrechnung ergeben. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf reelle Funktionen.

## 11.A Die Regel von de l'Hôpital

Als Erstes wollen wir eine einfache Regel vorstellen, mit der man oft Grenzwerte berechnen kann, die anders nur schwer zu bestimmen wären: nämlich Grenzwerte der Form $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, bei denen die normalen Grenzwertsätze aus Satz 8.14 bzw. Bemerkung 8.20 nicht anwendbar sind, weil sich die unbestimmten Quotienten „$\frac{0}{0}$“ oder „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$“ ergeben würden.

Es gibt viele Varianten dieser Regel, je nachdem, bei welchen der im folgenden Satz vorkommenden Grenzwerten auch uneigentliche Grenzwerte $\pm\infty$ zugelassen sind. In der Praxis treten alle diese Varianten auch oft auf. Um die Beweisidee des Satzes klar herauszustellen, beschränken wir uns hier aber zunächst (wie auch bei unseren bisherigen Beweisen von Rechenregeln für Grenzwerte) auf den Fall, in dem keine uneigentlichen Grenzwerte vorkommen, und geben die möglichen Verallgemeinerungen dann in der anschließenden Bemerkung 11.2 an.

**Satz 11.1 (Regel von de l'Hôpital**, Grundversion)**.** *Es seien $f,g\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $g'(x)\neq 0$ für alle $x\in(a,b)$. Wir nehmen ferner an, dass*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

*(so dass der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ also formal von der unbestimmten Form „$\frac{0}{0}$“ ist). Existiert dann der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ in $\mathbb{R}$, so auch $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*Beweis.* Wegen $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ können wir $f$ und $g$ durch $f(a) := g(a) := 0$ stetig nach $[a,b)$ fortsetzen. Beachte außerdem, dass $g$ auf $(a,b)$ nirgends gleich 0 sein kann, denn sonst gäbe es im Widerspruch zur Voraussetzung nach dem Satz 10.22 von Rolle zwischen $a$ und dieser Nullstelle von $g$ eine Nullstelle von $g'$.

Wir zeigen nun den Grenzwert $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ mit dem Folgenkriterium. Es sei also $(x_n)_n$ eine Folge in $(a,b)$ mit $x_n\to a$. Nach dem Mittelwertsatz 10.23 (b) gibt es dann für alle $n\in\mathbb{N}$ ein $c_n\in(a,x_n)$ mit

$$f'(c_n)\cdot(g(x_n)-g(a)) = g'(c_n)\cdot(f(x_n)-f(a)), \quad \text{also} \quad \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$

wegen $f(a)=g(a)=0$ und der Nullstellenfreiheit von $g$ und $g'$. Nun konvergiert wegen $a<c_n<x_n$ mit $(x_n)_n$ aber auch $(c_n)_n$ gegen $a$, und damit ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

was die Behauptung mit dem Folgenkriterium zeigt. □

**Bemerkung 11.2 (Regel von de l'Hôpital**, Varianten)**.** Der Satz 11.1 von de l'Hôpital hat die folgenden Varianten, die wir im Folgenden ebenfalls verwenden werden. Die Beweise sollen hier nicht gegeben werden – sie lassen sich mit analogen, allerdings oft technisch etwas aufwendigeren Methoden führen.

(a) Die Regel gilt auch, wenn $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ beide im uneigentlichen Sinne gleich $\pm\infty$ sind, wir also beim Grenzwert $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ den unbestimmten Ausdruck „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$“ haben.

(b) Statt einer Annäherung von rechts an die Grenze der Definitionsmenge (in unserem Fall also an den Punkt $a$ am Rand des Intervalls $(a,b)$) ist natürlich auch eine Annäherung von links oder eine beidseitige Annäherung möglich. Dabei sind die Fälle $a=-\infty$ und $b=\infty$ zugelassen.

(c) Die Regel gilt auch, wenn der Grenzwert von $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nur im uneigentlichen Sinne existiert, also gleich $\pm\infty$ ist.

Existiert der Grenzwert von $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ dagegen auch im uneigentlichen Sinne nicht, so macht die Regel von de l'Hôpital keine Aussage – wir können daraus dann also nicht schließen, dass auch der ursprüngliche Grenzwert von $\frac{f(x)}{g(x)}$ nicht existiert!

**Beispiel 11.3.**

(a) Für jedes $n\in\mathbb{N}_{>0}$ ist der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^n}$ von der Form „$\frac{\infty}{\infty}$“. Um ihn mit der Regel von de l'Hôpital (mit $f(x)=\log x$ und $g(x)=x^n$) zu bestimmen, differenzieren wir also Zähler und Nenner separat und erhalten den Bruch $\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1/x}{nx^{n-1}}$. Da der Nenner dieses Bruchs für $x>0$ nirgends gleich 0 ist und der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{nx^n}=0$$

existiert, folgt mit Satz 11.1 (bzw. der Verallgemeinerung aus Bemerkung 11.2) also auch

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^n}\ \overset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}}{\underset{\downarrow}{=}}\ \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{nx^{n-1}}=0. \qquad (*)$$

Analog zu Bemerkung 5.15 zur Anwendung von Grenzwertsätzen schreibt man dabei die Anwendung der Regel von de l'Hôpital oftmals gleich wie in der oben in $(*)$ mit „$\frac{\infty}{\infty}$“ bezeichneten Gleichung, und überprüft erst nachträglich, dass der neu entstandene Bruch einen (evtl. uneigentlichen) Grenzwert hat und sein Nenner stets ungleich 0 ist.

(b) Analog erhält man

$$\lim_{x\to 0}x^n\log x=\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^{-n}}\ \overset{\text{„}\frac{-\infty}{\infty}\text{“}}{\underset{\downarrow}{=}}\ \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-nx^{-n-1}}=\lim_{x\to 0}-\frac{x^n}{n}=0,$$

da der nach dem Differenzieren entstandene Nenner $-nx^{-n-1}$ für $x>0$ ungleich 0 ist. Zusammen mit (a) sehen wir in diesem Sinne also, dass „der Logarithmus für $x\to 0$ oder $x\to\infty$ schwächer ist als jede Potenz“ – in den beiden betrachteten Grenzwerten setzt sich jeweils die Funktion $x^n$ durch. Dies ist natürlich ganz analog zu der Aussage von Bemerkung 9.3 (a), dass die Exponentialfunktion schneller als jede Potenz wächst. Beachte auch, dass wir in der zweiten Rechnung oben gesehen haben, dass es sich auch bei einem ursprünglichen Ausdruck der Form „$0\cdot(\pm\infty)$“ lohnen kann, ihn künstlich als Bruch umzuschreiben, um dann die Regel von de l'Hôpital anwenden zu können.

(c) Falls sich nach einmaliger Anwendung von Satz 11.1 immer noch ein Bruch der Form „$\frac{0}{0}$“ oder „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$“ ergibt, kann man den Satz natürlich auch mehrfach hintereinander anwenden, wie z. B. in dem Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}\ \overset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}}{\underset{\downarrow}{=}}\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}\ \overset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}}{\underset{\downarrow}{=}}\ \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

(wegen $e^x\neq 0$ für alle $x$), den wir aber natürlich auch schon aus Satz 9.1 (c) kannten.

**Bemerkung 11.4** (Die Regel von de l'Hôpital für Folgengrenzwerte)**.** Manchmal kann man auch den Grenzwert einer reellen Folge $(a_n)_n$ mit der Regel von de l'Hôpital berechnen. Kann man die Folge nämlich – betrachtet als Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ – zu einer Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fortsetzen, also auch für reelles $n$ betrachten, und existiert dann der Grenzwert für *reelle* $n \to \infty$, so existiert er dann natürlich auch für *natürliche* $n \to \infty$, und hat denselben Wert. Für die Berechnung des Grenzwerts für reelle $n$ haben wir dann aber wieder die Regel von de l'Hôpital zur Verfügung.

Betrachten wir als Beispiel hierfür einmal für gegebenes $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, den wir in Aufgabe 7.34 mit viel Aufwand zu $e^x$ berechnet haben. Da wir Potenzen inzwischen auch für reelle $n$ definiert haben, können wir den Ausdruck $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ nun aber auch als Funktion einer reellen Variablen $n$ auffassen und seinen Grenzwert für $n \to \infty$ mit der Regel von de l'Hôpital berechnen: Es ist

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} \exp\left(n \log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) && \text{(Definition 9.7)} \\
&= \exp\left(\lim_{n\to\infty} n \log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) && \text{(Stetigkeit von exp, Satz 8.16)} \\
&= \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{x}{n})}{n^{-1}}\right) \\
&= \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{-x/n^2}{1+\frac{x}{n}} \cdot \frac{1}{-1/n^2}\right) && \left(\text{„}\tfrac{0}{0}\text{“, Differenzieren nach } n\text{, beachte } -\tfrac{1}{n^2} \neq 0\right) \\
&= \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+\frac{x}{n}}\right) \\
&= \exp x.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 11.5.** Berechne die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\log(\tan(2x))}{\log(\tan(3x))}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\log x}\right)$ (c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$

**Aufgabe 11.6.** Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $(a,b)$ differenzierbar, so dass $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ existiert. Zeige, dass $f$ dann auch in $a$ differenzierbar ist und $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$ gilt.

## 11.B Taylor-Entwicklung

Als weitere Anwendung der Differentialrechnung wollen wir nun unsere ursprüngliche Idee der linearen Approximation einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ in einem Punkt $a \in D$ erweitern und uns fragen, ob wir vielleicht noch bessere Näherungen bekommen können, wenn wir als Näherungsfunktion statt einer *linearen* Funktion eine Polynomfunktion von höherem Grad verwenden. Betrachten wir z. B. statt unserer bisherigen Näherung vom Anfang von Kapitel 10

$$f(x) \approx c_0 + c_1 (x-a)$$

mit $c_0 = f(a)$ und $c_1 = f'(a)$ den Ansatz

$$f(x) \approx c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2,$$

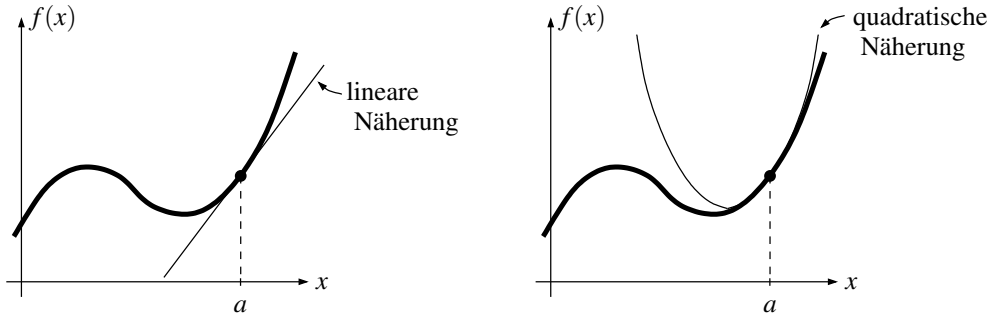
bei dem wir auch einen quadratischen Term zulassen (den wir proportional zu $(x-a)^2$ statt zu $x^2$ wählen, damit er am Näherungspunkt $a$ selbst verschwindet), so können wir wie im Bild unten erwarten, dass wir eine viel bessere Näherung erhalten, da die Näherungsfunktion ja jetzt eine quadratische Parabel ist und damit auch ein wenig die Krümmung von $f$ an der Stelle $a$ nachbilden kann. Natürlich können wir dies dann auch noch weiter treiben und Polynomfunktionen höheren Grades zulassen: Wenn wir für ein $n \in \mathbb{N}$ einen Ansatz

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$$

machen und dabei die Koeffizienten $c_k$ geschickt wählen, sollte die Näherung mit wachsendem $n$ immer besser werden. Wir können sogar versuchen, den Grenzübergang $n \to \infty$ zu machen und uns fragen, ob wir mit einer Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

im Grenzfall vielleicht nicht nur eine ganz besonders gute Näherung, sondern sogar *genau* die Funktion $f$ zurück erhalten, also ob wir $f$ letztlich als Potenzreihe in $x-a$ schreiben können – schließlich haben wir ja auch wie z. B. die Exponentialfunktion schon einige Funktionen gesehen, die wir von vornherein bereits als Potenzreihe geschrieben haben.




Um diese Idee zu verfolgen, wollen wir nun als Erstes untersuchen, welche Koeffizienten $c_k$ wir in den obigen Polynomen bzw. Reihen wählen sollten. Da wir bereits wissen, dass der lineare Koeffizient $c_1$ gerade die Ableitung $f'(a)$ ist, sollte es nicht überraschen, dass wir für die höheren Koeffizienten $c_k$ mit $k > 1$ höhere Ableitungen benötigen. Diese wollen wir daher jetzt einführen.

**Definition 11.7** (Höhere Ableitungen)**.** Es seien $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Die Funktion $f$ heißt **$n$-mal differenzierbar** auf $D$, wenn alle fortgesetzten Ableitungen $f^{(0)} := f$, $f^{(1)} := f'$, $f^{(2)} := f'' := (f')'$, …, $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ existieren.

(b) Die Funktion $f$ heißt **$n$-mal stetig differenzierbar** auf $D$, wenn zusätzlich $f^{(n)}$ stetig ist.

(c) Existieren die höheren Ableitungen $f^{(n)}$ für alle $n$, so heißt $f$ **unendlich oft differenzierbar** auf $D$.

Die Menge aller $n$-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $D$ wird mit $C^n(D)$ bezeichnet (der Buchstabe $C$ kommt vom englischen Wort „continuous“ für „stetig“). Inbesondere ist also $C^0(D)$ die Menge aller stetigen und $C^\infty(D)$ die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf $D$.

Wie diese höheren Ableitungen die oben betrachteten Koeffizienten $c_k$ bestimmen, sieht man am besten wie im folgenden Satz am Beispiel von Potenzreihen, die ja bereits in einer derartigen Form geschrieben sind. (Beachte, dass dies auch noch einmal die Aussage aus Aufgabe 8.43 zeigt, dass die Koeffizienten einer Potenzreihe mit Konvergenzradius ungleich 0 durch die durch sie definierte Funktion bereits eindeutig bestimmt sind.)

**Satz 11.8** (**Taylor-Formel für Potenzreihen**)**.** *Es seien $a \in \mathbb{R}$ und $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ eine reelle Potenzreihe in $x-a$ mit Konvergenzradius $r > 0$, so dass wir $f$ also als Funktion $f\colon (a-r, a+r) \to \mathbb{R}$ auffassen können.*

*Dann ist $f$ auf $(a-r, a+r)$ unendlich oft differenzierbar, und für die Koeffizienten $c_k$ der Potenzreihe gilt*

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

*Mit anderen Worten ist also*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

*für alle $x \in (a-r, a+r)$.*

*Beweis.* Nach Folgerung 10.27 ist jede Potenzreihe in ihrem Konvergenzgebiet differenzierbar, und ihre Ableitung ist wieder eine Potenzreihe (mit demselben Konvergenzradius), die sich durch gliedweises Differenzieren berechnen lässt. Insbesondere ist $f$ damit also unendlich oft differenzierbar, und die höheren Ableitungen sind

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\, c_k\, (x-a)^{k-n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Setzen wir hier nun $x = a$ ein, so ist $(x-a)^{k-n}$ gleich 0 für $k > n$ und 1 für $k = n$. In der obigen Summe bleibt dann also nur der Term für $k = n$ übrig, und wir erhalten wie behauptet

$$f^{(n)}(a) = n(n-1)\cdots(n-n+1)\, c_n = n!\, c_n. \qquad \square$$

24

**Beispiel 11.9.** Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und möchten die 10. Ableitung $f^{(10)}(0)$ im Nullpunkt berechnen. Natürlich könnte man jetzt mit Hilfe der Regeln von Satz 10.8 alle fortgesetzten Ableitungen von $f$ berechnen und schließlich in dem so gefundenen Ausdruck für $f^{(10)}$ den Wert $x = 0$ einsetzen – dies wäre aber sehr zeitaufwendig. Viel schneller geht es mit der Taylor-Formel: Nach der geometrischen Reihe können wir $f$ ja für $|x| < 1$ gemäß

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} \pm \cdots$$

als Potenzreihe in $x$ schreiben. Satz 11.8 mit $a = 0$ und $k = 10$ sagt uns also für den Koeffizienten von $x^{10}$ in dieser Reihe, der ja offensichtlich gleich $-1$ ist, dass

$$-1 = \frac{f^{(10)}(0)}{10!}, \qquad \text{und damit} \qquad f^{(10)}(0) = -10!.$$

Wir sehen an diesem Beispiel schon, dass die Taylor-Formel für Potenzreihen auch dann nützlich ist, wenn die Funktion $f$ ursprünglich gar nicht als Potenzreihe gegeben ist, sondern wir nur wissen, dass es eine solche Darstellung als Potenzreihe gibt. In der Tat benutzt die Taylor-Formel in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \qquad (*)$$

ja auch gar nicht mehr die Koeffizienten der ursprünglichen Reihe, sondern nur noch die Tatsache, dass sich $f$ überhaupt irgendwie als Potenzreihe schreiben lässt. Gilt die Formel $(*)$ also vielleicht sogar für jede unendlich oft differenzierbare Funktion $f$?

Leider ist (wie wir gleich sehen werden) die Antwort auf diese Frage nein. Für viele in der Praxis vorkommende Funktionen ist die Antwort allerdings auch ja – und daher lohnt es sich, die Sache doch noch weiter zu verfolgen. Wir geben der rechten Seite von $(*)$, bzw. den Partialsummen dieser Reihe, daher zunächst einen Namen.

**Definition 11.10** (Taylor-Polynom und Taylor-Reihe)**.** Es seien $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sowie $a \in D$ ein fest gewählter Punkt.

(a) Die Funktion $f$ sei $n$-mal differenzierbar für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt die Polynomfunktion

$$T^n_{f,a}\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

das **$n$-te Taylor-Polynom** von $f$ mit Entwicklungspunkt $a$; offensichtlich ist $\deg T^n_{f,a} \leq n$.

(b) Ist $f$ unendlich oft differenzierbar, so heißt die Potenzreihe in $x-a$

$$T_{f,a}(x) := \lim_{n\to\infty} T^n_{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

die **Taylor-Reihe** von $f$ mit Entwicklungspunkt $a$. Beachte, dass zunächst nicht klar ist, ob diese Potenzreihe einen Konvergenzradius größer als 0 hat, also ob sie überhaupt in irgendeinem Punkt $x$ (außer $a$) konvergiert – und dass, selbst wenn sie konvergiert, nicht klar ist, ob sie als Funktion im Konvergenzgebiet mit $f$ übereinstimmt.

**Beispiel 11.11.**

(a) Lässt sich eine Funktion $f$ auf einem Intervall $(a-r,a+r)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ als Potenzreihe in $x-a$ (mit Konvergenzradius mindestens $r$) schreiben, so besagt Satz 11.8 gerade, dass die Taylor-Reihe $T_{f,a}(x)$ genau diese Reihe ist, also dass $T_{f,a}(x) = f(x)$ für alle $x \in (a-r,a+r)$ gilt.

(b) Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log x$$

und bestimmen ihre Taylor-Reihe mit Entwicklungspunkt $a = 1$. Die Ableitungen von $f$ sind einfach zu berechnen: Wegen $f'(x) = x^{-1}$ ist

$$f^{(k)}(x) = (-1)\cdot(-2)\cdots(-(k-1))\cdot x^{-k} = (-1)^{k-1}\cdot(k-1)!\cdot x^{-k}$$

und damit $f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}\cdot(k-1)!$ für alle $k > 0$. Die Taylor-Reihe von $f$ mit Entwicklungspunkt 1 ist damit

$$\begin{aligned} T_{f,1}(x) = \log 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!}{k!}(x-1)^k &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k \\ &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \mp \cdots. \end{aligned}$$

Wie in Beispiel 7.30 (a) hat diese Potenzreihe in $x-1$ den Konvergenzradius 1, sie konvergiert also für $|x-1| < 1$, d. h. für $x \in (0,2)$, und divergiert für $|x-1| > 1$, also für $x < 0$ oder $x > 2$. Damit ist schon einmal klar, dass die Taylor-Reihe $T_{f,1}(x)$ für $x > 2$ sicher *nicht* die ursprüngliche Funktion $f(x) = \log x$ darstellt, da sie dort ja nicht einmal konvergiert. Aber auch für $x \in (0,2)$ ist noch nicht klar, dass wirklich $T_{f,1}(x) = f(x)$ gilt: Das folgende Beispiel zeigt, dass eine Taylor-Reihe auch im Fall der Konvergenz nicht mit der ursprünglichen Funktion übereinstimmen muss.

**Aufgabe 11.12.** Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass $f$ unendlich oft differenzierbar ist, und dass die Taylor-Reihe $T_{f,0}$ die Nullfunktion ist (also insbesondere zwar überall konvergiert, aber außer im Nullpunkt nirgends mit $f$ übereinstimmt). Skizziere auch den Graphen von $f$.

(Hinweis: Man zeige mit vollständiger Induktion, dass alle Ableitungen von $f$ in 0 gleich 0 und für $x \neq 0$ von der Form $\frac{p(x)}{q(x)}\exp(-\frac{1}{x^2})$ für gewisse Polynomfunktionen $p$ und $q$ sind.)

Wir benötigen also ein Kriterium, mit dem wir eine Funktion $f$ mit ihren Taylor-Polynomen $T^n_{f,a}$ bzw. ihrer Taylor-Reihe $T_{f,a}$ vergleichen können, so dass wir letztlich nachprüfen können, ob eine (konvergierende) Taylor-Reihe auch wirklich gleich der ursprünglichen Funktion ist. Dies liefert der folgende Satz:

**Satz 11.13 (Taylor-Formel).** *Es seien $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion. Ferner seien $a, x \in D$. Dann gibt es ein $c$ zwischen $a$ und $x$ mit*

$$f(x) - T^n_{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

*Man bezeichnet $f(x) - T^n_{f,a}(x)$ auch als das **Restglied** des $n$-ten Taylor-Polynoms und schreibt es als $R^n_{f,a}(x)$.*

*Beweis.* Für den Fall $x = a$ ist die Aussage trivial, da dann beide Seiten der zu zeigenden Formel gleich 0 sind. Für $x \neq a$ behaupten wir, dass die Aussage unmittelbar aus dem Mittelwertsatz

10.23 (b) angewendet auf die beiden Funktionen

$$F\colon D \to \mathbb{R},\ t \mapsto T^n_{f,t}(x) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

und $G\colon D \to \mathbb{R},\ t \mapsto (x-t)^{n+1}$

folgt. In der Tat sind $F$ und $G$ dann differenzierbar mit

$$\begin{aligned} F'(t) &= f'(t) + \Big(-\frac{f'(t)}{1!} + \frac{f''(t)}{1!}(x-t)\Big) + \Big(-\frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2\Big) + \cdots \\ &\quad + \Big(-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\Big) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \end{aligned}$$

und $G'(t) = -(n+1)(x-t)^n$

sowie $F(x) - F(a) = f(x) - T^n_{f,a}(x) = R^n_{f,a}(x)$ und $G(x) - G(a) = -(x-a)^{n+1}$. Der Mittelwertsatz 10.23 (b) liefert also ein $c$ zwischen $a$ und $x$ mit

$$-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \cdot (x-a)^{n+1} = -(n+1)(x-c)^n \cdot R^n_{f,a}(x),$$

d. h. wie behauptet $R^n_{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. □

**Bemerkung 11.14.**

(a) Für $n = 0$ ist Satz 11.13 wegen $T^0_{f,a}(x) = f(a)$ exakt der Mittelwertsatz 10.23 (a). Wir können die Taylor-Formel also auch als eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes auffassen.

(b) Setzen wir in der Formel aus Satz 11.13 noch den Ausdruck aus Definition 11.10 (a) ein, so erhalten wir für jede $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion $f$

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{=T^n_{f,a}(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{=R^n_{f,a}(x)}$$

für ein $c$ zwischen $a$ und $x$. Das Restglied des $n$-ten Taylor-Polynoms hat also genau die Form des $(n+1)$-ten Gliedes der Taylor-Reihe – bis auf den Unterschied, dass man die Ableitung dort an einer Zwischenstelle $c$ anstatt am Entwicklungspunkt $a$ nehmen muss.

(c) Offensichtlich gilt für eine unendlich oft differenzierbare Funktion $f$ nach Satz 11.13 genau dann $T_{f,a}(x) = f(x)$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} R^n_{f,a}(x) = 0$. Wenn man die Taylor-Reihe oder die Taylor-Polynome mit der ursprünglichen Funktion vergleichen möchte, muss man also in irgendeiner Form das Restglied abschätzen. Hier sind zwei Beispiele dafür.

**Beispiel 11.15** (Restgliedabschätzung)**.**

(a) Wenden wir Satz 11.13 auf die Taylor-Reihe der Funktion $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log x$ mit Entwicklungspunkt $a = 1$ aus Beispiel 11.11 (b) an, so erhalten wir mit den dort berechneten Ableitungen $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$ für jedes $x \in \mathbb{R}_{>0}$

$$R^n_{f,1}(x) = f(x) - T^n_{f,1}(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \frac{(x-1)^{n+1}}{c_n^{n+1}}$$

für ein $c_n$ zwischen 1 und $x$ (wir haben den Zwischenwert hier mit $c_n$ statt $c$ bezeichnet, da es natürlich für jedes $n$ ein anderer sein wird). Ist nun $x \in [1,2]$, so ist aber stets $c_n \geq 1$ und $|x-1| \leq 1$, und wir erhalten die Abschätzung

$$|R^n_{f,1}(x)| \leq \frac{1}{n+1},$$

was mit $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Also konvergieren die Taylor-Polynome für $n \to \infty$ zumindest auf $[1,2]$ wirklich gegen die Funktion $f$: Es gilt

$$\log x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k \qquad \text{für alle } x \in [1,2]. \tag{$*$}$$

Insbesondere ergibt sich damit für $x = 2$ der Wert der alternierenden harmonischen Reihe zu

$$\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots .$$

Wir werden später in Beispiel 12.39 (a) übrigens noch sehen, dass die Gleichung $(*)$ sogar für alle $x \in (0,2]$ gilt (also für alle $x$, für die die Taylor-Reihe überhaupt konvergiert), aber mit unserer bisherigen Formel für das Restglied aus Satz 11.13 können wir das noch nicht beweisen.

(b) Wenn wir als Näherung einer Funktion nur an einem bestimmten Taylor-Polynom (und nicht an der kompletten Reihe) interessiert sind, kann uns Satz 11.13 sagen, wie groß der Fehler ist, den wir dabei machen. Betrachten wir z. B. die Sinusfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$, so ist am Entwicklungspunkt 0

$$T^4_{f,0}(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

(wie man aus Lemma 9.13 (b) sofort abliest, denn nach Satz 11.8 ist ja jede Potenzreihe ihre eigene Taylor-Reihe). Wegen $f^{(5)}(x) = \cos x$ besagt Satz 11.13 für $n = 4$ nun für alle $x \in \mathbb{R}$

$$R^4_{f,0}(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) = \frac{\cos c}{5!} x^5$$

für ein $c$ zwischen 0 und $x$. Wenn wir nun z. B. nur an Werten $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq \frac{1}{2}$ interessiert sind, so können wir diesen Ausdruck wegen $|\cos c| \leq 1$ abschätzen zu

$$|R^4_{f,0}(x)| \leq \frac{(\frac{1}{2})^5}{5!} = \frac{1}{3840},$$

d. h. wenn wir für $|x| \leq \frac{1}{2}$ den Sinus durch sein viertes Taylor-Polynom $x - \frac{x^3}{6}$ ersetzen, machen wir dabei einen Fehler von höchstens $\frac{1}{3840} \approx 0{,}0003$.

**Aufgabe 11.16.**

(a) Berechne das Taylor-Polynom $T^2_{f,1}$ für die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ und zeige die Restgliedabschätzung $|f(x) - T^2_{f,1}(x)| \leq \frac{1}{20}$ für alle $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

(b) Berechne $f^{(10)}(0)$ sowie das Taylor-Polynom $T^{10}_{f,0}$ für die Funktion $f(x) = \frac{\cos(x^5)}{1-2x^6}$.

**Aufgabe 11.17.** Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit $f'' = f$ sowie $f(0) = f'(0) = 1$. Berechne die Taylor-Reihe von $f$ mit Entwicklungspunkt 0 und zeige durch eine Restgliedabschätzung, dass $f = \exp$ die Exponentialfunktion ist.

Als weitere Anwendung der Taylor-Formel wollen wir nun noch ein einfaches hinreichendes Kriterium für lokale Extrema geben. Wir hatten bisher ja nur in Lemma 10.20 gesehen, dass an einem lokalen Extremum, das nicht am Rand der Definitionsmenge liegt, ein kritischer Punkt vorliegen, also die erste Ableitung verschwinden muss – dass diese Bedingung aber nicht für ein lokales Extremum ausreicht. Mit Hilfe höherer Ableitungen und der Taylor-Formel können wir nun ein Kriterium angeben, das nahezu immer und ohne allzu großen Aufwand entscheiden kann, ob wirklich ein lokales Extremum vorliegt oder nicht:

**Satz 11.18 (Extremwertkriterium).** *Es seien $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine $n$-mal stetig differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall $D \subset \mathbb{R}$. Weiterhin sei $a \in D$ ein Punkt mit $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ und $f^{(n)}(a) \neq 0$.*

(a) *Ist $n$ gerade und $f^{(n)}(a) > 0$, so hat $f$ in $a$ ein isoliertes lokales Minimum.*

(b) *Ist $n$ gerade und $f^{(n)}(a) < 0$, so hat $f$ in $a$ ein isoliertes lokales Maximum.*

(c) *Ist $n$ ungerade, so hat $f$ in $a$ kein lokales Extremum.*

*Beweis.* Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f^{(n)}(a) > 0$ (der Fall $f^{(n)}(a) < 0$ ist analog). Da $f^{(n)}$ nach Voraussetzung stetig ist, können wir nach Bemerkung 8.8 nach eventuellem Verkleinern von $D$ auf eine geeignete $\varepsilon$-Umgebung von $a$ annehmen, dass $f^{(n)}$ auf ganz $D$ positiv ist. Die Taylor-Formel aus Satz 11.13 besagt nun, dass es für alle $x \in D$ ein $c$ zwischen $a$ und $x$ gibt mit

$$f(x) - T_{f,a}^{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n.$$

Nach der Voraussetzung $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ ist aber $T_{f,a}^{n-1}(x) = f(a)$, und damit also

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n.$$

Wegen $f^{(n)}(c) > 0$ ist dieser Term für $x \in D \backslash \{a\}$ nun ...

- immer größer als 0 falls $n$ gerade ist; in diesem Fall hat $f$ dann also ein isoliertes lokales Minimum in $a$;
- größer als 0 für $x > a$ und kleiner als Null für $x < a$ wenn $n$ ungerade ist; in diesem Fall hat $f$ also kein lokales Extremum in $a$. □

**Bemerkung 11.19.** Anschaulich kann man die Idee von Satz 11.18 kurz so zusammenfassen: Es sei $f$ eine Funktion, von der wir an einer Stelle $a$ wissen wollen, ob ein lokales Extremum vorliegt. Ist nun die $n$-te Ableitung von $f$ die erste, die am Punkt $a$ nicht verschwindet, so enthält das Taylor-Polynom $T_{f,a}^n$ nur den konstanten Term und den vom Grad $n$ – und damit sagt uns die Idee der Taylor-Näherung, dass in der Nähe von $a$

$$f(x) \approx T_{f,a}^n(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

gelten sollte. Da der Ausdruck auf der rechten Seite eine einfache Potenzfunktion ist, sieht man ihm aber natürlich sofort sein Verhalten um den Punkt $a$ herum an: Für gerades $n$ gibt es je nach Vorzeichen von $f^{(n)}(a)$ ein isoliertes lokales Minimum oder Maximum, und für ungerades $n$ kein lokales Extremum. Mit dieser Idee lässt sich übrigens auch die Aussage des Satzes sehr leicht merken!

**Aufgabe 11.20.** Zeige, dass für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die folgenden drei Bedingungen äquivalent sind:

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f''(x) \geq 0$.

(b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $f(y) \geq f(x) + f'(x) \cdot (y-x)$.

(c) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt $(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \geq f((1-\lambda)x + \lambda y)$.

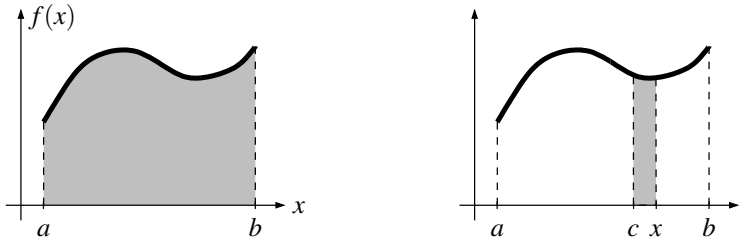
Eine Funktion, die diese Bedingungen erfüllt, heißt *konvex*. Was bedeuten die drei Bedingungen anschaulich?

# 12. Integralrechnung

Als Abschluss der Analysis in einer Veränderlichen wollen wir nach der Differentiation nun noch die Integration betrachten. Wie auch schon im letzten Kapitel wollen wir uns dabei auf den reellen Fall beschränken, da sich die Integralrechnung über $\mathbb{C}$ ganz anders verhält. In der Tat sind komplexe Integrale (oder allgemein die komplexe Analysis) der wesentliche Inhalt der Vorlesung „Einführung in die Funktionentheorie“, die ihr im zweiten Studienjahr hören könnt.

Die Integralrechnung kann man auf zweierlei Arten motivieren. Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, so können wir die folgenden beiden Fragestellungen betrachten:

- (Flächenberechnung) Wie groß ist die Fläche, die unter dem Graphen von $f$ liegt (im Bild unten links grau eingezeichnet) – oder allgemeiner, wie kann man den Flächeninhalt gekrümmter Flächen berechnen?




- (Umkehrung der Differentiation) Gibt es eine differenzierbare Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, deren Ableitung $F'$ gleich $f$ ist – und wenn ja, wie können wir ein solches $F$ bestimmen? Diese Frage hat oft auch eine anschauliche Bedeutung: Beschreibt eine Funktion z. B. die Position eines Gegenstandes in Abhängigkeit von der Zeit, so ist die Ableitung dieser Funktion, also die lokale Positionsänderung pro Zeiteinheit, natürlich einfach die Geschwindigkeit des Gegenstandes. Wenn wir von der Ableitung auf die ursprüngliche Funktion zurück schließen wollen, möchten wir anschaulich also aus der Kenntnis der Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt die von dem Gegenstand zurückgelegte Wegstrecke berechnen können.

Es ist leicht einzusehen, dass diese beiden Probleme sehr eng miteinander zusammenhängen: Bezeichnen wir für $c \in [a,b]$ mit $F(c)$ die Fläche, die über dem Intervall $[a,c]$ unter dem Graphen von $f$ liegt, so ist $F(x) - F(c)$ für $x \in [a,b]$ natürlich gerade die Fläche unter $f$ zwischen $c$ und $x$ (im Bild oben rechts grau eingezeichnet). Für $x$ nahe bei $c$ ist dies näherungsweise eine Rechteckfläche der Breite $x-c$ und Höhe $f(c)$, d. h. es ist

$$F(x) - F(c) \approx (x-c)\cdot f(c), \qquad \text{und damit} \qquad \frac{F(x)-F(c)}{x-c} \approx f(c).$$

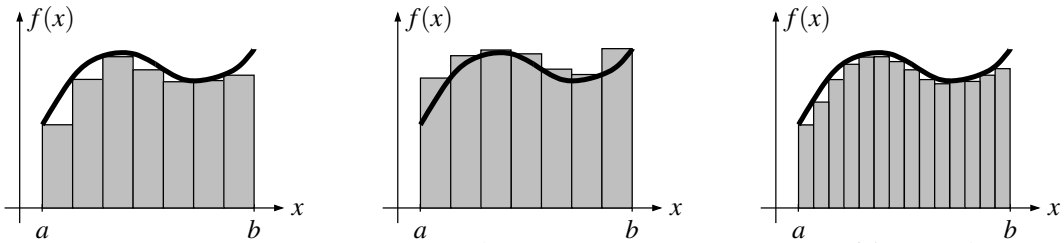
Im Grenzfall $x \to c$ sollte also $F' = f$ gelten, d. h. das Problem der Flächenberechnung unter dem Graphen einer Funktion sollte automatisch auch zur Umkehrung der Differentiation führen.

Wir werden uns im Folgenden zunächst in Abschnitt 12.A mit dem ersten Problem der Flächenberechnung beschäftigen, und daraufhin dann in Abschnitt 12.B den Zusammenhang zur Umkehrung der Differentiation herstellen.

## 12.A Das Riemann-Integral

Um den Flächeninhalt unter dem Graphen einer Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ untersuchen zu können, müssen wir natürlich zunächst erst einmal mit einer exakten Definition dieses Konzepts beginnen. Die Idee hierfür ist einfach: Wir zerlegen das Intervall $[a,b]$ in viele kleine (nicht notwendig gleich

lange) Teilintervalle, und approximieren die Fläche unter dem Graphen von $f$ durch Rechteckflächen über diesen Teilintervallen, indem wir wie im Bild unten als Höhe der Rechtecke einmal das Minimum und einmal das Maximum von $f$ auf den betrachteten Teilintervallen wählen. Auf diese Art erhalten wir leicht zu berechnende Flächen, die im Fall des Minimums etwas kleiner und im Fall des Maximums etwas größer als die gesuchte Fläche sind. Wenn wir die Zerlegung in die Teilintervalle immer feiner machen (wie z. B. im Bild unten rechts), sollten diese Flächen dann von unten bzw. oben gegen den gesuchten Flächeninhalt unter dem Graphen von $f$ konvergieren.




Untersumme | Obersumme | Verfeinerung der Untersumme

Wir wollen diese Idee nun mathematisch exakt definieren. Um die Theorie möglichst allgemein zu halten, wollen wir uns dabei nicht auf stetige Funktionen beschränken. Dies heißt natürlich, dass $f$ auf den betrachteten Teilintervallen nicht mehr notwendig ein Minimum und Maximum hat (siehe Satz 8.25), sondern dass wir im Allgemeinen nur ein Infimum und Supremum erhalten – und das auch nur dann, wenn wir voraussetzen, dass $f$ beschränkt ist.

**Definition 12.1** (Zerlegungen, Unter- und Obersummen)**.** Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

(a) Eine endliche Teilmenge $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ von Punkten in $[a,b]$ mit $a,b \in Z$ bezeichnen wir als eine **Zerlegung** des Intervalls $[a,b]$. Wir vereinbaren, dass wir in dieser Schreibweise die $x_0, \dots, x_n$ immer so anordnen wollen, dass $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ gilt. Sind $Z, Z'$ zwei Zerlegungen von $[a,b]$ mit $Z \subset Z'$, so nennen wir $Z'$ eine **Verfeinerung** von $Z$.

(b) Ist $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$, so heißt

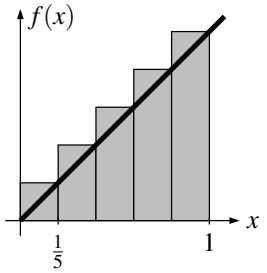
$$\mathrm{US}(f,Z) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf f([x_{i-1}, x_i]) \quad \text{die } \textbf{Untersumme}\text{, und analog}$$

$$\mathrm{OS}(f,Z) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup f([x_{i-1}, x_i]) \quad \text{die } \textbf{Obersumme}$$

von $f$ bezüglich $Z$.

**Beispiel 12.2.** Wir betrachten die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, und für gegebenes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die Zerlegung $Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$. Natürlich ist das Supremum von $f$ auf einem Teilintervall $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ genau der Funktionswert $\frac{i}{n}$ an der rechten Intervallgrenze, und damit ist die Obersumme von $f$ bezüglich $Z_n$ (also die für den Fall $n = 5$ im Bild rechts eingezeichnete graue Fläche) gleich

$$\mathrm{OS}(f,Z_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \cdot \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \overset{3.13}{=} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$




Analog müssen wir für die Untersumme jeweils den Funktionswert $\frac{i-1}{n}$ an der linken Intervallgrenze nehmen, und erhalten

$$\mathrm{US}(f,Z_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \cdot \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n}.$$

**Lemma 12.3** (Eigenschaften von Unter- und Obersummen)**.** *Es seien $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $Z, Z'$ zwei Zerlegungen von $[a,b]$. Dann gilt:*

(a) *Ist $Z'$ eine Verfeinerung von $Z$, so ist* $\mathrm{US}(f,Z') \geq \mathrm{US}(f,Z)$ *und* $\mathrm{OS}(f,Z') \leq \mathrm{OS}(f,Z)$.

(b) $\mathrm{US}(f,Z) \leq \mathrm{OS}(f,Z')$.

*Beweis.*

(a) Da jede Verfeinerung von $Z$ durch endliches Hinzufügen von weiteren Unterteilungspunkten entsteht, genügt es, den Fall zu betrachten, dass $Z'$ durch Hinzufügen eines weiteren Punktes aus $Z$ entsteht, also dass $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ und $Z' = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x', x_k, \dots, x_n\}$ ist. Nach Definition ist dann

$$\begin{aligned}\mathrm{US}(f,Z') = \sum_{i \neq k} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf f([x_{i-1}, x_i]) \\ + (x' - x_{k-1}) \cdot \inf f([x_{k-1}, x']) + (x_k - x') \cdot \inf f([x', x_k]).\end{aligned}$$

In dieser Summe sind nun die beiden Infima in der zweiten Zeile größer oder gleich dem Infimum der größeren Menge $f([x_{k-1}, x_k])$. Also erhalten wir wie gewünscht

$$\mathrm{US}(f,Z') \geq \sum_{i \neq k} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf f([x_{i-1}, x_i]) + (x_k - x_{k-1}) \cdot \inf f([x_{k-1}, x_k]) = \mathrm{US}(f,Z).$$

Die Aussage über die Obersumme beweist man natürlich analog.

(b) Da $Z \cup Z'$ eine gemeinsame Verfeinerung von $Z$ und $Z'$ ist, erhalten wir mit (a)

$$\mathrm{US}(f,Z) \leq \mathrm{US}(f,Z \cup Z') \leq \mathrm{OS}(f,Z \cup Z') \leq \mathrm{OS}(f,Z'),$$

wobei die mittlere Ungleichung gilt, weil das Infimum einer Menge immer kleiner oder gleich dem Supremum ist. □

**Aufgabe 12.4.** Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei beschränkte Funktionen, $Z$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Man zeige:

(a) $\mathrm{OS}(f+g,Z) \leq \mathrm{OS}(f,Z) + \mathrm{OS}(g,Z)$;

(b) $\mathrm{OS}(cf,Z) = c \cdot \mathrm{OS}(f,Z)$;

(c) $\mathrm{OS}(|f|,Z) - \mathrm{US}(|f|,Z) \leq \mathrm{OS}(f,Z) - \mathrm{US}(f,Z)$.

Lemma 12.3 (b) besagt insbesondere, dass *jede* Obersumme eine obere Schranke für *alle* Untersummen ist. Die Menge aller Untersummen ist also nach oben beschränkt. Wir können damit das Supremum aller Untersummen (und genauso das Infimum aller Obersummen) bilden:

**Definition 12.5** (Unter- und Oberintegral)**.** Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißt

$$\mathrm{UI}(f) := \sup \{\mathrm{US}(f,Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \quad \text{das } \textbf{Unterintegral}, \text{ und analog}$$

$$\mathrm{OI}(f) := \inf \{\mathrm{OS}(f,Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \quad \text{das } \textbf{Oberintegral}$$

von $f$.

Anschaulich bedeutet dies im Fall des Unterintegrals einfach, dass wir – wie in der Einleitung zu diesem Abschnitt erklärt – versuchen, die Untersummen (durch fortgesetztes Verfeinern der Zerlegungen) möglichst groß zu machen, so dass wir uns letztlich immer mehr dem eigentlich gesuchten Flächeninhalt unter dem Graphen von $f$ nähern. Das Supremum dieser Untersummen, also das Unterintegral, sollte demnach bereits der gesuchte Flächeninhalt unter dem Graphen von $f$ sein. Das gleiche gilt natürlich auch für das Oberintegral, so dass wir insgesamt erwarten würden, dass Unter- und Oberintegral übereinstimmen und gleich dem gesuchten Flächeninhalt sind.

Leider ist dies unter den schwachen Voraussetzungen, die wir bisher an $f$ gestellt haben, im Allgemeinen nicht der Fall, wie wir gleich in Beispiel 12.9 (d) sehen werden. Für beliebiges $f$ erhalten wir zunächst nur die folgende Ungleichung.

**Lemma 12.6.** *Für jede beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt* $\mathrm{UI}(f) \leq \mathrm{OI}(f)$.

*Beweis.* Nach Lemma 12.3 (b) gilt $\mathrm{US}(f,Z) \leq \mathrm{OS}(f,Z')$ für alle Zerlegungen $Z$ und $Z'$ von $[a,b]$. Damit ist jedes $\mathrm{US}(f,Z)$ eine untere Schranke für alle Obersummen. Da $\mathrm{OI}(f)$ die größte untere Schranke für alle Obersummen ist, ist also $\mathrm{US}(f,Z) \leq \mathrm{OI}(f)$ für alle $Z$. Analog ist damit nun $\mathrm{OI}(f)$ eine obere Schranke für alle Untersummen, und damit $\mathrm{UI}(f) \leq \mathrm{OI}(f)$. □

**Definition 12.7** (Integrierbarkeit)**.** Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Gilt dann $\mathrm{UI}(f) = \mathrm{OI}(f)$, so nennen wir $f$ **(Riemann-)integrierbar**, und definieren das **Integral** von $f$ als diesen Wert

$$\int_a^b f(x)\,dx := \mathrm{UI}(f) = \mathrm{OI}(f).$$

**Bemerkung 12.8.**

(a) Die Schreibweise $\int_a^b f(x)\,dx$ ist an die Differentialschreibweise aus Notation 10.14 angelehnt und soll andeuten, dass man sich das Integral entsprechend unserer Konstruktion anschaulich als eine „unendliche Summe kleiner Rechteckflächen“ vorstellen kann. Dabei steht das Integralzeichen $\int$ als stilisiertes S weiterhin für eine Summe, und die aufsummierten Rechtecke haben die Höhe $f(x)$ und Breite $dx$ (siehe Notation 10.14), also die Fläche $f(x)\,dx$. Die Integrationsvariable $x$ ist damit analog zur Laufvariablen in einer Summe und kann daher auch durch einen anderen Buchstaben ersetzt werden, darf aber natürlich nicht gleichzeitig noch für etwas anderes (z. B. die Ober- oder Untergrenze) verwendet werden: Ein Ausdruck z. B. der Form $\int_a^x f(x)\,dx$ ergibt keinen Sinn, genauso wenig wie eine Summe $\sum_{n=1}^n a_n$.

(b) Es gibt mehrere Arten, den Flächeninhalt unter dem Graphen einer Funktion zu definieren. Neben der hier behandelten Riemannschen Integrationstheorie über Unter- und Obersummen, die wohl die einfachste Herangehensweise ist, ist eine weitere wichtige Möglichkeit das sogenannte *Lebesgue-Integral*, das zwar komplizierter zu definieren ist, dafür aber allgemeiner ist in dem Sinne, dass eine größere Klasse von Funktionen integrierbar wird. Wir werden in dieser Vorlesung jedoch nur die Riemannsche Integrationstheorie behandeln und daher statt von Riemann-Integrierbarkeit einfach immer nur von Integrierbarkeit reden. Die Lebesguesche Integrationstheorie könnt ihr im zweiten Studienjahr in der Vorlesung „Maß- und Integrationstheorie“ kennenlernen.

**Beispiel 12.9.**

(a) Ist $f(x) = c$ (mit $c \in \mathbb{R}$) eine konstante Funktion, so sind die Infima und Suprema von $f$ auf allen Teilintervallen gleich $c$. Damit ist dann $\mathrm{US}(f,Z) = \mathrm{OS}(f,Z) = c\,(b-a)$ für alle Unterteilungen $Z$ und somit auch $\mathrm{UI}(f) = \mathrm{OI}(f) = c\,(b-a)$. Also ist $f$ integrierbar mit $\int_a^b f(x)\,dx = c\,(b-a)$ (was natürlich auch genau der Flächeninhalt für $x \in [a,b]$ unter dem Graphen von $f$ ist).

(b) Wie in Beispiel 12.2 betrachten wir noch einmal die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ mit den Zerlegungen $Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \dots, 1\}$. Da das Unterintegral nach Definition eine obere Schranke für alle Untersummen (und analog das Oberintegral eine untere Schranke für alle Obersummen) ist, folgt aus der Rechnung von Beispiel 12.2 sowie Lemma 12.6

$$\frac{n-1}{2n} = \mathrm{US}(f,Z_n) \leq \mathrm{UI}(f) \leq \mathrm{OI}(f) \leq \mathrm{OS}(f,Z_n) = \frac{n+1}{2n},$$

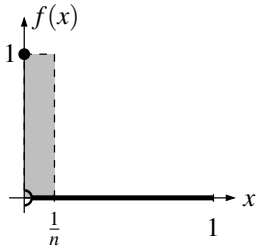
und damit durch Grenzwertbildung $n \to \infty$ nach Satz 5.24 (a)

$$\frac{1}{2} \leq \mathrm{UI}(f) \leq \mathrm{OI}(f) \leq \frac{1}{2},$$

d. h. $\mathrm{UI}(f) = \mathrm{OI}(f) = \frac{1}{2}$. Also ist $f$ integrierbar mit $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$ – was anschaulich ja auch die Dreiecksfläche unter dem Graphen von $f$ ist.

(c) Es sei $f$ die (unstetige) Funktion

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$




Für die gleiche Zerlegung $Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ wie in (b) ist diesmal $\mathrm{US}(f, Z_n) = 0$ und $\mathrm{OS}(f, Z_n) = \frac{1}{n}$ (im Bild rechts ist die Obersumme eingezeichnet). Also folgt wieder

$$0 = \mathrm{US}(f, Z_n) \le \mathrm{UI}(f) \le \mathrm{OI}(f) \le \mathrm{OS}(f, Z_n) = \frac{1}{n},$$

und damit wie in (b) durch Grenzwertbildung für $n \to \infty$

$$0 \le \mathrm{UI}(f) \le \mathrm{OI}(f) \le 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{UI}(f) = \mathrm{OI}(f) = 0.$$

Damit ist $f$ integrierbar mit $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ – was auch anschaulich einleuchtend ist, denn unter dem einen Punkt, an dem der Funktionswert gleich 1 ist, liegt ja kein Flächeninhalt größer als Null.

(d) Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}.$$

Da in jedem Teilintervall von $[0,1]$ nach Aufgabe 5.36 sowohl rationale als auch irrationale Zahlen liegen, ist auf jedem solchen Teilintervall das Infimum von $f$ gleich 0 und das Supremum gleich 1. Damit folgt $\mathrm{US}(f, Z) = 0$ und $\mathrm{OS}(f, Z) = 1$ für jede Zerlegung $Z$, d. h. es ist auch $\mathrm{UI}(f) = 0$ und $\mathrm{OI}(f) = 1$. Also ist $f$ nicht integrierbar – mit unseren Definitionen können wir den Flächeninhalt unter dem Graphen von $f$ nicht sinnvoll definieren.

**Aufgabe 12.10.** Zeige durch eine explizite Berechnung von Ober- und Untersummen, dass

$$\text{(a)}\ \int_0^a \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^a - 1 \qquad \text{(b)}\ \int_0^a x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,a^{n+1}$$

für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n \in \mathbb{N}$. (Hinweis: Aufgabe 4.11 ist für (b) nützlich.)

Bevor wir die wichtigsten Eigenschaften integrierbarer Funktionen untersuchen, wollen wir zunächst noch ein einfaches Kriterium für die Integrierbarkeit beweisen, das implizit auch bereits in unseren Rechnungen von Beispiel 12.9 versteckt ist.

**Lemma 12.11 (Riemannsches Integrabilitätskriterium).** *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.*

(a) *Die Funktion $f$ ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $Z$ von $[a,b]$ gibt mit $\mathrm{OS}(f,Z) - \mathrm{US}(f,Z) < \varepsilon$.*

(b) *Die Funktion $f$ ist genau dann integrierbar mit Integral $\int_a^b f(x)\,dx = c$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Zerlegungen $Z$ und $Z'$ von $[a,b]$ gibt mit $\mathrm{OS}(f,Z) < c + \varepsilon$ und $\mathrm{US}(f,Z') > c - \varepsilon$.*

*Beweis.*

„⇒“: Es sei $f$ integrierbar mit $\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{UI}(f) = \mathrm{OI}(f) = c$. Da $\mathrm{OI}(f)$ nach Definition die größte untere Schranke für die Obersummen von $f$ ist, ist $c + \frac{\varepsilon}{2}$ keine untere Schranke mehr, d. h. es gibt eine Zerlegung $Z$ von $[a,b]$ mit $\mathrm{OS}(f,Z) < c + \frac{\varepsilon}{2}$. Analog gibt es eine Zerlegung $Z'$ von $[a,b]$ mit $\mathrm{US}(f,Z') > c - \frac{\varepsilon}{2}$, was bereits (b) zeigt. Außerdem erfüllt die Zerlegung $Z \cup Z'$ dann auch die Eigenschaft von (a), denn nach Lemma 12.3 (a) ist

$$\mathrm{OS}(f, Z \cup Z') - \mathrm{US}(f, Z \cup Z') \le \mathrm{OS}(f,Z) - \mathrm{US}(f,Z') < \left(c + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(c - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

„⇐“: Für Teil (a) haben wir zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $Z$ wie in der Voraussetzung, und damit

$$\mathrm{OI}(f) - \mathrm{UI}(f) \leq \mathrm{OS}(f,Z) - \mathrm{US}(f,Z) < \varepsilon,$$

da das Ober- bzw. Unterintegral eine untere bzw. obere Schranke für die Ober- bzw. Untersummen sind. Nimmt man hier den Grenzwert für $\varepsilon \to 0$, so ergibt sich $\mathrm{OI}(f) - \mathrm{UI}(f) \leq 0$, mit Lemma 12.6 also $\mathrm{OI}(f) = \mathrm{UI}(f)$. Damit ist $f$ dann integrierbar.

Für Teil (b) gibt es stattdessen für jedes $\varepsilon > 0$ Zerlegungen $Z$ und $Z'$ von $[a,b]$ mit

$$c - \varepsilon < \mathrm{US}(f,Z') \leq \mathrm{UI}(f) \leq \mathrm{OI}(f) \leq \mathrm{OS}(f,Z) < c + \varepsilon,$$

woraus im Grenzfall $\varepsilon \to 0$ die Ungleichungskette $c \leq \mathrm{UI}(f) \leq \mathrm{OI}(f) \leq c$ folgt, d. h. $f$ ist integrierbar mit Integral $c$. □

26

Als erste Anwendung dieses Kriteriums wollen wir nun untersuchen, wie die Integrierbarkeit mit der Stetigkeit einer Funktion zusammenhängt. Dazu haben wir in Beispiel 12.9 (c) schon gesehen, dass integrierbare Funktionen nicht notwendig stetig sein müssen. Die Umkehrung ist jedoch immer richtig:

**Satz 12.12.** *Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f$ auch integrierbar auf $[a,b]$.*

*Beweis.* Nach Satz 8.23 ist $f$ beschränkt, so dass wir also die Begriffe dieses Kapitels anwenden können. Wir zeigen die Integrierbarkeit von $f$ mit dem Kriterium aus Lemma 12.11 (a).

Es sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $f$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetig ist, ist $f$ dort nach Satz 8.50 sogar gleichmäßig stetig. Es gibt also ein $\delta > 0$, so dass $|f(y) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ für alle $y,z \in [a,b]$ mit $|y-z| < \delta$. Wir wählen nun eine Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ von $[a,b]$ mit $x_i - x_{i-1} < \delta$ für alle $i$, d. h. alle Teilintervalle sollen kürzer als $\delta$ sein. Dann gilt

$$\mathrm{OS}(f,Z) - \mathrm{US}(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \big(\sup f([x_{i-1},x_i]) - \inf f([x_{i-1},x_i])\big).$$

Als stetige Funktion nimmt $f$ auf jedem Teilintervall $[x_{i-1},x_i]$ nach Satz 8.25 an einer Stelle $y_i$ ein Maximum und an einer Stelle $z_i$ ein Minimum an. Da $y_i$ und $z_i$ beide im Intervall $[x_{i-1},x_i]$ liegen, dessen Länge ja kleiner als $\delta$ ist, ist natürlich auch $|y_i - z_i| < \delta$ und damit $|f(y_i) - f(z_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ nach Wahl von $\delta$. Wir können oben also weiterrechnen und erhalten

$$\mathrm{OS}(f,Z) - \mathrm{US}(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot (f(y_i) - f(z_i)) < \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon,$$

woraus nun mit Lemma 12.11 (a) die Behauptung folgt. □

Als Nächstes wollen wir die wichtigsten elementaren Eigenschaften von integrierbaren Funktionen herleiten.

**Satz 12.13** (Eigenschaften des Integrals)**.** *Es seien $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Dann gilt:*

(a) *Die Funktion $f+g$ ist ebenfalls integrierbar auf $[a,b]$, und es gilt*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

(b) *Für alle $c \in \mathbb{R}$ ist $cf$ ebenfalls integrierbar auf $[a,b]$, und es gilt*

$$\int_a^b c f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

(c) *Ist $f \leq g$, d. h. $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so ist $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.*

(d) *Die Funktion $|f|$ ist ebenfalls integrierbar auf $[a,b]$, und es gilt die **Dreiecksungleichung***

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

*Beweis.* Wir verwenden das Riemannsche Integrabilitätskriterium aus Lemma 12.11.

(a) Da $f$ und $g$ integrierbar sind, gibt es für alle $\varepsilon > 0$ nach Lemma 12.11 (b) Zerlegungen $Z$ und $Z'$ von $[a,b]$ mit

$$\mathrm{OS}(f,Z) < \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{OS}(g,Z') < \int_a^b g(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach Aufgabe 12.4 (a) und Lemma 12.3 (a) folgt daraus

$$\begin{aligned}\mathrm{OS}(f+g, Z\cup Z') &\le \mathrm{OS}(f, Z\cup Z') + \mathrm{OS}(g, Z\cup Z') \le \mathrm{OS}(f,Z) + \mathrm{OS}(g,Z') \\ &< \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx + \varepsilon.\end{aligned}$$

Analog finden wir für die Untersummen Zerlegungen $\tilde{Z}$ und $\tilde{Z}'$ mit

$$\mathrm{US}(f+g, \tilde{Z}\cup\tilde{Z}') > \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \varepsilon.$$

Die Behauptung folgt nun aus Lemma 12.11 (b) angewendet auf $f+g$.

(b) Für $c = 0$ ist die Aussage trivial. Es sei nun $c > 0$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es dann wieder eine Zerlegung $Z$ von $[a,b]$ mit $\mathrm{OS}(f,Z) < \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{c}$. Damit folgt aus Aufgabe 12.4 (b) dann

$$\mathrm{OS}(cf, Z) = c\cdot\mathrm{OS}(f,Z) < c\cdot\int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Eine analoge Abschätzung bekommen wir natürlich auch wieder für die Untersummen. Damit folgt die Behauptung für $c > 0$ aus Lemma 12.11 (b).

Für $c < 0$ ergibt sich die Behauptung genauso aus der analog zu zeigenden Aussage $\mathrm{OS}(cf,Z) = c\cdot\mathrm{US}(f,Z)$.

(c) Aus $f \le g$ folgt sofort $\mathrm{OS}(f,Z) \le \mathrm{OS}(g,Z)$ für jede Zerlegung $Z$, und damit durch Übergang zum Infimum über alle $Z$ auch $\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{OI}(f) \le \mathrm{OI}(g) = \int_a^b g(x)\,dx$.

(d) Wir zeigen zunächst die Integrierbarkeit von $|f|$. Dazu sei wieder $\varepsilon > 0$ gegeben; nach Lemma 12.11 (a) können wir eine Zerlegung $Z$ von $[a,b]$ wählen mit $\mathrm{OS}(f,Z) - \mathrm{US}(f,Z) < \varepsilon$. Mit Aufgabe 12.4 (c) folgt dann aber auch

$$\mathrm{OS}(|f|,Z) - \mathrm{US}(|f|,Z) \le \mathrm{OS}(f,Z) - \mathrm{US}(f,Z) < \varepsilon,$$

und damit ist $|f|$ nach Lemma 12.11 (a) integrierbar. Die Abschätzung des Integrals erhalten wir nun aus (c): Wegen $f \le |f|$ und $-f \le |f|$ ist sowohl

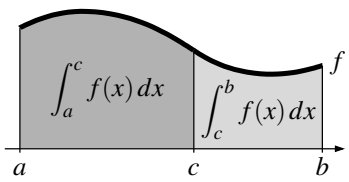
$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad \text{als auch} \qquad -\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{(b)}}{=} \int_a^b -f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

woraus sich die Behauptung ergibt, da $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ in jedem Fall eine dieser beiden linken Seiten ist. □

Eine weitere sehr anschauliche Eigenschaft von Integralen ist die sogenannte Additivität: für jede Zwischenstelle $c \in (a,b)$ ist die Fläche unter dem gesamten Graphen von $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gleich der Summe der Flächen von $a$ bis $c$ und von $c$ bis $b$.

**Satz 12.14** (Additivität des Integrals)**.** *Es seien $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $c \in (a,b)$. Ist $f$ dann sowohl auf $[a,c]$ als auch auf $[c,b]$ integrierbar, so auch auf $[a,b]$, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



*Beweis.* Der Beweis ist sehr ähnlich zu dem von Satz 12.13 (a). Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $f$ auf $[a,c]$ und $[c,b]$ integrierbar ist, gibt es Zerlegungen $Z$ bzw. $Z'$ dieser beiden Intervalle, so dass

$$\mathrm{OS}(f|_{[a,c]}, Z) < \int_a^c f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{OS}(f|_{[c,b]}, Z') < \int_c^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Obersumme von $f$ bezüglich der Zerlegung $Z \cup Z'$ ist dann offensichtlich gerade die Summe dieser beiden Teilobersummen, d. h. wir haben

$$\mathrm{OS}(f, Z \cup Z') = \mathrm{OS}(f|_{[a,c]}, Z) + \mathrm{OS}(f|_{[c,b]}, Z') < \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx + \varepsilon,$$

und eine analoge Aussage auch genauso für die Untersummen. Damit folgt die Behauptung aus Lemma 12.11 (b). □

**Notation 12.15** (Integrale mit vertauschten Grenzen)**.** Bisher haben wir Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ nur für $a \leq b$ definiert. Ist hingegen $a > b$, so vereinbaren wir die Notation

$$\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx, \tag{$*$}$$

wenn $f$ auf $[b,a]$ integrierbar ist. Dies hat den Vorteil, dass die Formel aus Satz 12.14 (im Fall der Integrierbarkeit) dann nicht nur für $a \leq c \leq b$, sondern für beliebige $a,b,c$ gilt: Ist z. B. $a < b < c$, so ist nach Satz 12.14

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

was (durch Subtraktion von $\int_b^c f(x)\,dx$ auf beiden Seiten) mit der Konvention $(*)$ wieder die gleiche Form

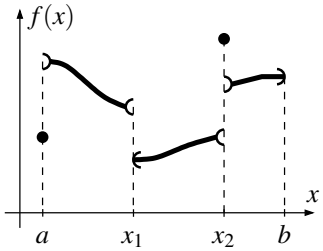
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

wie in Satz 12.14 hat.

**Beispiel 12.16** (Stückweise stetige Funktionen)**.** Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nennen einen Punkt $c \in [a,b]$ eine **Sprungstelle** von $f$, wenn die drei Zahlen

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x<c}} f(x), \quad \lim_{\substack{x \to c \\ x>c}} f(x) \quad \text{und} \quad f(c)$$

existieren, aber nicht alle gleich sind (falls $c$ einer der Randpunkte des Intervalls ist, gibt es den Grenzwert natürlich nur von einer der beiden Seiten). Man nennt $f$ **stückweise stetig**, wenn $f$ wie im Bild rechts stetig bis auf endlich viele Sprungstellen ist.




Eine solche stückweise stetige Funktion ist stets integrierbar:

(a) Es seien $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ die Sprungstellen und Randpunkte des Definitionsintervalls. Auf jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ für $i = 1, \ldots, n$ ist $f$ dann eine stetige Funktion mit evtl. abgeänderten Funktionswerten an den Rändern, also die Summe aus einer stetigen Funktion und geeigneten Vielfachen der „Sprungfunktionen“

$$[x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_{i-1}, \\ 0 & \text{für } x > x_{i-1} \end{cases} \quad \text{und} \quad [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_i, \\ 0 & \text{für } x < x_i. \end{cases}$$

Da eine stetige Funktion und diese Sprungfunktionen nach Satz 12.12 und Beispiel 12.9 (c) integrierbar sind, ist nach Satz 12.13 (a) und (b) auch $f|_{[x_{i-1},x_i]}$ integrierbar.

(b) Nach der Additivität aus Satz 12.14 ist $f$ damit auch auf $[a,b]$ integrierbar.

**Aufgabe 12.17.** Zeige, dass die folgenden Funktionen integrierbar sind:

(a) eine beliebige monotone Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$;

(b) $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0; \end{cases}$

(c) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für } x \in \mathbb{Q} \text{ mit gekürzter Darstellung } x = \frac{p}{q} \text{ für } p \in \mathbb{N} \text{ und } q \in \mathbb{N}_{>0}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$

**Aufgabe 12.18.** Für eine Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_k\}$ eines Intervalls $[a,b]$ definieren wir die *Feinheit* $l(Z)$ als den größten Abstand $\max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, k\}$ zwischen zwei benachbarten Punkten von $Z$.

Es seien nun eine Folge $(Z_n)$ von Zerlegungen $Z_n = \{x_{n,0}, \dots, x_{n,k_n}\}$ von $[a,b]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} l(Z_n) = 0$ sowie Zwischenpunkte $\xi_{n,i} \in [x_{n,i-1}, x_{n,i}]$ für $n \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \dots, k_n$ gegeben. Zeige, dass dann für jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} (x_{n,i} - x_{n,i-1})\, f(\xi_{n,i})$$

gilt, also dass man das Integral statt mit Ober- und Untersummen auch mit einer beliebigen „Zwischensumme“ berechnen kann.

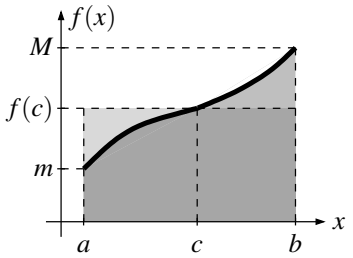
## 12.B Stammfunktionen

Unsere bisherigen Ergebnisse erlauben es uns zwar, von vielen Funktionen die Integrierbarkeit nachzuweisen, aber noch nicht, den Wert des Integrals dann auch explizit zu berechnen. Wie wir in der Einleitung dieses Kapitels schon motiviert haben, ist das zentrale Resultat für solche Berechnungen die Aussage, dass die Integration die Umkehrung der Differentiation ist. Um dies zu zeigen, benötigen wir zur Vorbereitung noch einen kleinen und sehr anschaulichen Hilfssatz.

**Satz 12.19 (Mittelwertsatz der Integralrechnung).** *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es einen Punkt $c \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$$

*(d. h. die Fläche unter dem Graphen ist wie im Bild rechts gleich der Fläche eines Rechtecks, dessen Höhe ein Funktionswert $f(c)$ auf dem betrachteten Intervall ist).*




*Beweis.* Nach Satz 8.25 nimmt $f$ als stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ein Maximum $M$ und Minimum $m$ an. Also folgt aus Beispiel 12.9 (a) und Satz 12.13 (c)

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx = M(b-a),$$

und damit

$$m \le \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx \le M.$$

Da $f$ stetig ist, gibt es nun nach dem Zwischenwertsatz 8.21 ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx$ – was genau die Behauptung war. □

**Bemerkung 12.20.** Mit Notation 12.15 gilt die Gleichung $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$ für ein $c$ zwischen $a$ und $b$ auch für den Fall $a > b$: Anwenden des Mittelwertsatzes 12.19 auf das Intervall $[b,a]$ liefert dann zunächst $\int_b^a f(x)\,dx = f(c)\,(a-b)$, woraus wir aber durch Multiplikation mit $-1$ wieder die Form $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$ erhalten können.

**Satz 12.21 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).** *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist die Funktion*

$$F\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

*(bei der wir also das Integral von $f$ berechnen und dabei die Obergrenze als Variable nehmen) differenzierbar mit $F' = f$.*

*Beweis.* Wir zeigen die Differenzierbarkeit von $F$ in einem Punkt $c \in [a,b]$ mit dem Folgenkriterium. Es sei also $(x_n)_n$ eine beliebige Folge in $[a,b]\backslash\{c\}$ mit $x_n \to c$. Dann gilt für alle $n$

$$\begin{aligned} F(x_n) - F(c) &= \int_a^{x_n} f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt \\ &= \int_c^{x_n} f(t)\,dt && \text{(Satz 12.14 bzw. Notation 12.15)} \\ &= f(z_n)\,(x_n - c) && \text{(Satz 12.19 bzw. Bemerkung 12.20)} \end{aligned}$$

für ein $z_n$ zwischen $c$ und $x_n$. Beachte, dass wegen $x_n \to c$ auch $z_n \to c$ gilt, da $z_n$ ja immer zwischen $c$ und $x_n$ liegt. Da $f$ stetig ist, haben wir damit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(x_n) - F(c)}{x_n - c} = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(c)$$

nach dem Folgenkriterium für Stetigkeit aus Satz 8.12 (b). Wiederum nach dem Folgenkriterium gemäß Satz 8.12 (a) bedeutet dies nun aber gerade wie gewünscht

$$F'(c) = \lim_{x\to c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c). \qquad \square$$

**Beispiel 12.22.** Die Voraussetzung der Stetigkeit im Hauptsatz 12.21 ist wirklich notwendig: Betrachten wir z. B. noch einmal die unstetige Funktion

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

aus Beispiel 12.9 (c), so ist hier

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = 0 \quad \text{für alle } x \in [0,1].$$

Diese Funktion ist zwar differenzierbar, hat als Ableitung jedoch die Nullfunktion und nicht $f$.

Für die Integralberechnung benötigen wir also Funktionen, deren Ableitung die ursprünglich gegebene Funktion ist. Wir geben solchen Funktionen daher einen besonderen Namen. Wegen Beispiel 12.22 beschränken wir uns dabei auf stetige Funktionen.

**Definition 12.23** (Stammfunktionen)**.** Es seien $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann heißt eine differenzierbare Funktion $F\colon D \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ eine **Stammfunktion** von $f$.

**Folgerung 12.24** (Integralberechnung mit Stammfunktionen)**.** *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:*

(a) *Die Funktion $f$ besitzt eine Stammfunktion.*

(b) *Sind $F$ und $G$ zwei Stammfunktionen von $f$, so unterscheiden sich diese nur um eine additive Konstante, d. h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F - G = c$.*

(c) *Ist $F$ eine Stammfunktion von $f$, so gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

*Beweis.*

(a) folgt unmittelbar aus Satz 12.21: Die dort angegebene Funktion $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von $f$.

(b) Nach Voraussetzung ist $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$. Damit ist $F - G$ nach Folgerung 10.24 (c) konstant.

(c) Nach dem Hauptsatz 12.21 sind sowohl $F$ als auch $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ Stammfunktionen von $f$. Also gibt es nach (b) eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$F(x) - \int_a^x f(t)\,dt = c$$

für alle $x \in [a,b]$. Einsetzen von $x = a$ liefert $F(a) = c$, und damit

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Für $x = b$ ergibt sich nun die Behauptung. □

**Notation 12.25** (Unbestimmte Integrale)**.** Man schreibt die Differenz $F(b) - F(a)$ in Folgerung 12.24 (c) oft auch als $\big[F(x)\big]_{x=a}^{b}$ oder $F(x)\big|_{x=a}^{b}$ (wenn die Integrationsvariable aus dem Zusammenhang klar ist, auch als $\big[F(x)\big]_a^b$ oder $F(x)\big|_a^b$), und die dortige Gleichung damit als

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b.$$

Da dies für beliebige Integrationsgrenzen $a$ und $b$ gilt, vereinfacht man diese Notation oft noch weiter und schreibt gemäß Folgerung 12.24 einfach

$$\int f(x)\,dx = F(x), \qquad (*)$$

für die Aussage, dass $F$ eine Stammfunktion von $f$ ist. Man bezeichnet dies dann auch als ein **unbestimmtes Integral**. Beachte aber, dass $(*)$ nur eine symbolische Schreibweise ist, die erst nach dem Einsetzen von Grenzen zu einer echten Gleichheit in $\mathbb{R}$ wird! Dies kann man alleine schon daran sehen, dass $x$ von der Notation her auf der linken Seite eine Integrationsvariable ist, auf der rechten Seite aber wie eine freie Variable aussieht (siehe Bemerkung 12.8 (a)). Außerdem ist mit $F$ z. B. auch $F+1$ eine Stammfunktion von $f$, d. h. wir können sowohl

$$\int f(x)\,dx = F(x) \qquad \text{als auch} \qquad \int f(x)\,dx = F(x) + 1$$

schreiben – was natürlich sofort zum Widerspruch $F(x) = F(x) + 1$ führen würde, wenn man dies als echte Gleichungen von Funktionen betrachten dürfte.

**Beispiel 12.26.** Wir können nun viele Integrale konkret berechnen, indem wir vom Integranden eine Stammfunktion suchen:

(a) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^a$ für ein $a \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, so ist $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{a+1}x^{a+1}$ nach Beispiel 10.28 (d) eine Stammfunktion von $f$, d. h. mit Notation 12.25 gilt

$$\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}\,x^{a+1} \qquad \text{für } a \neq -1.$$

Konkret können wir damit z. B. das Integral aus Beispiel 12.9 (b) auch ohne komplizierte Berechnung von Ober- und Untersummen bestimmen: Es ist einfach

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2 = \frac{1}{2}.$$

(b) Für $a = -1$ ist die Formel aus (a) natürlich nicht anwendbar. Wir haben aber glücklicherweise mit dem Logarithmus schon eine Funktion kennengelernt, deren Ableitung nach Beispiel 10.28 (c) gleich $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist. Es ist also

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x$$

für Integrationsintervalle in $\mathbb{R}_{>0}$ (so dass der Logarithmus dort definiert ist). Falls das Integrationsintervall in $\mathbb{R}_{<0}$ liegt, können wir als Stammfunktion $x \mapsto \log(-x)$ nehmen, denn auch die Ableitung dieser Funktion ist ja gleich $x \mapsto \frac{1}{x}$. Insgesamt ist damit

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|.$$

(c) Durch die Ableitungen der speziellen Funktionen, die wir in Beispiel 10.28 berechnet haben, sehen wir genauso z. B.

$$\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x \qquad \text{und} \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x.$$

27

Nach der Einführung von Stammfunktionen wollen wir unseren Integralbegriff nun noch etwas erweitern. Bisher konnten wir Integrale nur für beschränkte Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen definieren. Oft treten allerdings Fälle auf, in denen eine oder beide Integrationsgrenzen entweder nicht mehr im Definitionsbereich liegen oder aber gleich $\pm\infty$ sind. Auch in diesen Fällen kann man durch eine einfache Grenzwertbildung das Integral definieren.

**Definition 12.27** (Uneigentliche Integrale)**.**

(a) Es sei $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion (wobei der Fall $b = \infty$ zugelassen ist). Wir nehmen weiterhin an, dass $f$ auf jedem abgeschlossenen Intervall $[a,c]$ mit $a \leq c < b$ integrierbar ist. Existiert dann der Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\substack{c \to b \\ c<b}} \int_a^c f(x)\,dx \qquad \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

so nennen wir ihn das **uneigentliche Integral** von $f$ auf $[a,b)$. Liegt dieser Grenzwert zusätzlich in $\mathbb{R}$, so heißt das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ **konvergent**, andernfalls **divergent**. Analog definiert man uneigentliche Integrale im Fall $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$.

(b) Es sei nun $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, wobei die Fälle $a = -\infty$ bzw. $b = \infty$ wieder zugelassen sind. Für ein $c \in (a,b)$ setzen wir dann

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

sofern die rechte Summe (von zwei uneigentlichen Integralen gemäß (a)) in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert, also falls beide Einzelintegrale existieren und deren Summe nicht von der unbestimmten Form $\infty - \infty$ ist. Beachte, dass diese Summe dann wegen der Additivität des Integrals aus Satz 12.14 nicht von der Wahl des Zwischenpunktes $c$ abhängt. Wie im Fall (a) spricht man auch hier von einem (beidseitig) uneigentlichen Integral bzw. von der Konvergenz oder Divergenz dieses Integrals.

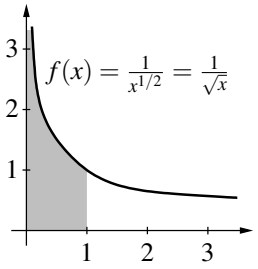
**Beispiel 12.28.**

(a) Für $a \in \mathbb{R}_{>0} \backslash \{1\}$ ist

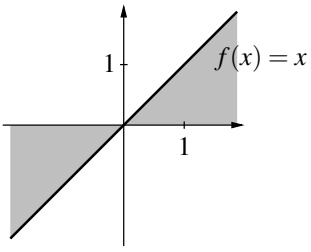
$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx = \lim_{\substack{c \to 0 \\ c>0}} \int_c^1 \frac{1}{x^a}\,dx = \lim_{\substack{c \to 0 \\ c>0}} \left[\frac{1}{1-a} x^{1-a}\right]_c^1 = \frac{1}{1-a} \lim_{\substack{c \to 0 \\ c>0}} (1 - c^{1-a})$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-a} & \text{für } a < 1, \\ \infty & \text{für } a > 1. \end{cases}$$

Das uneigentliche Integral konvergiert also genau für $a < 1$. Anschaulich bedeutet dies, dass die Fläche von 0 bis 1 unter dem Graphen von $x \mapsto \frac{1}{x^a}$ in diesem Fall (wie im Bild unten links für $a = \frac{1}{2}$ dargestellt) endlich ist, obwohl sie nach oben eine unendliche Ausdehnung hat.




(a)




(b)

(b) Das uneigentliche Integral der Identität $f(x) = x$ auf $(-\infty, \infty)$ existiert nicht, denn bei der Wahl des Zwischenpunktes 0 erhalten wir den unbestimmten Ausdruck

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx &= \int_{-\infty}^{0} x\,dx + \int_{0}^{\infty} x\,dx = \lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{0} x\,dx + \lim_{c\to\infty}\int_{0}^{c} x\,dx \\ &= \lim_{c\to-\infty}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{c}^{0} + \lim_{c\to\infty}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{c} = \frac{1}{2}\lim_{c\to-\infty} -c^2 + \frac{1}{2}\lim_{c\to\infty} c^2 \\ &= -\infty + \infty.\end{aligned}$$

Auch anschaulich ist im Bild oben rechts ersichtlich, dass sich dieser Flächeninhalt aus einer unendlich großen negativen und positiven Fläche zusammensetzt. Beachte, dass wir nicht das gleiche Ergebnis erhalten hätten, wenn wir das uneigentliche Integral symmetrisch um die vertikale Achse als

$$\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c} x\,dx = \lim_{c\to\infty}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-c}^{c} = \frac{1}{2}\lim_{c\to\infty}(c^2 - c^2) = 0$$

definiert hätten!

## 12.C Integrationsregeln

In Abschnitt 12.B haben wir alle Stammfunktionen zur Berechnung von Integralen letztlich „durch Zufall“ gefunden – also weil wir uns einfach an eine Funktion erinnern konnten, deren Ableitung wir schon einmal berechnet haben und bei der für diese Ableitung dann die gegebene Funktion herauskam. Daher müssen wir uns jetzt natürlich fragen, wie man Stammfunktionen berechnen kann, wenn man nicht gerade zufällig eine solche sieht. Gibt es analog zur Berechnung von Ableitungen auch Regeln, mit denen man, wenn man die Stammfunktionen einiger spezieller Funktionen kennt, auch die Stammfunktionen z. B. ihrer Produkte, Quotienten oder Verkettungen berechnen kann?

Leider gibt es keine solchen universellen Regeln. Dies ist auch der Grund dafür, dass in mathematischen Formelsammlungen oft seitenweise Tabellen von Stammfunktionen stehen, während man für das Differenzieren aufgrund der Produkt-, Quotienten- und Kettenregel keine derartigen Tabellen benötigt. Es gibt jedoch auch für die Integration ein paar Regeln, mit denen man Integrale oft berechnen kann – nur ist es je nach der betrachteten Funktion mehr oder weniger schwierig (oder evtl. sogar unmöglich), einen Weg zu finden, um mit diesen Regeln ans Ziel zu kommen.

Wir wollen nun die wichtigsten derartigen Regeln behandeln. Die erste ist im wesentlichen nur die „umgekehrte Richtung“ der Produktregel der Differentiation:

**Satz 12.29** (**Partielle Integration** bzw. **Produktintegration**). *Es seien $u, v\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

*(bzw. als unbestimmtes Integral $\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx$).*

*Beweis.* Nach der Produktregel aus Satz 10.8 (b) ist $uv$ eine Stammfunktion von $(uv)' = u'v + uv'$. Also ist $\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\,dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b$. Die Behauptung folgt dann durch Subtraktion von $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx$ nach Satz 12.13. □

**Beispiel 12.30.** Die Regel aus Satz 12.29 nennt sich „partielle Integration“, weil bei der Berechnung des Integrals auf der linken Seite mit Hilfe der rechten neben einem „ausintegrierten Anteil“ noch ein anderes Integral übrig bleibt – nämlich eines, bei dem wir von einem Faktor des ursprünglichen Integrals die Ableitung und vom anderen eine Stammfunktion gebildet haben. Die Anwendung dieser Regel ist also vor allem dann sinnvoll, wenn dieses neue Integral bereits bekannt oder zumindest einfacher als das ursprüngliche ist. Hier sind zwei Beispiele dafür.

(a) Zur Berechnung von $\int x \cos x \, dx$ setzen wir (mit den Notationen von Satz 12.29)

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin x & u'(x) &= \cos x \\ v(x) &= x & v'(x) &= 1 \end{aligned}$$

und erhalten

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x.$$

Wir haben bei der Anwendung der partiellen Integration also den Faktor $x$ differenziert und den Faktor $\cos x$ integriert. Möchte man dies in der Rechnung deutlich machen (und die Funktionen $u$, $u'$, $v$, $v'$ nicht explizit hinschreiben), so notiert man dies auch oft als

$$\int \underset{\downarrow}{x} \underset{\uparrow}{\cos x} \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x.$$

Beachte, dass die umgekehrte Wahl hier nicht zum Ziel geführt hätte: Die Rechnung

$$\int \underset{\uparrow}{x} \underset{\downarrow}{\cos x} \, dx = \frac{x^2}{2} \cos x + \int \frac{x^2}{2} \sin x \, dx$$

ist zwar korrekt, aber das neue Integral ist hier komplizierter als das ursprüngliche.

(b) Das Integral $\int \log x \, dx$ lässt sich mit einem Trick ebenfalls durch partielle Integration berechnen:

$$\int \log x \, dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\log x} \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \log x - x.$$

Dieser Trick funktioniert hier, weil aus der (komplizierten) Logarithmusfunktion beim Ableiten die sehr viel einfachere Funktion $\frac{1}{x}$ entsteht. Auf die gleiche Art kann man übrigens auch die Integrale der Arkusfunktionen aus Definition 9.25 berechnen, da auch diese bei der Differentiation sehr viel einfacher werden (siehe Beispiel 10.28 (c)).

Die zweite wichtige Integrationsregel ergibt sich analog aus der Kettenregel der Differentiation.

**Satz 12.31 (Substitutionsregel).** *Es seien $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $g\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ mit $f([a,b]) \subset D$. Dann gilt*

$$\int_a^b g(f(x)) \, f'(x) \, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) \, dy.$$

*Beweis.* Nach Folgerung 8.26 ist $f([a,b])$ ein abgeschlossenes Intervall, und damit hat $g$ nach Folgerung 12.24 (a) dort eine Stammfunktion $G$. Die Kettenregel aus Satz 10.10 liefert dann $(G \circ f)'(x) = g(f(x)) \, f'(x)$. Damit ist die linke Seite der zu beweisenden Gleichung

$$\int_a^b (G \circ f)'(x) \, dx = \big[G(f(x))\big]_{x=a}^b = G(f(b)) - G(f(a)),$$

und die rechte Seite ebenfalls

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(y) \, dy = \big[G(y)\big]_{y=f(a)}^{f(b)} = G(f(b)) - G(f(a)). \qquad \square$$

**Bemerkung 12.32.** Die Substitutionsregel nimmt in der Differentialschreibweise aus Notation 10.14 eine besonders einfache Form an: Setzen wir $y = f(x)$ und damit $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, und bezeichnen wir die Integrationsgrenzen mit $x_1 = a$ und $x_2 = b$ bzw. $y_1 = f(a)$ und $y_2 = f(b)$, so schreibt sich die Substitutionsregel als

$$\int_{x_1}^{x_2} g(y) \frac{dy}{dx} \, dx = \int_{y_1}^{y_2} g(y) \, dy,$$

oder analog zu Notation 12.25 einfach als

$$\int g(y) \frac{dy}{dx} \, dx = \int g(y) \, dy,$$

wenn man darauf achtet, dass die Grenzen passend zur Integrationsvariablen gewählt werden. Die Regel sieht dann also einfach wie ein „formales Erweitern mit $dx$“ aus.

**Beispiel 12.33.** Die Substitutionsregel bietet sich natürlich immer dann an, wenn die zu integrierende Funktion eine Verkettung von zwei anderen Funktionen ist oder enthält – und insbesondere dann, wenn die Ableitung der inneren Funktion zusätzlich auch noch als Faktor im Integranden steht.

(a) Beim Integral $\int x\mathrm{e}^{x^2}\,dx$ stellen wir fest, dass sich im Integranden eine verkettete Funktion $\mathrm{e}^{x^2}$ befindet, und dass die Ableitung $2x$ der inneren Funktion $x^2$ auch (bis auf die Konstante 2) zusätzlich noch als Faktor im Integranden steht. Wir substituieren also $y = x^2$, so dass $\frac{dy}{dx} = 2x$ in der Notation von Bemerkung 12.32 gilt. Damit folgt also

$$\int x\mathrm{e}^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{dx}\mathrm{e}^y\,dx \overset{12.31}{=} \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^y\,dy = \frac{1}{2}\mathrm{e}^y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}.$$

Im Fall eines bestimmten Integrals hätten wir bei der Anwendung von Satz 12.31 die Grenzen mitsubstituieren müssen:

$$\int_a^b x\mathrm{e}^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{dy}{dx}\mathrm{e}^y\,dx \overset{12.31}{=} \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} \mathrm{e}^y\,dy = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^y\right]_{y=a^2}^{b^2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{b^2} - \mathrm{e}^{a^2}\right).$$

Beachte, dass der Faktor $x$ im Integranden bei diesem Beispiel ganz wesentlich dafür war, dass die Substitutionsregel zum Ziel geführt hat: Ohne diesen Faktor hätten wir mit derselben Substitution

$$\int \mathrm{e}^{x^2}\,dx = \int \frac{1}{2x}\cdot\frac{dy}{dx}\mathrm{e}^y\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{e}^y}{\sqrt{y}}\,dy$$

erhalten – was zwar auch richtig ist, aber nicht weiter hilft, weil das neue Integral auch nicht einfacher als das ursprüngliche zu berechnen ist. In der Tat kann man zeigen, dass sich die Stammfunktion von $\mathrm{e}^{x^2}$ nicht durch die uns bisher bekannten „speziellen Funktionen“ ausdrücken lässt.

(b) Besonders einfach wird die Substitutionsregel im Fall der sogenannten *linearen Substitution*: Ist $f$ eine beliebige stetige Funktion, deren Stammfunktion $F$ wir kennen, so können wir damit immer auch die Stammfunktion von $f(ax+b)$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ bestimmen, da die innere Ableitung hier eine Konstante ist: Substituieren wir $y = ax+b$, so ergibt sich wegen $\frac{dy}{dx} = a$

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(y)\frac{dy}{dx}\,dx \overset{12.31}{=} \frac{1}{a}\int f(y)\,dy = \frac{1}{a}F(y) = \frac{1}{a}F(ax+b).$$

Konkret ist also z. B.

$$\int \frac{1}{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\log|2x+3|,$$

da $x \mapsto \log|x|$ nach Beispiel 12.26 (b) eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist.

Wir hatten in Beispiel 12.33 (a) bereits erwähnt, dass sich die Stammfunktionen von Funktionen, die aus unseren speziellen Funktionen zusammengesetzt sind, manchmal nicht wieder auf diese Art schreiben lassen. Für viele Klassen von Funktionen ist dies aber doch der Fall – z. B. für rationale Funktionen der Form $\frac{p}{q}$ für zwei Polynome $p$ und $q$. Wir wollen dies hier nun zeigen, der Einfachheit halber allerdings nur für den Fall, dass das Nennerpolynom $q$ in verschiedene Linearfaktoren zerfällt und größeren Grad als das Zählerpolynom $p$ hat. Der Trick besteht in diesem Fall darin, den Ausdruck $\frac{p}{q}$ als Summe von Brüchen zu schreiben, die nur eine Konstante im Zähler und einen einzigen Linearfaktor im Nenner haben. Derartige Funktionen der Form $\frac{c}{x-a}$ lassen sich mit einer linearen Substitution wie in Beispiel 12.33 (b) dann einfach zu $c\log|x-a|$ integrieren.

**Lemma 12.34 (Partialbruchzerlegung).** *Es seien $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ verschieden. Ferner sei $p$ ein reelles Polynom mit $\deg p < n$. Dann gilt*

$$\frac{p(x)}{(x-a_1)\cdots(x-a_n)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{x-a_i} \quad \textit{für} \quad c_i := \frac{p(a_i)}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}$$

*für alle* $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$.

*Beweis.* Offensichtlich ist

$$f(x) := p(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i (x-a_1) \cdots (x-a_{i-1})(x-a_{i+1}) \cdots (x-a_n) \qquad (*)$$

ein Polynom mit $\deg f < n$. Es hat aber jedes $a_k$ für $k = 1, \dots, n$ als Nullstelle, denn nach der Definition von $c_1, \dots, c_n$ im Lemma ist

$$f(a_k) = p(a_k) - c_k (a_k - a_1) \cdots (a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1}) \cdots (a_k - a_n) = 0,$$

wobei die erste Gleichung gilt, da nach Einsetzen von $x = a_k$ in der Summe über $i$ in $(*)$ alle Terme mit $i \neq k$ einen Faktor 0 haben und damit verschwinden.

Nach Satz 3.19 (b) ist $f$ also das Nullpolynom. Division von $(*)$ durch $(x-a_1) \cdots (x-a_n)$ liefert damit wie behauptet

$$0 = \frac{p(x)}{(x-a_1) \cdots (x-a_n)} - \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x-a_i}. \qquad \square$$

**Bemerkung 12.35.** Die Formel für die Koeffizienten $c_i$ in Lemma 12.34 lässt sich leicht merken: Man erhält $c_i$, indem man $x = a_i$ im ursprünglichen Ausdruck $\frac{p(x)}{(x-a_1) \cdots (x-a_i) \cdots (x-a_n)}$ einsetzt – bis auf den Linearfaktor $x - a_i$ im Nenner, den man dabei weglassen muss, da er ansonsten ja auch zu einem Faktor 0 im Nenner führen würde.

**Beispiel 12.36.** Um das Integral $\int \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx$ zu berechnen, führen wir eine Partialbruchzerlegung des Integranden durch: Mit $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$ ist

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{c_1}{x+1} + \frac{c_2}{x+2},$$

wobei sich $c_1 = \frac{-1}{1} = -1$ durch Einsetzen von $x = -1$ in $\frac{x}{x+2}$ und $c_2 = \frac{-2}{-1} = 2$ durch Einsetzen von $x = -2$ in $\frac{x}{x+1}$ ergibt. Also ist

$$\int \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx = \int \Big( -\frac{1}{x+1} + 2\frac{1}{x+2} \Big)\,dx = -\log|x+1| + 2\log|x+2|$$

nach einer linearen Substitution wie in Beispiel 12.33 (b).

Als letzte Rechenregel zur Bestimmung von Integralen wollen wir nun noch untersuchen, wie man Integrale von Funktionen berechnen kann, die als Grenzwerte von Funktionenfolgen entstehen – also z. B. von Potenzreihen. Die Situation ist hier sehr viel einfacher als sie es bei der Differentiation in Satz 10.26 war.

**Satz 12.37** (Vertauschbarkeit von Integration und Grenzwertbildung)**.** *Es seien* $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetige Funktionen, die gleichmäßig gegen eine (nach Satz 8.38 dann automatisch ebenfalls stetige) Grenzfunktion* $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *konvergieren. Dann gilt*

$$\int_a^b \Big( \lim_{n\to\infty} f_n(x) \Big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx,$$

*d. h. „Grenzwertbildung und Integration können vertauscht werden".*

*Beweis.* Die erste behauptete Gleichheit ist natürlich nichts weiter als die Definition von $f$. Für die zweite sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $(f_n)_n$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ für alle $x \in [a,b]$ und $n \geq n_0$. Damit ergibt sich nach Satz 12.13

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,dx$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Nach Definition des Grenzwerts bedeutet dies genau $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$ für $n \to \infty$, was zu zeigen war. $\square$

**Bemerkung 12.38** (Integration von Potenzreihen)**.** Insbesondere bedeutet Satz 12.37, dass Potenzreihen (die in jedem abgeschlossenen Intervall innerhalb des Konvergenzgebiets nach Satz 8.36 ja gleichmäßig konvergieren) gliedweise integriert werden können: Sind $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe und $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ ihre Partialsummen, so folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}\right]_a^b = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}\right]_a^b$$

(sofern $[a,b]$ komplett im Konvergenzintervall der Potenzreihe liegt), d. h. als unbestimmtes Integral geschrieben ist

$$\int f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Dies zeigt noch einmal deutlich die besonders schönen Eigenschaften von Potenzreihen: Innerhalb ihres Konvergenzgebiets kann man mit ihnen praktisch „wie mit Polynomen rechnen“, d. h.

- sie können wie erwartet addiert und multipliziert werden (Lemma 7.4 und Bemerkung 7.37);
- sie sind beliebig oft differenzierbar und ihre Ableitungen können gliedweise berechnet werden (Folgerung 10.27 und Satz 11.8);
- Integrale können gliedweise berechnet werden;
- „viele Funktionen“ können als Potenzreihe (nämlich als ihre Taylor-Reihe, siehe Kapitel 11) geschrieben werden.

**Beispiel 12.39.**

(a) Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log x$. Die Ableitung dieser Funktion ist natürlich $f'(x) = \frac{1}{x}$. Nun können wir dies für $|x-1| < 1$ mit Hilfe der geometrischen Reihe (siehe Beispiel 7.3 (a)) als

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x-1)} = 1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3 \pm \cdots$$

schreiben. Diese Potenzreihe kann jetzt aber nach Bemerkung 12.38 gliedweise integriert werden, und darum ist

$$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \pm \cdots$$

für $|x-1| < 1$, also auf $(0,2)$, eine Stammfunktion von $f'$. Nach Folgerung 12.24 (b) kann sich diese von der ursprünglichen Funktion $f$ nur um eine additive Konstante unterscheiden – Einsetzen von $x = 1$ liefert aber auch sofort, dass diese Konstante gleich 0 ist. Also erhalten wir die Darstellung

$$\log x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \pm \cdots$$

für alle $x \in (0,2)$ (die wir in Beispiel 11.15 (a) bereits für $x \in [1,2]$ bewiesen hatten).

(b) Eine analoge Rechnung können wir auch mit der Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan x$ durchführen: Hier ist die Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \cdots,$$

und damit ist

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots$$

eine Stammfunktion von $f'$, die sich von $f$ wiederum nur um eine additive Konstante unterscheiden kann. Auch hier ist diese Konstante wegen $\arctan 0 = 0$ wieder gleich 0, und wir

erhalten auf $(-1,1)$ ohne irgendwelche komplizierte Rechnungen die Potenzreihendarstellung der Arkustangens-Funktion

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots.$$

**Aufgabe 12.40.** Berechne die folgenden (z. T. unbestimmten bzw. uneigentlichen) Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 \mathrm{e}^{-2x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+1}{x^3-x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\log(\log x)}{x \log x}\,dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \cos^3 x\,dx$

**Aufgabe 12.41.** Zeige mit Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{n-1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \cdots \cdot \frac{n-1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

**Aufgabe 12.42 (Integralkriterium für Reihen).** Es sei $f\colon \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige und monoton fallende Funktion. Man zeige:

(a) Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ hat das gleiche Konvergenzverhalten wie die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n)$, d. h. es sind entweder beide konvergent oder beide divergent.

(b) Für $a \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^a}$ genau dann, wenn $a > 1$. (Dies ist eine Verallgemeinerung von Beispiel 7.3 (c) und 7.20 auf reelle Exponenten.)

Gilt die Aussage (a) auch ohne die Voraussetzung, dass $f$ monoton fallend ist?

**Aufgabe 12.43.** Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Man zeige:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\,x^n\,dx = 0$.

(b) Gilt $f(x) = f(1-x)$ für alle $x \in [0,1]$, so ist $\int_0^1 x f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx$.

**Aufgabe 12.44.** Es seien $a,b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $f\colon [0,a] \to [0,b]$ eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion. Man zeige:

(a) Ist $f$ monoton wachsend mit $f(0) = 0$ und $f(a) = b$, dann gilt $\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(x)\,dx = ab$.

(b) Ist $f$ monoton fallend mit $f(0) = b$ und $f(a) = 0$, dann gilt $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^b f^{-1}(x)\,dx$.

Was bedeuten diese Aussagen geometrisch?

**Aufgabe 12.45** (Binomische Reihe)**.** Für $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die **verallgemeinerten Binomialkoeffizienten** durch

$$\binom{a}{n} := \frac{a \cdot (a-1) \cdot \cdots \cdot (a-n+1)}{n!}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten nun auf $D = (-1,1)$ die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^a$. Man zeige:

(a) Die Taylor-Reihe von $f$ mit Entwicklungspunkt 0 ist gegeben durch $T_{f,0}(x) = \sum_{n=0}^\infty \binom{a}{n} x^n$ und konvergiert auf $D$.

(b) Es gilt sogar $(1+x)^a = \sum_{n=0}^\infty \binom{a}{n} x^n$ für alle $x \in D$, d. h. die Taylor-Reihe stellt wirklich die ursprüngliche Funktion dar. (Hinweis: Zeige zunächst, dass die Ableitung von $\frac{T_{f,0}}{f}$ gleich 0 ist.)

(c) Die Funktion arcsin lässt sich auf $D$ als Potenzreihe schreiben. Berechne diese Potenzreihe explizit!

Was ergibt sich aus der binomischen Reihe in den Spezialfällen $a \in \mathbb{N}$ bzw. $a = -1$?

# Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra

## 13. Vektorräume

Ausgehend von den elementaren Konzepten in den Kapiteln 1 bis 3 wollen wir in dieser Vorlesung zwei grundlegende Gebiete der Mathematik entwickeln: die Analysis und die lineare Algebra. Während sich dabei die eindimensionale Analysis in den Kapiteln 4 bis 12 hauptsächlich mit allgemeinen (in der Regel stetigen oder sogar differenzierbaren) Funktionen in einer reellen Variablen beschäftigt hat, wollen wir nun im folgenden Teil des Skripts zunächst unabhängig davon *lineare* Funktionen in *mehreren* Variablen studieren, wie sie in der Praxis z. B. in Form von linearen Gleichungssystemen auftreten. Später werden wir die erarbeiteten Resultate dann mit der Analysis kombinieren, um Funktionen in mehreren Variablen mit Hilfe von Ableitungen linear approximieren zu können.

In der Analysis arbeitet man ja hauptsächlich über den reellen Zahlen, und das ist in der linearen Algebra auch nicht viel anders. Allerdings haben wir in Kapitel 3 ja auch schon gesehen, dass viele Dinge auch über einem beliebigen Körper funktionieren. Die lineare Algebra verhält sich hier sehr „gutartig“: Da wir letztlich nur lineare Funktionen bzw. Gleichungen betrachten werden, benötigen wir gar nicht mehr Struktur der reellen Zahlen als die Körperaxiome. Wir können daher nahezu die gesamte lineare Algebra über einem beliebigen Grundkörper studieren, also z. B. auch über $\mathbb{Q}$, dem Körper $\mathbb{Z}_2$ aus Beispiel 3.6 (b), oder anderen Körpern, die ihr vielleicht inzwischen kennt oder noch kennenlernen werdet. Wir vereinbaren daher:

Im Folgenden (bis zum Ende von Kapitel 22) sei $K$ immer ein fest gewählter Grundkörper.

Beim ersten Lesen könnt ihr euch $K$ aber auch gerne einfach als $\mathbb{R}$ vorstellen.

### 13.A Der Vektorraumbegriff

Wie ihr ja sicher aus der Schule wisst, werden die Elemente von $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ in der Regel *Vektoren* genannt. Aber was genau ist im Allgemeinen eigentlich ein Vektor? Genau wie bei Gruppen und Körpern in Abschnitt 3.A werden Vektoren über die Operationen definiert, die man mit ihnen durchführen kann: In einer Gruppe gibt es *eine* Verknüpfung, die gewisse Eigenschaften erfüllt (siehe Definition 3.1), in einem Körper *zwei* Verknüpfungen „$+$“ und „$\cdot$“ mit den erwarteten Eigenschaften (siehe Definition 3.5). Was sind nun die analogen definierenden Verknüpfungen und Eigenschaften für Vektoren? Wir wissen alle aus der Schule, dass man Vektoren addieren und „strecken“, also mit einer reellen Zahl (bzw. mit einer Zahl des gewählten Grundkörpers $K$) multiplizieren kann. Genau diese beiden Strukturen definieren einen allgemeinen Vektorraum:

**Definition 13.1** (Vektorräume)**.** Ein **Vektorraum** über $K$ (oder $K$-Vektorraum) ist eine Menge $V$ zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} &+ : V \times V \to V \quad (\textit{Vektoraddition}) \\ \text{und} \quad &\cdot : K \times V \to V \quad (\textit{Skalarmultiplikation}) \end{aligned}$$

so dass gilt:

(a) $(V,+)$ ist eine abelsche Gruppe (siehe Definition 3.1).

(b) (1. Distributivität) Für alle $\lambda,\mu \in K$ und $x \in V$ gilt $(\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x + \mu\cdot x$.

(c) (2. Distributivität) Für alle $\lambda \in K$ und $x,y \in V$ gilt $\lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x + \lambda\cdot y$.

(d) (Assoziativität) Für alle $\lambda,\mu \in K$ und $x \in V$ gilt $(\lambda\cdot\mu)\cdot x = \lambda\cdot(\mu\cdot x)$.

(e) Für alle $x \in V$ gilt $1 \cdot x = x$.

Die Elemente von $V$ heißen **Vektoren**, die Elemente von $K$ **Skalare**.

**Bemerkung 13.2.**

(a) Beachte, dass man einen Vektorraum nur dann definieren kann, wenn man vorher einen Körper $K$ gewählt hat. Wenn klar ist, welcher Körper gemeint ist, werden wir jedoch auch oft nur von einem Vektorraum (statt einem $K$-Vektorraum) sprechen.

(b) In Definition 13.1 haben wir mehrfach die gleichen Symbole für unterschiedliche Dinge verwendet: Es gibt z. B. zwei Additionen, die wir beide mit „$+$“ bezeichnet haben, nämlich die Addition $+\colon K \times K \to K$ zweier Körperelemente und die Addition $+\colon V \times V \to V$ der Vektoren. Da man aus der Art der verknüpften Elemente eindeutig ablesen kann, um welche Verknüpfung es sich handeln muss, können dadurch aber keine Mehrdeutigkeiten entstehen: So werden z. B. beim ersten Pluszeichen in Definition 13.1 (b) zwei Skalare, beim zweiten jedoch zwei Vektoren addiert. Nur wenn wir auch in der Notation explizit deutlich machen wollen, um welche der beiden Verknüpfungen es sich handelt, schreiben wir diese als „$+_K$“ bzw. „$+_V$“. Analog gibt es auch die Multiplikation zweimal, einmal als Multiplikation „$\cdot_K$“ in $K$ und einmal als Skalarmultiplikation „$\cdot_V$“, und auch zweimal die Null, nämlich einmal als Null $0_K$ im Körper $K$ und einmal als *Nullvektor* $0_V$, d. h. als das neutrale Element von $(V,+)$. In dieser ausführlichen Notation könnte man z. B. die Bedingung aus Definition 13.1 (b) als

$$(\lambda +_K \mu) \cdot_V x = \lambda \cdot_V x +_V \mu \cdot_V x$$

schreiben. In der Regel werden wir diese Indizes $K$ und $V$ jedoch weglassen, genauso wie die Malzeichen sowohl für „$\cdot_K$“ als auch für „$\cdot_V$“.

(c) Vielleicht seid ihr es aus der Schule oder anderen Studienfächern gewohnt, einen Vektor $x$ durch eine besondere Schreibweise wie z. B. $\vec{x}$ zu kennzeichnen. Dies ist in der Mathematik eher unüblich, da wir gleich in Beispiel 13.3 noch sehen werden, dass sehr viele Objekte der Mathematik als Vektoren aufgefasst werden können und dementsprechend mit dieser Notation versehen werden müssten. Da wir außerdem ohnehin immer von jeder Variablen angeben, um was für ein Objekt es sich handelt bzw. aus welcher Menge sie kommt, brauchen wir auch keine weitere besondere Kennzeichnung für Vektoren.

**Beispiel 13.3.**

(a) Für jeden Körper $K$ ist $V = \{0\}$ (mit den trivialen Verknüpfungen) ein $K$-Vektorraum, der sogenannte **Nullvektorraum**.

(b) Das mit Abstand wichtigste Beispiel ist für eine gegebene Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$K^n := \underbrace{K \times \cdots \times K}_{n\text{-mal}} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_n \in K \right\}$$

aller „geordneten $n$-Tupel in $K$“ – d. h. ein Element von $K^n$ wird dadurch angegeben, dass man $n$ Elemente $x_1, \dots, x_n$ von $K$ angibt (die nicht notwendig verschieden sein müssen und auf deren Reihenfolge es ankommt). Dass wir die Elemente $x_1, \dots, x_n$ dabei untereinander und nicht nebeneinander schreiben, ist momentan eine reine Konvention, die sich später bei der Einführung von Matrizen in Abschnitt 15.A als nützlich erweisen wird. Definiert man nun auf $K^n$ die komponentenweisen Verknüpfungen

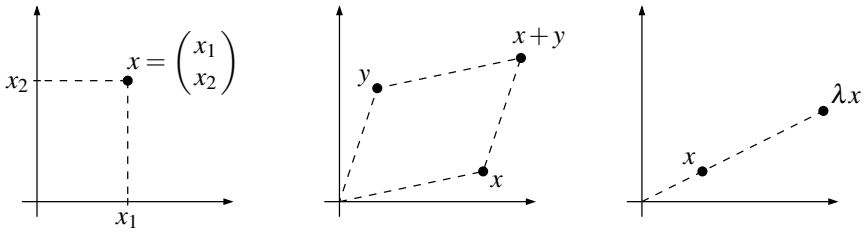
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

für alle $\lambda \in K$, so ist $K^n$ mit diesen Verknüpfungen ein $K$-Vektorraum. In der Tat folgen die Vektorraumeigenschaften alle aus den Körpereigenschaften von $K$; wir zeigen hier exemplarisch Teil (b) der Definition 13.1: Für alle $\lambda, \mu, x_1, \dots, x_n \in K$ gilt

$$(\lambda+\mu)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\lambda+\mu)x_1\\ \vdots\\ (\lambda+\mu)x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x_1+\mu x_1\\ \vdots\\ \lambda x_n+\mu x_n\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

wobei das mittlere Gleichheitszeichen genau die Distributivität in $K$ ist und die beiden anderen aus der Definition der Vektoraddition und Skalarmultiplikation in $K^n$ folgen.

Im Fall $K = \mathbb{R}$ und $n = 2$ ist $K^n = \mathbb{R}^2$ einfach die bekannte reelle Ebene, und Addition und Skalarmultiplikation können wie im folgenden Bild veranschaulicht werden. Die geometrische Interpretation im Fall von $\mathbb{R}^n$ für andere $n$ ist natürlich analog.




Wenn wir im Folgenden vom Vektorraum $K^n$ sprechen, werden wir diesen Raum immer als Vektorraum über dem Körper $K$ mit diesen komponentenweisen Verknüpfungen betrachten (sofern wir nichts anderes angeben).

Im Fall $n = 1$ erhält man $K^1 = K$, also $K$ selbst als $K$-Vektorraum; der Fall $n = 0$ wird konventionsgemäß als der Nullvektorraum $K^0 = \{0\}$ aufgefasst.

(c) Die axiomatische Herangehensweise an die Vektorraumtheorie hat den großen Vorteil, dass sie auch auf viele andere Fälle als $K^n$ anwendbar ist. Als weiteres wichtiges Beispiel ist z. B. für eine beliebige Menge $D$

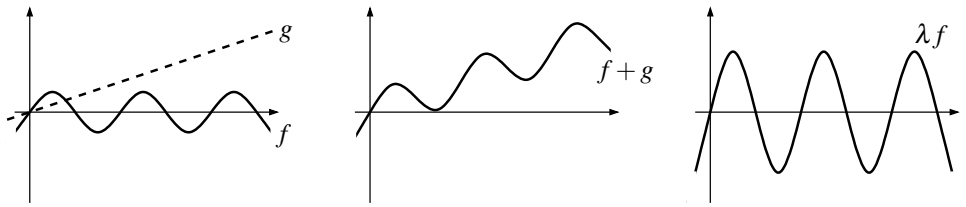
$$\mathrm{Abb}(D,K) := \{f : f \text{ ist eine Abbildung von } D \text{ nach } K\}$$

ein $K$-Vektorraum, indem wir die Addition und Multiplikation solcher Abbildungen punktweise definieren als

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

für alle $\lambda \in K$, $x \in D$ und $f, g\colon D \to K$ (also $f, g \in \mathrm{Abb}(D,K)$). In der Tat haben wir in Aufgabe 3.12 (a) bereits gesehen, dass $\mathrm{Abb}(D,K)$ eine abelsche Gruppe ist (der Nullvektor ist hierbei die Funktion, die jedes Element von $D$ auf 0 abbildet, und das zu einer Funktion $f\colon D \to K$ additive Inverse die Funktion $-f\colon D \to K$, $x \mapsto -f(x)$). Die anderen Vektorraumeigenschaften zeigt man wieder analog.

Beachte, dass die anschauliche Bedeutung in diesem Beispiel trotz der gleichen algebraischen Eigenschaften aus Definition 13.1 eine ganz andere ist als in (b): Zeichnen wir z. B. wie im Bild unten Abbildungen $f, g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ als ihre Graphen in $\mathbb{R}^2$, so entsprechen Vektoraddition und Skalarmultiplikation der Addition bzw. Streckung der Funktionswerte in vertikaler Richtung.



Ein wichtiger Spezialfall dieser Konstruktion ist der Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{N},K)$, dessen Elemente $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N},K)$ wir als „unendliche Folgen" $(f(0),f(1),f(2),\dots)$ mit Elementen in $K$ schreiben können. Im Fall $K=\mathbb{R}$ sind dies natürlich gerade die in der Analysis betrachteten reellen Zahlenfolgen aus Abschnitt 5.A.

Darüber hinaus lässt sich auf die gleiche Art auch die Menge $\mathrm{Abb}(D,W)$ aller Abbildungen von einer beliebigen Menge $D$ in einen $K$-Vektorraum $W$ zu einem Vektorraum machen.

(d) Sind $V$ und $W$ zwei $K$-Vektorräume, so ist (in Verallgemeinerung von (b)) auch ihr Produkt $V \times W$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation ein $K$-Vektorraum.

(e) $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. In der Tat kann man reelle Zahlen addieren und mit einer rationalen multiplizieren, und es ist klar, dass mit diesen Definitionen alle Vektorraumeigenschaften erfüllt sind.

Wir sehen also schon, dass es ganz verschiedene Vektorräume gibt; in den nächsten Kapiteln werden wir auch noch viele weitere kennenlernen. Bei der Einführung neuer Konzepte der linearen Algebra ist es für die Anschauung aber vermutlich empfehlenswert, sich immer zuerst den Fall des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ vorzustellen.

Als Erstes wollen wir jetzt ein paar elementare Eigenschaften von Vektorräumen zeigen. Sie haben einen ähnlichen Charakter wie die Axiome in Definition 13.1, folgen aber bereits aus diesen (so dass man sie nicht separat als Axiome fordern muss).

**Lemma 13.4** (Eigenschaften von Vektorräumen)**.** *In jedem $K$-Vektorraum $V$ gilt für alle $\lambda \in K$ und $x \in V$:*

(a) $0_K \cdot x = \lambda \cdot 0_V = 0_V$.

(b) *Ist $\lambda \cdot x = 0_V$, so ist $\lambda = 0_K$ oder $x = 0_V$.*

(c) $(-1) \cdot x = -x$.

*Beweis.*

(a) Der Beweis ist ganz analog zu dem von Lemma 3.8 (a): Wegen der 1. Distributivität aus Definition 13.1 (b) gilt $0_K \cdot x = (0_K + 0_K) \cdot x = 0_K \cdot x + 0_K \cdot x$, nach Subtraktion von $0_K \cdot x$ also wie behauptet $0_V = 0_K \cdot x$.

Genauso erhalten wir mit der 2. Distributivität $\lambda \cdot 0_V = \lambda \cdot (0_V + 0_V) = \lambda \cdot 0_V + \lambda \cdot 0_V$, nach Subtraktion von $\lambda \cdot 0_V$ also $0_V = \lambda \cdot 0_V$.

(b) Ist $\lambda x = 0_V$ und $\lambda \neq 0_K$, so folgt

$$\begin{aligned} x &= 1 \cdot x && \text{(Definition 13.1 (e))} \\ &= (\lambda^{-1} \cdot \lambda) x \\ &= \lambda^{-1}(\lambda x) && \text{(Definition 13.1 (d))} \\ &= 0_V && \text{(Teil (a)).} \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} (-1) \cdot x + x &= (-1) \cdot x + 1 \cdot x && \text{(Definition 13.1 (e))} \\ &= (-1+1) \cdot x && \text{(Definition 13.1 (b))} \\ &= 0_K \cdot x \\ &= 0_V && \text{(Teil (a)),} \end{aligned}$$

also ist $(-1) \cdot x$ das additive Inverse zu $x$. □

Oft möchte man mit der Vektoraddition und Skalarmultiplikation nicht nur zwei, sondern mehrere Vektoren miteinander kombinieren. Um damit in Zukunft besser arbeiten zu können, führen wir hier schon einmal die folgenden Notationen ein.

**Definition 13.5** (Familien und Linearkombinationen)**.** Es sei $V$ ein Vektorraum.

(a) Eine (endliche) **Familie** von Vektoren in $V$ ist gegeben durch $n$ Vektoren $x_1,\dots,x_n \in V$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben eine solche Familie als $B = (x_1,\dots,x_n)$ und nennen die Vektoren $x_1,\dots,x_n$ ihre **Elemente**.

(b) Sind $B = (x_1,\dots,x_n)$ eine Familie von Vektoren in $V$ und $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$, so heißt

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \quad \in V$$

eine **Linearkombination** der Vektoren aus $B$. Wir bezeichnen die Menge aller dieser Linearkombinationen mit

$$\operatorname{Lin} B := \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n : \lambda_1,\dots,\lambda_n \in K\} \quad \subset V.$$

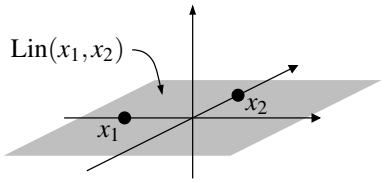
Im Fall $n = 0$ der leeren Familie fassen wir dies (im Sinne einer leeren Summe wie in Notation 3.9 (c)) als $\operatorname{Lin}() := \{0\}$ auf.

**Bemerkung 13.6.**

(a) Beachte, dass $x_1,\dots,x_n$ in Definition 13.5 im Gegensatz zu Beispiel 13.3 (b) Vektoren in $V$, und nicht die Komponenten *eines* Vektors in $K^n$ sind. In der Tat ist diese Indexnotation in der Praxis für beide Bedeutungen üblich. Aus dem Zusammenhang ist aber immer offensichtlich, was gemeint ist, da $x_1,\dots,x_n$ in Beispiel 13.3 (b) ja Elemente des Grundkörpers $K$ sind, hier jedoch Elemente des betrachteten Vektorraums $V$.

(b) Eine Familie $B = (x_1,\dots,x_n)$ ist etwas Ähnliches wie eine Menge $\{x_1,\dots,x_n\}$, allerdings haben ihre Elemente $x_1,\dots,x_n$ eine vorgegebene Reihenfolge und können in der Familie auch mehrfach auftreten. Für die Definition von $\operatorname{Lin} B$ ist dieser Unterschied noch irrelevant (wir hätten $\operatorname{Lin} B$ genauso gut auch für eine *Menge* $B$ definieren können), später in Bemerkung 14.10 (b) bzw. Abschnitt 16.B wird er jedoch noch wichtig werden.

(c) Mit der geometrischen Interpretation der Vektoraddition und Skalarmultiplikation aus Beispiel 13.3 (b) kann man sich die Mengen $\operatorname{Lin} B$ auch anschaulich gut vorstellen: So ist z. B. $\operatorname{Lin}(x_1,x_2) \subset \mathbb{R}^3$ im Bild rechts die Ebene durch den Nullpunkt und die beiden Vektoren $x_1$ und $x_2$.




**Aufgabe 13.7.** Es sei $V$ ein $K$-Vektorraum.

Wenn wir das Vektorraumaxiom (e) „$1 \cdot x = x$ für alle $x \in V$“ in Definition 13.1 weglassen würden, könnten wir versuchen, für ein gegebenes $a \in K$ eine geänderte Skalarmultiplikation

$$\lambda \odot x := \lambda a x \quad \text{für alle } \lambda \in K \text{ und } x \in V$$

zu definieren. Für welche $a$ wäre $K^n$ mit der gewöhnlichen Vektoraddition „$+$“ und dieser geänderten Skalarmultiplikation „$\odot$“ dann ein Vektorraum?

## 13.B Untervektorräume

Sehr viele weitere Beispiele von Vektorräumen können wir erhalten, indem wir in bereits bekannten Vektorräumen nach Teilmengen suchen, die mit der gegebenen Vektoraddition und Skalarmultiplikation selbst wieder die Axiome aus Definition 13.1 erfüllen. Solche Teilmengen werden als Untervektorräume bezeichnet.

**Definition 13.8** (Untervektorräume)**.** Es sei $V$ ein Vektorraum über einem Körper $K$. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt **Untervektorraum** oder **Unterraum** von $V$, in Zeichen $U \leq V$, wenn gilt:

(a) $0 \in U$.

(b) (Abgeschlossenheit bzgl. Vektoraddition) Für alle $x, y \in U$ ist $x + y \in U$.

(c) (Abgeschlossenheit bzgl. Skalarmultiplikation) Für alle $x \in U$ und $\lambda \in K$ ist $\lambda x \in U$.

**Bemerkung 13.9.** Äquivalent zu Definition 13.8 kann man dort die Bedingung (a) auch durch die scheinbar schwächere Bedingung $U \neq \emptyset$ ersetzen: Ist nämlich $U$ nicht leer, so gibt es ein Element $x \in U$, und nach (c) folgt dann mit Lemma 13.4 (a) auch $0 = 0 \cdot x \in U$.

Die Abgeschlossenheit eines Unterraums bezüglich Vektoraddition und Skalarmultiplikation bedeutet gerade, dass sich diese beiden Verknüpfungen zu Verknüpfungen

$$+ : U \times U \to U \qquad \text{und} \qquad \cdot : K \times U \to U$$

auf $U$ einschränken lassen. Wie schon angekündigt wollen wir nun sehen, dass dies die Menge $U$ selbst wieder zu einem Vektorraum macht.

**Lemma 13.10.** *Jeder Unterraum eines $K$-Vektorraums ist (mit den eingeschränkten Verknüpfungen) selbst wieder ein $K$-Vektorraum.*

*Beweis.* Wir müssen die Eigenschaften aus Definition 13.1 für $U$ nachweisen. Dazu beginnen wir mit (a) und zeigen zunächst, dass $(U,+)$ eine Gruppe ist.

- (Assoziativität der Vektoraddition) Weil $V$ ein Vektorraum ist, gilt $(x+y)+z = x+(y+z)$ für alle $x,y,z \in V$ und damit erst recht für alle $x,y,z \in U$. Die Assoziativität der Addition überträgt sich also direkt von $V$ auf $U$.
- (Additives neutrales Element) Nach Definition 13.8 (a) liegt der Nullvektor in $U$. Dieser erfüllt $x+0 = 0+x = x$ für alle $x \in V$ und damit auch für alle $x \in U$, und ist damit ein neutrales Element für die Addition in $U$.
- (Additive inverse Elemente) Für jedes $x \in U$ gilt nach Definition 13.8 (c) auch $(-1) \cdot x \in U$, und dies ist nach Lemma 13.4 (c) genau das additive inverse Element zu $x$.

Also ist $(U,+)$ eine Gruppe. Die Kommutativität der Vektoraddition und die übrigen Vektorraumeigenschaften (b) bis (e) in Definition 13.1 sind nun alle von der Form, dass für alle Vektoren aus $U$ eine bestimmte Gleichung gelten muss – und dies folgt jetzt genauso wie die Assoziativität oben sofort daraus, dass die betreffenden Gleichungen sogar für alle Vektoren aus $V$ gelten. □

Das wichtigste Beispiel für Unterräume eines Vektorraums $V$ sind wie im folgenden Lemma die Teilmengen der Form $\operatorname{Lin} B$ für eine Familie $B$ in $V$ wie in Definition 13.5. In der Tat ist $\operatorname{Lin} B$ sogar der kleinste Unterraum, der $B$ enthält:

**Lemma 13.11** (Erzeugte Unterräume)**.** *Für jede Familie $B = (x_1, \dots, x_n)$ in einem Vektorraum $V$ gilt:*

(a) $\operatorname{Lin} B$ *ist ein Unterraum von $V$, der die Vektoren $x_1, \dots, x_n$ enthält.*

(b) *Ist $U$ ein beliebiger Unterraum von $V$, der die Vektoren $x_1, \dots, x_n$ enthält, so ist* $\operatorname{Lin} B \subset U$.

*Anschaulich ist* $\operatorname{Lin} B$ *also „der kleinste Unterraum von $V$, der $B$ enthält“. Man nennt ihn daher auch den von $B$* ***erzeugten*** *oder* ***aufgespannten Unterraum****.*

*Beweis.*

(a) Natürlich sind sowohl der Nullvektor als auch jedes $x_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ eine Linearkombination der Vektoren in $B = (x_1, \dots, x_n)$, denn es ist

$$0 = 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n \quad \text{und} \quad x_i = 0 \cdot x_1 + \dots + 1 \cdot x_i + \dots + 0 \cdot x_n.$$

Wir müssen also nur noch die Abgeschlossenheit von $\operatorname{Lin} B$ überprüfen. Dies ist aber sehr einfach: Sind

$$x = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n \quad \text{und} \quad y = \nu_1 x_1 + \dots + \nu_n x_n$$

(mit $\mu_1, \dots, \mu_n, \nu_1, \dots, \nu_n \in K$) zwei beliebige Vektoren in $\operatorname{Lin} B$, so gilt für alle $\lambda \in K$ auch

$$x+y = (\mu_1+\nu_1)x_1 + \dots + (\mu_n+\nu_n)x_n \in \operatorname{Lin} B \quad \text{und} \quad \lambda x = (\lambda\mu_1)x_1 + \dots + (\lambda\mu_n)x_n \in \operatorname{Lin} B.$$

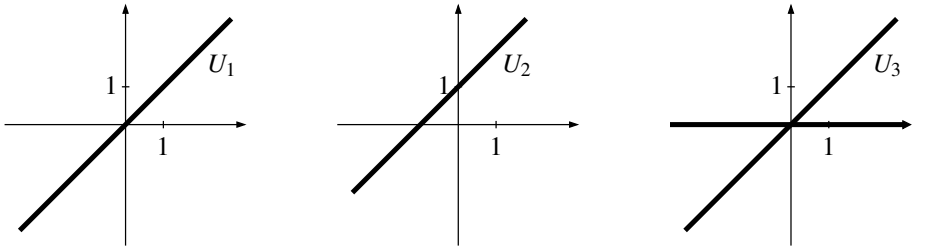
(b) Ist $U$ ein solcher Unterraum, so enthält er wegen der Abgeschlossenheit mit $x_1, \dots, x_n$ auch alle Linearkombinationen dieser Vektoren, also die Menge $\operatorname{Lin} B$. □

**Beispiel 13.12.**

(a) Für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist die von $x$ aufgespannte Ursprungsgerade

$$\mathrm{Lin}(x) = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \subset \mathbb{R}^2$$

nach Lemma 13.11 ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ (und damit nach Lemma 13.10 auch ein Vektorraum). Damit gilt im folgenden Bild also $U_1 \leq \mathbb{R}^2$.




$$U_1 = \mathrm{Lin}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad U_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \mathrm{Lin}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad U_3 = \mathrm{Lin}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cup \mathrm{Lin}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Dagegen ist die verschobene Ursprungsgerade $U_2$ nach Definition 13.8 (a) kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$, da sie den Ursprung nicht enthält. Auch die Vereinigung $U_3$ von zwei Ursprungsgeraden ist kein Unterraum, denn sie ist bzgl. der Vektoraddition nicht abgeschlossen: Es gilt

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in U_3 \text{ und } \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in U_3, \quad \text{aber} \quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \notin U_3.$$

29

(b) Für jeden Vektorraum $V$ sind der Nullvektorraum $\{0\} \subset V$ und der gesamte Raum $V \subset V$ natürlich stets Unterräume von $V$. Sie werden die **trivialen Unterräume** genannt.

(c) Für eine gegebene Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ ist die Teilmenge

$$\mathrm{Pol}(D,\mathbb{R}) := \{f \in \mathrm{Abb}(D,\mathbb{R}) : f \text{ ist eine Polynomfunktion}\}$$

aller Polynomfunktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ ein Unterraum des Vektorraums $\mathrm{Abb}(D,\mathbb{R})$ aus Beispiel 13.3 (c), denn sie enthält die Nullfunktion, und mit $f$ und $g$ sind auch $f+g$ und $\lambda f$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ Polynomfunktionen. Genauso ist für festes $n \in \mathbb{N}$ auch die Menge

$$\mathrm{Pol}_n(D,\mathbb{R}) := \{f \in \mathrm{Abb}(D,\mathbb{R}) : f \text{ ist eine Polynomfunktion vom Grad höchstens } n\}$$

ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(D,\mathbb{R})$.

Wir wollen nun sehen, wie man aus mehreren Unterräumen eines Vektorraums neue konstruieren kann. Eine Möglichkeit besteht dabei einfach darin, ihren Durchschnitt zu bilden. Im Gegensatz dazu ist ihre Vereinigung zwar in der Regel kein Unterraum (wie wir an der Menge $U_3$ in Beispiel 13.12 (a) gesehen haben); es gibt aber trotzdem eine Möglichkeit, aus ihnen einen neuen zu erzeugen, der sie enthält – die korrekte Konstruktion hierfür ist nur nicht die Vereinigung, sondern die sogenannte Summe von Unterräumen:

**Lemma 13.13** (Durchschnitte und Summen von Unterräumen)**.** *Es seien $U_1$ und $U_2$ Unterräume eines Vektorraums $V$. Dann gilt:*

(a) *Der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ ist ebenfalls ein Unterraum von $V$.*

(b) *Die **Summe** $U_1 + U_2 := \{x_1 + x_2 : x_1 \in U_1, x_2 \in U_2\}$ ist ebenfalls ein Unterraum von $V$.*

*Analog gilt dies auch für Durchschnitte $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ und Summen $U_1 + \cdots + U_n$ von mehr als zwei Unterräumen.*

*Beweis.* Wir überprüfen jeweils die Bedingungen aus Definition 13.8. Dabei ist natürlich klar, dass der Nullvektor sowohl in $U_1$ als auch in $U_2$ liegt, und damit auch in $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$. Wir müssen also nur noch die Abgeschlossenheit zeigen.

(a) Es seien $\lambda \in K$ und $x, y \in U_1 \cap U_2$, also $x, y \in U_1$ und $x, y \in U_2$. Da $U_1$ und $U_2$ Unterräume sind, liegen damit sowohl $x+y$ als auch $\lambda x$ in $U_1$ und $U_2$, d. h. in $U_1 \cap U_2$.

(b) Es seien $\lambda \in K$ und $x, y \in U_1 + U_2$, also $x = x_1 + x_2$ und $y = y_1 + y_2$ mit $x_1, y_1 \in U_1$ und $x_2, y_2 \in U_2$. Dann gilt wegen der Abgeschlossenheit von $U_1$ und $U_2$

$$x + y = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = \underbrace{(x_1 + y_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(x_2 + y_2)}_{\in U_2} \in U_1 + U_2,$$

und analog auch

$$\lambda x = \lambda(x_1 + x_2) = \underbrace{\lambda x_1}_{\in U_1} + \underbrace{\lambda x_2}_{\in U_2} \in U_1 + U_2. \qquad \square$$

**Beispiel 13.14** (Summen von erzeugten Unterräumen)**.** Sind zwei Unterräume eines Vektorraums $V$ durch erzeugende Vektoren gegeben als

$$U_1 = \mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\}$$
$$\text{und} \quad U_2 = \mathrm{Lin}(y_1, \dots, y_m) = \{\mu_1 y_1 + \dots + \mu_m y_m : \mu_1, \dots, \mu_m \in K\},$$

so ist nach Definition der Summe natürlich

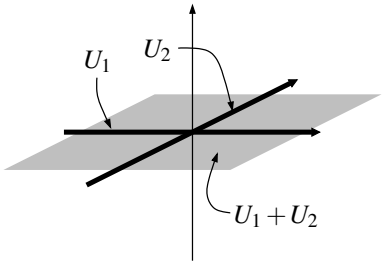
$$\begin{aligned} U_1 + U_2 &= \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \mu_1 y_1 + \dots + \mu_m y_m : \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in K\} \\ &= \mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l). \end{aligned}$$

Als konkretes Beispiel ist für die Unterräume

$$U_1 = \mathrm{Lin}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U_2 = \mathrm{Lin}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^3$ ihr Durchschnitt gleich $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, und ihre Summe wie im Bild rechts dargestellt die Ebene

$$U_1 + U_2 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$




**Aufgabe 13.15.** Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume von $\mathbb{R}^3$ (wobei $x_1$, $x_2$, $x_3$ die Komponenten des Vektors $x \in \mathbb{R}^3$ bezeichnen)?

(a) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b-a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$;

(b) $U_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 + a x_3 = 1 - a\}$ für ein festes, gegebenes $a \in \mathbb{R}$;

(c) $U_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^3 = x_2^3 = x_3^3\}$;

(d) $U_4 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}\}$.

**Aufgabe 13.16.** Es seien $U_1$ und $U_2$ Unterräume eines $K$-Vektorraums $V$. Zeige, dass $U_1 \cup U_2$ genau dann ein Unterraum von $V$ ist, wenn $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$ gilt.

**Aufgabe 13.17.** Im Vektorraum $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ seien

$$U_1 = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$
$$\text{und} \quad U_2 = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

die Teilmengen aller sogenannten geraden bzw. ungeraden Funktionen. Man zeige:

(a) $U_1$ und $U_2$ sind Unterräume von $V$.

(b) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ und $U_1 + U_2 = V$.

# 14. Basen und Dimension

Im letzten Kapitel haben wir in Lemma 13.11 viele Beispiele von Vektorräumen konstruiert, indem wir zu einer (endlichen) Familie $B$ in einem gegebenen Vektorraum den davon erzeugten Unterraum $\operatorname{Lin} B$ gebildet haben. In der Tat haben sehr viele in der Praxis auftretende Vektorräume die Eigenschaft, dass ihre Elemente als Linearkombinationen endlich vieler gegebener Vektoren geschrieben werden können – z. B. alle Unterräume von $K^n$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$, wie wir in Bemerkung 14.24 noch sehen werden. Wir wollen uns daher zur Vereinfachung oft auf solche gemäß der folgenden Definition endlich erzeugten Vektorräume beschränken. Wie man auch ohne diese Bedingung auskommen kann, werden wir kurz am Ende dieses Kapitels in Bemerkung 14.28 diskutieren.

**Definition 14.1** (Erzeugendensysteme und endlich erzeugte Vektorräume)**.** Es sei $V$ ein Vektorraum.

(a) Eine (endliche) Familie $B = (x_1, \dots, x_n)$ von Vektoren in $V$ heißt ein **Erzeugendensystem** von $V$, wenn $\operatorname{Lin} B = V$ gilt, d. h. wenn es zu jedem $x \in V$ Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ gibt mit $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$.

(b) Der Vektorraum $V$ heißt **endlich erzeugt**, wenn er ein solches endliches Erzeugendensystem besitzt.

**Beispiel 14.2.**

(a) Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ bilden die sogenannten **Einheitsvektoren**

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \in K^n$$

ein Erzeugendensystem von $K^n$, denn jedes $x \in K^n$ mit Komponenten $x_1, \dots, x_n \in K$ hat die Form

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Insbesondere ist $K^n$ damit ein endlich erzeugter Vektorraum.

(b) Für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ist auch die Familie

$$B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

ein Erzeugendensystem: Um dies zu zeigen, müssen wir zu jedem $x \in \mathbb{R}^2$ mit Komponenten $x_1$ und $x_2$ Skalare $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ finden mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{r} x_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \text{und} \quad x_2 = \lambda_1 - \lambda_2. \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich aber leicht nach $\lambda_1$ und $\lambda_2$ auflösen; wir erhalten

$$\lambda_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_1 + x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x_1 - x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Familie $B = (x^0, \dots, x^n)$ aller Potenzfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^i$ für $i = 0, \dots, n$ (die wir hier kurz als $x^i$ schreiben) ein Erzeugendensystem des Vektorraums $\operatorname{Pol}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller reellen Polynome vom Grad höchstens $n$ aus Beispiel 13.12 (c), denn jedes solche Polynom ist nach Definition eine Linearkombination dieser Potenzfunktionen.

Insbesondere ist $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ also endlich erzeugt. Der Vektorraum $\mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller reellen Polynome ohne Gradbeschränkung ist dagegen nicht endlich erzeugt: In einer (endlichen) Familie $B$ von Polynomen in $\mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ gibt es nämlich zwangsläufig einen größten auftretenden Grad; Polynome in $\mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ von höherem Grad können dann also nicht in $\mathrm{Lin}\,B$ liegen.

(d) Jedes Erzeugendensystem eines Vektorraums $V$ bleibt natürlich ein Erzeugendensystem von $V$, wenn man beliebige Vektoren von $V$ hinzufügt. So ist z. B. nicht nur wie in (a) die Familie der beiden Einheitsvektoren ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$, sondern auch die Familie

$$B = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right).$$

Diese Erweiterungsmöglichkeit mit beliebigen Vektoren kann Erzeugendensysteme natürlich unnötig groß machen. Wir sollten daher vor allem nach Erzeugendensystemen suchen, die keine überflüssigen Vektoren mehr beinhalten. In diesem Fall kann man dann anschaulich erwarten, dass die Anzahl der Vektoren in einem Erzeugendensystem als „Dimension“ des Vektorraums interpretiert werden kann – so wie in Beispiel 13.12 (a) ein einzelner Vektor eine (eindimensionale) Gerade und in Bemerkung 13.6 (c) zwei Vektoren eine (zweidimensionale) Ebene aufgespannt haben. Das Ziel dieses Kapitels ist es, diese Idee genau zu untersuchen und damit insbesondere auch den sehr wichtigen Dimensionsbegriff mathematisch exakt einzuführen.

## 14.A Lineare Unabhängigkeit und Basen

In Beispiel 14.2 (d) haben wir schon einen Fall eines Erzeugendensystems $B$ mit überflüssigen Vektoren gesehen, nämlich

$$B = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right) \quad \text{für den Vektorraum} \quad V = \mathbb{R}^2.$$

Dass hier gar nicht alle drei Vektoren von $B$ benötigt werden, um $V$ zu erzeugen, liegt einfach daran, dass sich einer von ihnen schon als Linearkombination der beiden anderen darstellen lässt: Es ist z. B.

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

so dass wir diesen Vektor im Erzeugendensystem nicht benötigen. Alternativ könnten wir diese Gleichung auch nach einem der anderen Vektoren auflösen und so sehen, dass man stattdessen auch einen der anderen beiden Vektoren aus $B$ weglassen könnte. Um hier keine Wahl treffen zu müssen, nach welchem Vektor aufgelöst werden soll, schreibt man die obige Gleichung aber in der Regel als

$$2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

also als eine Linearkombination des Nullvektors aus den gegebenen Vektoren. Um Erzeugendensysteme ohne überflüssige Vektoren zu finden, sollten wir also fordern, dass sie keine solchen Linearkombinationen des Nullvektors zulassen. Solche Erzeugendensysteme bezeichnet man als *Basen*:

**Definition 14.3** (Basen)**.** Es sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Familie von Vektoren in einem Vektorraum $V$.

(a) Die Familie $B$ heißt **linear abhängig**, wenn es eine Linearkombination $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ des Nullvektors gibt, in der mindestens ein $\lambda_i$ ungleich 0 ist (man nennt dies auch eine *nichttriviale Linearkombination des Nullvektors*).

Ist das Gegenteil der Fall, folgt aus einer Linearkombination $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ des Nullvektors mit zunächst beliebigen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ also bereits, dass $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ gelten muss, so heißt $B$ **linear unabhängig**.

(b) Die Familie $B$ heißt eine **Basis** von $V$, wenn $B$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $V$ ist.

**Bemerkung 14.4.** Es sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Familie von Vektoren in einem Vektorraum $V$.

(a) Enthält $B$ den Nullvektor, d. h. gilt $x_i = 0$ für ein $i$, so ist $B$ in jedem Fall linear abhängig, denn dann ist ja $1 \cdot x_i = 0$ eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors.

(b) Ebenso ist $B$ immer linear abhängig, wenn die Familie einen Vektor mehrfach enthält, also wenn $x_i = x_j$ für gewisse $i \neq j$ gilt, da dann $1 \cdot x_i - 1 \cdot x_j = 0$ eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors ist.

**Beispiel 14.5.**

(a) Das Erzeugendensystem $B = (e_1, \dots, e_n)$ der Einheitsvektoren von $K^n$ aus Beispiel 14.2 (a) ist linear unabhängig, denn sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$0 = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

so folgt daraus natürlich sofort $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Damit ist $B$ also eine Basis von $K^n$; man nennt sie die **Standardbasis** von $K^n$.

Als Spezialfall davon für $n = 0$ ist die leere Familie eine Basis des Nullvektorraums (siehe Definition 13.5 (b)).

(b) Auch das Erzeugendensystem

$$B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^2$ aus Beispiel 14.2 (b) ist linear unabhängig und damit eine Basis von $\mathbb{R}^2$: Sind nämlich $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{r} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \text{und} \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \end{array}$$

so folgt aus diesem Gleichungssystem natürlich sofort $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Neben der Standardbasis aus (a) haben wir damit also noch eine weitere Basis von $\mathbb{R}^2$ gefunden und sehen damit schon, dass Basen von Vektorräumen nicht eindeutig bestimmt sind. Allerdings werden wir in Folgerung 14.15 noch zeigen, dass alle Basen eines endlich erzeugten Vektorraums zumindest gleich viele Elemente haben. Dass unsere gerade gefundene Basis $B$ genau wie die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ aus zwei Vektoren besteht, ist also kein Zufall.

(c) Ebenfalls in $\mathbb{R}^2$ ist wie in der Einleitung zu diesem Abschnitt die Familie

$$B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \quad \text{wegen} \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear abhängig, und damit auch keine Basis von $\mathbb{R}^2$.

Beachte aber, dass mit einer Rechnung analog zu (b) je zwei der drei Vektoren dieser Familie $B$ stets linear unabhängig sind. Die lineare Unabhängigkeit einer Familie kann also *nicht* überprüft werden, indem man immer nur zwei ihrer Vektoren miteinander vergleicht!

(d) Wir betrachten noch einmal den Vektorraum $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller reellen Polynome vom Grad höchstens $n$ mit dem Erzeugendensystem $B = (x^0, \dots, x^n)$ der Potenzfunktionen aus Beispiel 14.2 (c). Da eine nicht-triviale Linearkombination dieser Potenzfunktionen nach dem Koeffizientenvergleich aus Lemma 3.22 nie die Nullfunktion sein kann, ist dieses Erzeugendensystem auch linear unabhängig, und damit eine Basis von $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

**Aufgabe 14.6.** Untersuche die Familie $B$ in den folgenden Fällen auf lineare Unabhängigkeit im Vektorraum $V$:

(a) $V = \mathbb{R}^3$; $B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$.

(b) $V$ ein beliebiger Vektorraum; $B = (x+y, x+z, y+z)$ für drei linear unabhängige Vektoren $x, y, z$.

(c) $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \mathbb{R})$; $B = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ mit

$$\varphi_1 \colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x, \quad \varphi_2 \colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}, \quad \varphi_3 \colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

**Aufgabe 14.7.** Es seien $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $(x_1, \dots, x_n)$ eine Basis eines Vektorraums $V$. Wir setzen

$$y_k := \sum_{i=1}^{k} x_i \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n.$$

Zeige, dass die Familie $(y_1, \dots, y_n)$ dann ebenfalls eine Basis von $V$ ist.

Oft ist die folgende äquivalente Umformulierung der Basiseigenschaft nützlich:

**Lemma und Definition 14.8** (Alternatives Kriterium für Basen)**.** *Eine Familie $B = (x_1, \dots, x_n)$ von Vektoren in einem Vektorraum $V$ ist genau dann eine Basis von $V$, wenn es zu jedem Vektor $x \in V$ eindeutig bestimmte Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ gibt mit $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$.*

*In diesem Fall nennt man $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die **Koordinaten** von $x$ bezüglich $B$.*

*Beweis.* Wir zeigen beide Richtungen der behaupteten Äquivalenz:

„⇒“: Es sei $B$ eine Basis von $V$. Da $B$ dann ein Erzeugendensystem von $V$ ist, gibt es zu jedem $x \in V$ Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$.

Diese Koordinaten sind auch eindeutig bestimmt: Sind nämlich $\mu_1, \dots, \mu_n$ weitere Skalare mit $x = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n$, so gilt

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1 - \mu_1) x_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) x_n = 0,$$

und damit folgt wegen der linearen Unabhängigkeit von $B$ sofort $\lambda_i - \mu_i = 0$, also $\lambda_i = \mu_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.

„⇐“: Ist jeder Vektor in $V$ eine Linearkombination der Vektoren aus $B$, so bedeutet dies natürlich $\mathrm{Lin}\, B = V$. Außerdem ist $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ nach Voraussetzung die einzige Möglichkeit, den Nullvektor als Linearkombination $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ zu schreiben. Damit ist $B$ auch linear unabhängig. □

**Beispiel 14.9.**

(a) Die Komponenten eines Vektors $x \in K^n$ sind genau seine Koordinaten bezüglich der Standardbasis aus Beispiel 14.5 (a). Auch ohne Erwähnung einer Basis werden wir sie daher in Zukunft oft einfach seine Koordinaten nennen.

(b) Analog sind die Koeffizienten eines Polynoms in $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gerade seine Koordinaten bezüglich der Basis $(x^0, \dots, x^n)$ aus Beispiel 14.5 (d).

**Bemerkung 14.10.**

(a) Lemma 14.8 besagt anschaulich, dass wir einen Vektor in einem Vektorraum $V$ bei gegebener Basis $B$ genauso gut auch durch den Vektor in $K^n$ seiner Koordinaten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ bezüglich $B$ beschreiben können. Wir werden dies in den Abschnitten 16.B und 16.C noch genau untersuchen.

(b) Um einen Vektor wie in (a) durch seine Koordinaten bezüglich einer Basis $B$ beschreiben zu können, ist es wichtig, dass wir Basen als *Familien* und nicht als *Mengen* definiert haben, da die Elemente einer Menge keine vorgegebene Reihenfolge haben und wir somit bei einer Menge $B$ keine Möglichkeit hätten, die Koordinaten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ eindeutig den Vektoren in $B$ zuzuordnen.

30

Wie können wir nun eine Basis eines endlich erzeugten Vektorraums $V$ finden? Gemäß der Idee in der Einleitung zu diesem Abschnitt sollten wir dazu mit einem Erzeugendensystem von $V$ starten können, in dem wir dann fortlaufend Vektoren weglassen, die in nicht-trivialen Linearkombinationen des Nullvektors auftreten. Wir wollen jetzt zeigen, dass dieses Verfahren in der Tat immer funktioniert.

**Satz 14.11 (Basisauswahl).** *Aus jedem (endlichen) Erzeugendensystem eines Vektorraums $V$ kann man eine Basis von $V$ auswählen.*

*Insbesondere besitzt also jeder endlich erzeugte Vektorraum eine Basis.*

*Beweis.* Es sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ ein Erzeugendensystem von $V$. Ist $B$ bereits linear unabhängig, so sind wir natürlich schon fertig. Andernfalls gibt es nach Definition 14.3 (a) eine nicht-triviale Linearkombination $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ des Nullvektors. Nach evtl. Umnummerieren der Vektoren von $B$ können wir dabei annehmen, dass $\lambda_1 \neq 0$ gilt (also dass „$x_1$ in der Linearkombination vorkommt“). Wir lassen dann $x_1$ weg, setzen also $B' := (x_2, \dots, x_n)$, und behaupten, dass $B'$ immer noch ein Erzeugendensystem von $V$ ist.

In der Tat ist dies leicht einzusehen: Wegen der vorausgesetzten Linearkombination des Nullvektors und $\lambda_1 \neq 0$ ist ja

$$x_1 = \frac{1}{\lambda_1} \cdot (-\lambda_2 x_2 - \dots - \lambda_n x_n) \quad \in \operatorname{Lin} B'.$$

Damit enthält der Unterraum $\operatorname{Lin} B'$ alle Vektoren $x_1, \dots, x_n$, nach Lemma 13.11 (b) also auch den von diesen Vektoren erzeugten Unterraum $\operatorname{Lin}(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{Lin} B = V$. Es ist daher auch $\operatorname{Lin} B' = V$, d. h. $B'$ ist immer noch ein Erzeugendensystem von $V$.

Wir wiederholen dieses Verfahren nun einfach rekursiv mit der neuen Familie $B'$. Da wir am Anfang nur $n$ Vektoren hatten, muss es nach spätestens $n$ Schritten mit einer Basis von $V$ abbrechen. □

Als Nächstes wollen wir verschiedene Basen eines Vektorraums miteinander vergleichen können, um zu sehen, dass sie alle gleich viele Elemente besitzen müssen. Wenn ihr jetzt denkt, dass diese Aussage doch „offensichtlich“ sei, habt ihr vermutlich schon einen anschaulichen Dimensionsbegriff im Kopf und meint, dass eine Basis eines „$n$-dimensionalen Vektorraums“ aus $n$ Vektoren bestehen müsse, also z. B. eine Basis einer Geraden aus einem Vektor und eine Basis einer Ebene aus zwei Vektoren. Diese Anschauung wird sich natürlich auch gleich in Abschnitt 14.B als richtig herausstellen – aber dieser Dimensionsbegriff ist nicht Teil der Definition 13.1 eines Vektorraums, und daher sind derartige Aussagen in jedem Fall beweisbedürftig! Wir beginnen dazu mit einem Hilfsresultat, in dem wir zwei Basen miteinander vergleichen, die sich in nur einem Element unterscheiden.

**Lemma 14.12 (Austauschlemma).** *Es sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis eines Vektorraums $V$. Weiterhin sei $y \in V$ ein beliebiger Vektor, den wir dann also nach Lemma 14.8 eindeutig als Linearkombination $y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ für gewisse $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ schreiben können.*

*Ist dann $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $\lambda_i \neq 0$, so ist auch $B' := (x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n)$ eine Basis von $V$, d. h. wir können den Vektor $x_i$ in der Basis durch $y$ ersetzen.*

*Beweis.* Nach evtl. Umbenennung der Vektoren können wir ohne Einschränkung wieder $i = 1$ annehmen, also $\lambda_1 \neq 0$ und $B' = (y, x_2, \dots, x_n)$. Wir zeigen, dass $B'$ eine Basis von $V$ ist:

(a) $B'$ ist ein Erzeugendensystem von $V$: Analog zum Beweis von Satz 14.11 gilt

$$x_1 = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \big(y - \lambda_2 x_2 - \dots - \lambda_n x_n\big) \quad \in \operatorname{Lin} B'.$$

Also enthält $\operatorname{Lin} B'$ alle Vektoren $x_1, \dots, x_n$, und damit nach Lemma 13.11 (b) auch den davon erzeugen Unterraum $\operatorname{Lin}(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{Lin} B = V$. Dies bedeutet genau, dass $B'$ ein Erzeugendensystem von $V$ ist.

(b) $B'$ ist linear unabhängig: Es seien $\mu_1,\dots,\mu_n \in K$ mit $\mu_1 y + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_n x_n = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_1(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_n x_n \\ &= (\mu_1\lambda_1)x_1 + (\mu_1\lambda_2 + \mu_2)x_2 + \dots + (\mu_1\lambda_n + \mu_n)x_n. \end{aligned}$$

Dies ist nun eine Linearkombination des Nullvektors mit Vektoren aus $B$. Da $B$ linear unabhängig ist, müssen darin alle Vorfaktoren verschwinden, d. h. es gilt $\mu_1\lambda_1 = 0$ (und damit $\mu_1 = 0$ wegen $\lambda_1 \neq 0$) und dann auch $\mu_1\lambda_i + \mu_i = \mu_i = 0$ für alle $i = 2,\dots,n$. Also ist $B'$ linear unabhängig. □

**Beispiel 14.13.** Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $B = (e_1, e_2, e_3)$ aus Beispiel 14.5 (a). Weiterhin sei

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2.$$

Da in dieser Linearkombination die Vektoren $e_1$ und $e_2$ mit Vorfaktoren ungleich Null vorkommen, folgt aus dem Austauschlemma 14.12 also, dass wir einen dieser Vektoren in $B$ durch $y$ ersetzen können, d. h. dass auch $(y, e_2, e_3)$ und $(e_1, y, e_3)$ Basen von $\mathbb{R}^3$ sind. Im Gegensatz dazu ist $(e_1, e_2, y)$ wegen der Linearkombination $e_1 + 2e_2 - y = 0$ linear abhängig, und somit keine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Der folgende Satz ergibt sich nun einfach, indem man Lemma 14.12 mehrmals nacheinander anwendet.

**Satz 14.14 (Steinitzscher Austauschsatz).** *Es seien $B = (x_1,\dots,x_n)$ eine Basis und $(y_1,\dots,y_r)$ eine linear unabhängige Familie in einem Vektorraum $V$.*

*Dann ist $r \leq n$, und $x_1,\dots,x_n$ lassen sich so umnummerieren, dass $B' = (y_1,\dots,y_r,x_{r+1},\dots,x_n)$ ebenfalls eine Basis von $V$ ist (man kann in $B$ also $r$ der Vektoren $x_1,\dots,x_n$ durch die gegebenen Vektoren $y_1,\dots,y_r$ ersetzen).*

*Beweis.* Wir beweisen den Satz mit Induktion über $r$; für $r = 0$ ist nichts zu zeigen.

Für den Induktionsschritt $r \to r+1$ sei nun $(y_1,\dots,y_{r+1})$ linear unabhängig. Da dann natürlich auch $(y_1,\dots,y_r)$ linear unabhängig ist, gilt nach Induktionsvoraussetzung $r \leq n$, und nach geeigneter Umnummerierung der Vektoren in $B$ ist $(y_1,\dots,y_r,x_{r+1},\dots,x_n)$ eine Basis von $V$. Wir können den Vektor $y_{r+1}$ also als Linearkombination

$$y_{r+1} = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_r y_r + \lambda_{r+1} x_{r+1} + \dots + \lambda_n x_n$$

schreiben. Dabei muss mindestens einer der Vorfaktoren $\lambda_{r+1},\dots,\lambda_n$ ungleich Null sein, denn andernfalls wäre

$$\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_r y_r - y_{r+1} = 0$$

im Widerspruch dazu, dass die Familie $(y_1,\dots,y_{r+1})$ linear unabhängig ist. Insbesondere muss also $r+1 \leq n$ gelten, und nach evtl. Umbenennung von $x_{r+1},\dots,x_n$ können wir annehmen, dass $\lambda_{r+1} \neq 0$ ist. Dann können wir aber nach dem Austauschlemma 14.12 den Vektor $x_{r+1}$ in der Basis $(y_1,\dots,y_r,x_{r+1},\dots,x_n)$ durch $y_{r+1}$ ersetzen, d. h. auch $(y_1,\dots,y_{r+1},x_{r+2},\dots,x_n)$ ist eine Basis von $V$. Damit ist der Satz mit Induktion bewiesen. □

Der Steinitzsche Austauschsatz hat zwei sehr wichtige Konsequenzen: zum einen die schon angekündigte Tatsache, dass alle Basen eines endlich erzeugten Vektorraums gleich viele Elemente haben, und zum anderen ein „Gegenstück“ zur Basisauswahl in Satz 14.11.

**Folgerung 14.15.** *Alle Basen eines endlich erzeugten Vektorraums haben gleich viele Elemente.*

*Beweis.* Es seien $(x_1,\dots,x_n)$ und $(y_1,\dots,y_r)$ zwei Basen eines endlich erzeugten Vektorraums. Nach Satz 14.14 folgt dann direkt $r \leq n$, und durch Vertauschen der Rollen der beiden Basen analog auch $n \leq r$. Damit ist also wie behauptet $r = n$. □

**Folgerung 14.16 (Basisergänzung).** *Jede linear unabhängige Familie in einem endlich erzeugten Vektorraum $V$ kann zu einer Basis ergänzt werden.*

*Beweis.* Es sei $(y_1,\dots,y_r)$ eine linear unabhängige Familie in $V$. Nach Satz 14.11 existiert ferner auch eine Basis $B=(x_1,\dots,x_n)$ von $V$. Die in Satz 14.14 konstruierte Familie $B'$ ergänzt dann $(y_1,\dots,y_r)$ zu einer Basis von $V$. □

**Aufgabe 14.17.** Es sei $U=\operatorname{Lin}(x_1,x_2,x_3)\leq\mathbb{R}^3$ mit

$$x_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad x_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad x_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Bestimme eine Basis von $U$, und ergänze sie zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$.

**Aufgabe 14.18.** In $\operatorname{Pol}_3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ betrachten wir die Familie $B=(1+x,x+x^2,x^2+x^3,x^3+1)$.

Wähle aus $B$ eine Basis von $\operatorname{Lin}B$ aus, und stelle die übrigen Elemente von $B$ als Linearkombinationen dieser Basis dar.

## 14.B Die Dimension von Vektorräumen

Da wir jetzt gesehen haben, dass jeder endlich erzeugte Vektorraum nach Satz 14.11 eine Basis besitzt, und verschiedene Basen nach Folgerung 14.15 gleich viele Elemente haben, können wir nun wie erwartet den Dimensionsbegriff einführen:

**Definition 14.19** (Dimension von Vektorräumen)**.** Für einen endlich erzeugten Vektorraum $V$ ist die **Dimension**, geschrieben $\dim V$, definiert als die Anzahl der Elemente in einer (beliebigen) Basis von $V$.

Ist $V$ nicht endlich erzeugt (und hat damit natürlich auch keine endliche Basis), so schreiben wir formal $\dim V=\infty$. Ein endlich erzeugter Vektorraum wird daher oft auch als **endlich-dimensionaler Vektorraum** bezeichnet.

**Beispiel 14.20.**

(a) Nach Beispiel 14.5 (a) ist $\dim K^n=n$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

(b) Nach Beispiel 14.5 (d) hat $\operatorname{Pol}_n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ eine Basis $(x^0,x^1,\dots,x^n)$, und damit Dimension $n+1$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Da der Raum $\operatorname{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller reellen Polynome dagegen nach Beispiel 14.2 (c) nicht endlich erzeugt ist, ist $\dim\operatorname{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})=\infty$.

Unsere erste Anwendung des Dimensionsbegriffs ist ein vereinfachtes Kriterium dafür, ob eine gegebene Familie $B$ eines endlich erzeugten Vektorraums $V$ eine Basis ist: Wenn $B$ die richtige Anzahl von Vektoren enthält, dann brauchen wir nicht mehr zu überprüfen, dass $B$ ein Erzeugendensystem *und* linear unabhängig ist, sondern es reicht bereits *eine* dieser beiden Eigenschaften.

**Folgerung 14.21** (Basiskriterium)**.** *Es sei $B$ eine Familie von $n$ Vektoren in einem endlich erzeugten Vektorraum $V$.*

(a) *Ist $B$ ein Erzeugendensystem von $V$, so gilt $n\geq\dim V$.*

(b) *Ist $B$ linear unabhängig, so gilt $n\leq\dim V$.*

*Ist außerdem eine dieser beiden Voraussetzungen erfüllt, so ist $B$ genau dann eine Basis von $V$, wenn sogar $n=\dim V$ gilt.*

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar mit Hilfe der Basisauswahl und -ergänzung:

(a) Nach Satz 14.11 können wir aus $B$ eine Basis $B'$ von $V$ auswählen. Da diese Basis $B'$ dann aus $\dim V$ Vektoren besteht, muss natürlich $\dim V\leq n$ gelten.

(b) Nach Folgerung 14.16 können wir $B$ zu einer Basis $B'$ von $V$ ergänzen. Da diese Basis wieder aus $\dim V$ Vektoren besteht, folgt $\dim V\geq n$.

In beiden Fällen gilt dabei natürlich genau dann $n = \dim V$, wenn bereits $B' = B$ ist, d. h. $B$ schon eine Basis von $V$ ist. □

**Bemerkung 14.22.**

(a) Ist $B$ eine Familie von $n$ Vektoren in einem Vektorraum $V$, so ist $B$ natürlich ein Erzeugendensystem von $\operatorname{Lin} B$. Nach Folgerung 14.21 (a) gilt dann also $\dim \operatorname{Lin} B \leq n$, mit Gleichheit genau dann, wenn $B$ linear unabhängig und damit eine Basis von $\operatorname{Lin} B$ ist.

Insbesondere ist also für jeden Vektor $x \in V \setminus \{0\}$ die Ursprungsgerade $\operatorname{Lin}(x) = \{\lambda x : \lambda \in K\}$ ein eindimensionaler Unterraum von $V$.

(b) Für die Anschauung ist auch oft die folgende Umformulierung von Folgerung 14.21 nützlich: Ist $V$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum, so haben wir dort gerade in Teil (a) gesehen, dass ein Erzeugendensystem von $V$ immer mindestens $n$ Vektoren enthält, und genau dann eine Basis von $V$ ist, wenn es *genau* $n$ Vektoren enthält. Da man größere Erzeugendensysteme mit Hilfe der Basisauswahl immer zu einer Basis verkleinern kann, bedeutet dies also: *Eine Basis ist dasselbe wie ein minimales Erzeugendensystem* – also eines, das nicht mehr weiter verkleinert werden kann.

Analog ergibt sich aus Folgerung 14.21 (b) zusammen mit der der Basisergänzung: *Eine Basis ist dasselbe wie eine maximale linear unabhängige Familie* – also eine, die durch Vergrößern in jedem Fall linear abhängig wird.

Als Nächstes wollen wir die Dimensionen von Unterräumen endlich erzeugter Vektorräume untersuchen, und dabei zunächst einmal zeigen, dass solche Unterräume auch selbst wieder endlich erzeugt sind. Dieses Resultat ist vermutlich nicht wirklich überraschend, aber dennoch auch nicht völlig offensichtlich, da es keine einfache Möglichkeit gibt, aus einem Erzeugendensystem eines Vektorraums ein Erzeugendensystem eines gegebenen Unterraums zu konstruieren.

**Lemma 14.23.** *Es sei $U$ ein Unterraum eines endlich erzeugten $K$-Vektorraums $V$. Dann gilt:*

(a) *$U$ ist ebenfalls endlich erzeugt.*

(b) *$\dim U \leq \dim V$, mit Gleichheit genau falls $U = V$.*

*Beweis.* Es sei $n := \dim V$.

(b) Angenommen, wir wissen bereits, dass $U$ endlich erzeugt ist. Dann können wir nach Satz 14.11 eine Basis $B$ von $U$ mit $\dim U$ Elementen wählen. Da $B$ dann auch in $V$ linear unabhängig ist, bedeutet dies nach Folgerung 14.21 (b) aber $\dim U \leq \dim V$, mit Gleichheit genau dann, wenn $B$ schon eine Basis von $V$ ist, also $U = V$ gilt.

(a) Wäre $U$ nicht endlich erzeugt, so könnten wir der Reihe nach Vektoren $x_1, x_2, x_3, \ldots$ in $U$ finden mit $x_{k+1} \notin U_k := \operatorname{Lin}(x_1, \ldots, x_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, denn $U_k$ ist endlich erzeugt und kann damit nicht gleich $U$ sein. Da die Vektorräume $\{0\} = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \cdots \subsetneq U_{n+1} \subset V$ alle endlich erzeugt sind, folgt daraus aber nach der schon gezeigten Aussage (b)

$$0 = \dim U_0 < \dim U_1 < \cdots < \dim U_{n+1} \leq \dim V = n.$$

Dies ist ein Widerspruch, da es von 0 bis $n$ keine $n+2$ natürlichen Zahlen gibt. □

**Bemerkung 14.24** (Berechnung von Unterräumen)**.** Anders ausgedrückt besagt Lemma 14.23, dass jeder Unterraum $U$ eines endlich erzeugten Vektorraums ein (endliches) Erzeugendensystem und damit nach Satz 14.11 auch eine Basis besitzt, also als $U = \operatorname{Lin}(x_1, \ldots, x_n)$ für linear unabhängige Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ (mit $n = \dim U$) geschrieben werden kann. Wenn wir im Folgenden sagen, dass wir einen Unterraum eines endlich erzeugten Vektorraums *berechnen* wollen, meinen wir damit, ihn so darzustellen, also eine Basis (und damit auch seine Dimension) zu bestimmen.

Für unsere bisherigen Konstruktionen mit Unterräumen, also den Durchschnitt und die Summe aus Lemma 13.13, wollen wir nun Algorithmen (d. h. Verfahren) angeben, um sie in diesem Sinne zu berechnen. Die folgende allgemeine Dimensionsaussage ist dafür nützlich:

**Satz 14.25** (Dimensionsformel für Durchschnitte und Summen)**.** *Sind $U_1$ und $U_2$ Unterräume eines endlich-dimensionalen $K$-Vektorraums $V$, so gilt*

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2.$$

*Beweis.* Nach Lemma 14.23 sind alle betrachteten Unterräume endlich erzeugt. Wir können nach Satz 14.11 also eine Basis $(x_1, \dots, x_n)$ von $U_1 \cap U_2$ wählen und sie nach Folgerung 14.16 zu Basen

$$\begin{aligned} &(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) && \text{von } U_1 \\ \text{und} \quad &(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_p) && \text{von } U_2 \end{aligned}$$

ergänzen. Wir zeigen, dass $B = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_p)$ dann eine Basis von $U_1 + U_2$ ist:

(a) $B$ ist ein Erzeugendensystem von $U_1 + U_2$ nach Beispiel 13.14.

(b) $B$ ist linear unabhängig: Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m, \nu_1, \dots, \nu_p \in K$ mit

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \mu_1 y_1 + \dots + \mu_m y_m + \nu_1 z_1 + \dots + \nu_p z_p = 0, \qquad (*)$$

also

$$\underbrace{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \mu_1 y_1 + \dots + \mu_m y_m}_{\in U_1} = \underbrace{-\nu_1 z_1 - \dots - \nu_p z_p}_{\in U_2} \quad \in U_1 \cap U_2.$$

Da dieser Vektor in $U_1 \cap U_2$ liegt und $(x_1, \dots, x_n)$ diesen Unterraum erzeugt, gibt es also $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n \in K$ mit

$$-\nu_1 z_1 - \dots - \nu_p z_p = \lambda'_1 x_1 + \dots + \lambda'_n x_n \quad \Rightarrow \quad \lambda'_1 x_1 + \dots + \lambda'_n x_n + \nu_1 z_1 + \dots + \nu_p z_p = 0.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von $(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_p)$ folgt damit $\nu_1 = \dots = \nu_p = 0$. Setzen wir dies schließlich noch in $(*)$ ein, erhalten wir daraus mit der linearen Unabhängigkeit von $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ auch $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \mu_1 = \dots = \mu_m = 0$.

Also ist $B$ eine Basis von $U_1 + U_2$. Damit folgt nun durch Abzählen der Elemente unserer Basen

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = (n + m + p) + n = (n + m) + (n + p) = \dim U_1 + \dim U_2. \qquad \square$$

31

**Beispiel 14.26.** Beachte, dass nur die Summe der Dimensionen von $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ durch $\dim U_1$ und $\dim U_2$ bestimmt sind, nicht aber die Dimensionen von $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ selbst. Als einfaches Beispiel hierfür seien $U_1$ und $U_2$ zwei Geraden (durch den Ursprung) in $\mathbb{R}^2$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

(a) Ist $U_1 = U_2$, so ist $U_1 \cap U_2 = U_1 + U_2 = U_1 = U_2$, und die Dimensionsformel ergibt

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = 1 + 1 = 1 + 1 = \dim U_1 + \dim U_2.$$

(b) Ist hingegen $U_1 \neq U_2$, so ist $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ und $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^2$, und damit

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = 0 + 2 = 1 + 1 = \dim U_1 + \dim U_2.$$

**Algorithmus 14.27** (Berechnung von Durchschnitten und Summen)**.** Es seien $U_1$ und $U_2$ zwei Unterräume eines Vektorraums $V$, die wir nach Bemerkung 14.24 als $U_1 = \mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_k)$ und $U_2 = \mathrm{Lin}(y_1, \dots, y_l)$ schreiben können (wobei die gewählten Erzeuger hier nicht unbedingt linear unabhängig sein müssen). Als konkretes Beispiel betrachten wir dabei im Folgenden den Fall $V = \mathbb{R}^4$ und $k = l = 2$ mit

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^4.$$

In diesem Fall sind die Familien $(x_1, x_2)$ und $(y_1, y_2)$ natürlich linear unabhängig, und damit ist $\dim U_1 = \dim U_2 = 2$.

(a) Die Vektoren im Schnitt $U_1 \cap U_2$ erhält man offensichtlich durch Gleichsetzen

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = -\mu_1 y_1 - \dots - \mu_l y_l \tag{1}$$

der Elemente von $U_1$ und $U_2$, und damit durch Auflösen der Gleichung

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \mu_1 y_1 + \dots + \mu_l y_l = 0 \tag{2}$$

nach $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_l$ (die Vorzeichen spielen hierbei keine Rolle, da mit $y$ auch $-y$ in $U_2$ liegt, und sind daher so gewählt, dass sie sich in (2) wegheben). Die sich als Lösung ergebenden Werte für $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ können dann in die linke Seite von (1) eingesetzt werden und liefern die gesuchten Vektoren im Schnitt $U_1 \cap U_2$.

Für unser konkretes Beispiel ist (2) das Gleichungssystem

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_1 + \mu_1 &= 0, \\ \lambda_2 + \mu_1 &= 0, \\ \lambda_2 + \mu_2 &= 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu_1 + \mu_2 &= 0. \end{aligned}$$

Es ist offensichtlich äquivalent zu $\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu_1 = -\mu_2$ (die letzte Gleichung ist dann automatisch mit erfüllt) und hat damit die allgemeine Lösung $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda$, $\mu_1 = -\lambda$, $\mu_2 = -\lambda$ für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die linke Seite von (1) liefert also

$$U_1 \cap U_2 = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Lin} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

und damit insbesondere $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$.

(b) Für die Summe der gegebenen Unterräume $U_1$ und $U_2$ wissen wir aus Beispiel 13.14 bereits, dass $U_1 + U_2 = \operatorname{Lin}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l)$ gilt. Um eine Basis von $U_1 + U_2$ zu bestimmen, müssen wir aus diesen Vektoren also nur noch mit Satz 14.11 eine Basis auswählen.

Beachte, dass wir dazu in (a) (mit $\lambda = 1$) bereits die Linearkombination $x_1 + x_2 - y_1 - y_2 = 0$ des Nullvektors berechnet haben, in der jeder der vier Ausgangsvektoren vorkommt. Nach dem Verfahren aus dem Beweis von Satz 14.11 können wir also einen beliebigen dieser Vektoren aus dem Erzeugendensystem streichen und erhalten so z. B. auch $U_1 + U_2 = \operatorname{Lin}(x_1, x_2, y_1)$. Nach der Dimensionsformel aus Satz 14.25 ist aber auch

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) \overset{\text{(a)}}{=} 2 + 2 - 1 = 3,$$

und damit ist $(x_1, x_2, y_1)$ nach Folgerung 14.21 eine Basis von $U_1 + U_2$.

Wir haben uns in diesem Kapitel jetzt ausführlich mit Basen endlich-dimensionaler Vektorräume beschäftigt. Da in der Praxis aber auch manchmal unendlich-dimensionale Vektorräume eine Rolle spielen, wollen wir nun zum Abschluss dieses Kapitels kurz diskutieren, welche Änderungen an unseren Konstruktionen in diesem Fall nötig sind und wie sie unsere Ergebnisse zu Basen beeinflussen.

**Bemerkung 14.28** (Unendlich-dimensionale Vektorräume)**.** Ist $V$ ein beliebiger Vektorraum, der also nicht unbedingt von endlich vielen Elementen erzeugt werden kann (wie z. B. $\operatorname{Pol}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ in Beispiel 14.2 (c) oder der noch größere Vektorraum $\operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aus Beispiel 13.3 (c)), müssen wir zunächst einmal auch möglicherweise unendliche Familien von Vektoren in $V$ betrachten. Eine solche Familie besteht aus einer evtl. unendlichen Indexmenge $I$ zusammen mit einem Vektor $x_i$ für alle $i \in I$; wir schreiben sie (analog zu Folgen in Definition 5.1 (a)) als $B = (x_i)_{i \in I}$. Im Fall einer endlichen Familie könnten wir dabei die Indexmenge $I = \{1, \dots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ wählen und wieder die bisherige Notation $B = (x_1, \dots, x_n)$ verwenden; im Fall der Indexmenge $I = \mathbb{N}$ könnten wir die Familie auch als $B = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ schreiben.

Wichtig ist jedoch, dass wir auch im Fall einer unendlichen Familie als Linearkombinationen daraus *keine unendlichen Summen* bilden können, da wir hierfür einen Konvergenzbegriff wie z. B. in Definition 7.1 bräuchten – der in der linearen Algebra (über einem beliebigen Grundkörper) aber

nicht existiert. Für eine Familie $B = (x_i)_{i\in I}$ definiert man eine *Linearkombination* der Vektoren aus $B$ daher als einen Vektor der Form

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i \quad \in V, \tag{$*$}$$

wobei $\lambda_i \in K$ für alle $i \in I$ gilt *und nur endlich viele dieser* $\lambda_i$ *ungleich* 0 *sind* – so dass der Ausdruck $(*)$ nach Weglassen aller Summanden, die 0 sind, also in jedem Fall nur eine endliche Summe ist. Mit anderen Worten sind Linearkombinationen in der linearen Algebra also immer endlich.

Die darauf aufbauenden Definitionen sind nun wieder wie erwartet: Den Unterraum aller dieser Linearkombinationen bezeichnen wir mit $\operatorname{Lin} B$. Die Familie $B$ heißt ein *Erzeugendensystem* von $V$, wenn $\operatorname{Lin} B = V$ gilt, und *linear unabhängig*, wenn es keine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors mit Vektoren aus $B$ gibt. Ist $B$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $V$, so heißt $B$ eine *Basis* von $V$. Hier sind zwei einfache Beispiele dafür:

(a) Die (unendliche) Familie aller Potenzfunktionen $(x^i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine Basis des Polynomraums $\operatorname{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$: Sie ist ein Erzeugendensystem, da jedes Polynom eine (endliche) Linearkombination dieser Potenzfunktionen ist, und linear unabhängig nach dem Koeffizientenvergleich wie in Beispiel 14.5 (d).

(b) Im Vektorraum $\operatorname{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ aller reellen Zahlenfolgen können wir die Familie $B = (e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aller „Einheitsfolgen“ $e_i = (0,\dots,0,1,0,0,\dots)$ betrachten, wobei die 1 jeweils an der Stelle $i$ steht. Wegen der Endlichkeitsbedingung für Linearkombinationen ist $\operatorname{Lin} B$ dann *nicht* der gesamte Raum aller Folgen, sondern nur die Menge aller Folgen, bei denen nur endlich viele Folgenglieder ungleich 0 sind. Dementsprechend ist $B$ also auch kein Erzeugendensystem von $\operatorname{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Die Familie $B$ ist aber linear unabhängig, denn ist $\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_i = (0,0,0,\dots)$ (für eine gewisse Summe mit nur endlich vielen $\lambda_i \neq 0$), so folgt durch Vergleich des $i$-ten Folgengliedes natürlich sofort $\lambda_i = 0$ für alle $i$.

Dieses Beispiel (b) wirft nun natürlich die Frage auf, ob denn überhaupt eine Basis von $\operatorname{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ existiert. In der Tat ist die Antwort auf diese Frage ja: Man kann zeigen, dass *jeder beliebige Vektorraum* in obigem Sinne eine Basis besitzt. Dass wir uns beim Beweis dieser Tatsache in dieser Vorlesung in Satz 14.11 auf den endlich erzeugten Fall beschränkt haben, liegt zum einen daran, dass er für Vektorräume mit unendlichen Basen deutlich komplizierter und abstrakter ist (siehe z. B. [GK] Proposition II.2.22). Zum anderen – und das ist fast der wichtigere Grund – ist der Beweis im allgemeinen Fall *nicht konstruktiv* und daher eigentlich nur von theoretischem Interesse. So weiß man also z. B., dass der Raum $\operatorname{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ aller reellen Folgen eine Basis besitzt, aber niemand kann eine solche Basis konkret angeben! Versucht doch einmal, eine Basis dieses Vektorraums zu finden – ihr werdet sehr schnell merken, dass das aussichtslos ist. Zur Erinnerung: Ihr müsstet dazu eine (unendliche) Familie von Folgen hinschreiben, aus der sich nicht die Nullfolge kombinieren lässt, und so dass jede beliebige Folge eine (endliche) Linearkombination der Folgen ist, die ihr ausgewählt habt.

**Aufgabe 14.29.** In $\mathbb{R}^5$ seien

$$U_1 = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad U_2 = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

(a) Bestimme jeweils die Dimension und eine Basis von $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.

(b) Finde einen 2-dimensionalen Unterraum $U \leq \mathbb{R}^5$ mit $U + U_1 = \mathbb{R}^5$.

**Aufgabe 14.30.** Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ betrachten wir die Unterräume

$$U_1 = \{x \in K^n : x_1 = \cdots = x_n\} \quad \text{und} \quad U_2 = \{x \in K^n : x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$

von $K^n$, wobei $x_1,\dots,x_n$ die Koordinaten von $x$ bezeichnen.

Bestimme Basen und die Dimensionen von $U_1$, $U_2$ und $U_1 + U_2$ in den Fällen $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{Z}_2$.

**Aufgabe 14.31.**

(a) Es seien $V$ ein $K$-Vektorraum und $U_1, U_2 \leq V$ mit $\dim V = 6$, $\dim U_1 = 5$ und $\dim U_2 = 3$.

Welche Dimension kann $U_1 \cap U_2$ haben? Gib für jede solche Möglichkeit ein konkretes Beispiel für $U_1$, $U_2$ und $V$ an.

(b) Es seien $U_1, \dots, U_k$ Unterräume eines $n$-dimensionalen $K$-Vektorraums $V$. Zeige, dass

$$\dim(U_1 \cap \dots \cap U_k) \geq \sum_{i=1}^{k} \dim U_i - (k-1)\,n.$$

**Aufgabe 14.32.** Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die sogenannte *Fibonacci-Folge*, die durch $a_0 = a_1 = 1$ sowie die Rekursionsgleichung

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{$*$}$$

gegeben ist, also die Folge $(1,1,2,3,5,8,13,21,\dots)$. Wir wollen in dieser Aufgabe eine explizite Formel für das $n$-te Folgenglied $a_n$ herleiten.

Es sei dazu $V \leq \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ der Unterraum aller reellen Zahlenfolgen, die die Rekursionsgleichung $(*)$ erfüllen (ihr braucht nicht nachzuweisen, dass dies wirklich ein Unterraum ist, solltet euch aber trotzdem kurz überlegen, warum das so ist).

(a) Für welche $q \in \mathbb{R}$ liegt die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, q, q^2, q^3, \dots)$ in $V$?

(b) Zeige, dass $\dim V = 2$ gilt, und bestimme eine Basis von $V$.

(c) Berechne mit (b) eine explizite nicht-rekursive Formel für die Glieder $a_n$ der Fibonacci-Folge.

**Aufgabe 14.33.** Gib eine Basis des Vektorraums

$$V = \{(a_n)_n \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R}) : \text{es gibt ein } N \in \mathbb{N} \text{ mit } a_N = a_{N+1} = \dots\}$$

aller ab irgendeinem Glied konstanten reellen Zahlenfolgen an.

# 15. Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Wie wir nun schon in einigen Fällen gesehen haben, laufen viele Fragestellungen der linearen Algebra auf rechnerischer Seite am Ende auf *lineare Gleichungssysteme* hinaus – z. B. die Überprüfung von Erzeugendensystemen und der linearen Unabhängigkeit in Beispiel 14.2 (b) bzw. Beispiel 14.5 (b), oder die Berechnung von Durchschnitten und Summen von Unterräumen in Algorithmus 14.27. Mit anderen Worten müssen wir also zu gegebenen $m,n \in \mathbb{N}$ sowie $a_{i,j}, b_i \in K$ für $i = 1,\dots,m$ und $j = 1,\dots,n$ alle $x_1,\dots,x_n \in K$ bestimmen, die simultan die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{$*$}$$

erfüllen. Wir wollen daher in diesem Kapitel studieren, wann solche linearen Gleichungssysteme lösbar sind, und wie im Fall der Lösbarkeit die Lösungsmengen aussehen und konkret berechnet werden können.

## 15.A Matrizen

Bevor wir mit der eigentlichen Untersuchung linearer Gleichungssysteme beginnen, sollten wir als Erstes eine effizientere Notation dafür einführen, da die Schreibweise $(*)$ in der Einleitung oben natürlich sehr unübersichtlich und fehleranfällig ist. Dies ist mit Hilfe von sogenannten *Matrizen* möglich. Die Idee besteht dabei einfach darin, die $m \cdot n$ Zahlen $a_{i,j}$ in $(*)$ in einem einzigen mathematischen Objekt zusammenzufassen.

**Definition 15.1** (Matrizen)**.** Es seien $m,n \in \mathbb{N}$.

(a) Eine $m \times n$-**Matrix** über $K$ ist ein rechteckiges Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_{i,j} \in K \text{ für alle } 1 \le i \le m \text{ und } 1 \le j \le n$$

mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten. Analog zur Schreibweise für Zahlenfolgen in Definition 5.1 (a) bezeichnen wir eine solche Matrix auch mit

$$\big(a_{i,j}\big)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \quad \text{oder einfach} \quad (a_{i,j})_{i,j}.$$

Es ist eine Konvention, dass wir dabei hinter den Klammern immer zuerst den Zeilenindex und dann den Spaltenindex angeben (Merkregel: „Zeile zuerst, Spalte später“).

Die Menge aller $m \times n$-Matrizen mit Einträgen in $K$ wird mit $K^{m \times n}$ bezeichnet – auch hier steht in der Bezeichnung also zuerst die Anzahl der Zeilen und dann die Anzahl der Spalten.

(b) Eine Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{m \times n}$ mit genauso vielen Zeilen wie Spalten (also $m = n$) heißt **quadratisch**. In diesem Fall bezeichnet man die Einträge $a_{i,i}$ mit $i = 1,\dots,n$ (also die Einträge von links oben nach rechts unten) als die **Diagonaleinträge** der Matrix.

**Definition 15.2** (Matrixoperationen)**.** Für zwei Matrizen $A = (a_{i,j})_{i,j}$ und $B = (b_{i,j})_{i,j}$ in $K^{m \times n}$ sowie $\lambda \in K$ definieren wir

(a) die Addition $A + B := (a_{i,j} + b_{i,j})_{i,j} \in K^{m \times n}$;

(b) die Skalarmultiplikation $\lambda A := \lambda \cdot A := (\lambda \cdot a_{i,j})_{i,j} \in K^{m \times n}$;

(c) die **transponierte Matrix** $A^\mathsf{T} := (a_{j,i})_{i,j} \in K^{n\times m}$.

**Beispiel 15.3.** Die reelle Matrix (z. B. der Größe $2\times 3$), bei der in jeder Zeile $i$ alle Einträge gleich $i$ sind, können wir schreiben als

$$(i)_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

Addition und Skalarmultiplikation für Matrizen (und damit auch für Vektoren) sind einfach komponentenweise definiert, es ist also z. B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^{2\times 3}$. Die Transposition hingegen vertauscht die Rolle von Zeilen und Spalten in der Matrix, wie z. B. in

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{3\times 2}.$$

**Bemerkung 15.4.**

(a) Offensichtlich ist $K^{m\times n}$ mit der Addition und Skalarmultiplikation aus Definition 15.2 ein $K$-Vektorraum. In der Tat unterscheidet sich dieser Raum von $K^{mn}$ ja nur dadurch, dass wir die $m \cdot n$ Einträge der Matrix nicht untereinander, sondern in einem rechteckigen Schema anordnen. Dementsprechend erhält man also auch eine Basis von $K^{m\times n}$, indem man alle Matrizen mit einem Eintrag 1 und allen anderen Einträgen 0 nimmt, im Fall $K^{2\times 2}$ also z. B.

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Insbesondere gilt damit $\dim K^{m\times n} = mn$.

(b) Der Nullvektor im Vektorraum $K^{m\times n}$ ist offensichtlich die Matrix, in der alle Einträge gleich 0 sind. Diese Matrix wird dementsprechend auch die **Nullmatrix** genannt und einfach als 0 geschrieben.

(c) Matrizen in $K^{m\times 1}$ mit nur einer Spalte haben in ihrer Schreibweise die gleiche Form wie Vektoren in $K^m$. In der Tat werden wir $m\times 1$-Matrizen im Folgenden in der Regel mit Vektoren in $K^m$ identifizieren.

Bisher gibt es bis auf die Art der Anordnung der Zahlen keinen nennenswerten Unterschied zwischen den Matrizen in $K^{m\times n}$ und den Vektoren in $K^{mn}$. Es gibt jedoch eine sehr wichtige weitere Operation, die auf Matrizen, jedoch nicht auf Vektoren in $K^{mn}$ definiert ist, nämlich die sogenannte *Matrixmultiplikation*:

**Definition 15.5** (Matrixmultiplikation)**.** Für natürliche Zahlen $m, n, p$ seien $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{m\times n}$ und $B = (b_{j,k})_{j,k} \in K^{n\times p}$, d. h. die Matrix $B$ habe so viele Zeilen wie $A$ Spalten. Dann definieren wir das Matrixprodukt $AB$ als

$$AB := A \cdot B := \left( \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k} \right)_{i,k} \quad \in K^{m\times p}$$

(merke: Es wird über die „mittleren Indizes“ summiert, also über den Spaltenindex der ersten und den Zeilenindex der zweiten Matrix). Das Produkt $AB$ hat also so viele Zeilen wie die erste Matrix und so viele Spalten wie die zweite.

**Beispiel 15.6.**

(a) Es ist z. B.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 4+1\cdot 7 & 0\cdot 5+1\cdot 8 & 0\cdot 6+1\cdot 9 \\ 2\cdot 4+3\cdot 7 & 2\cdot 5+3\cdot 8 & 2\cdot 6+3\cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 29 & 34 & 39 \end{pmatrix}$$

(hier ist $m = n = 2$ und $p = 3$). Im Gegensatz dazu ist das Matrixprodukt

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

nicht definiert, weil die erste Matrix drei Spalten, die zweite aber nur zwei Zeilen hat. Der Einfachheit halber werden wir in Zukunft bei einem Matrixprodukt $AB$ stets voraussetzen, dass die zweite Matrix so viele Zeilen hat wie die erste Spalten, und dies nicht jedes Mal wieder erwähnen.

(b) Sind $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{m\times n}$ und $x \in K^n$ mit Koordinaten $x_1, \dots, x_n$, so können wir $x$ gemäß Bemerkung 15.4 (c) als Matrix mit nur einer Spalte auffassen und erhalten das Matrixprodukt

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} \quad \in K^{m\times 1} = K^m.$$

Beachte, dass dieser Ausdruck genau die linke Seite eines linearen Gleichungssystems wie in der Einleitung zu diesem Kapitel ist. Wir können lineare Gleichungssysteme in Zukunft also einfach als $Ax = b$ schreiben, wobei $A \in K^{m\times n}$ eine gegebene Matrix, $b \in K^m$ ein gegebener Vektor und $x \in K^n$ der gesuchte Vektor sind.

(c) Ein einfacher, aber oft vorkommender und daher wichtiger Spezialfall von (b) ist, wenn $x = e_j$ für $j = 1, \dots, n$ der $j$-te Einheitsvektor ist: In diesem Fall ist $Ae_j$ gerade die $j$-te Spalte von $A$.

Wie üblich nach dem Einführen einer neuen Struktur wollen wir auch hier zunächst einmal die grundlegenden Eigenschaften der Matrixmultiplikation angeben bzw. beweisen.

**Lemma 15.7** (Eigenschaften der Matrixmultiplikation)**.** *Für alle Matrizen A, B, C passender Größe (d. h. so dass die betrachteten Summen und Produkte definiert sind) sowie $\lambda \in K$ gilt:*

(a) *(Distributivität)* $(A+B)C = AC + BC$ *und* $A(B+C) = AB + AC$.

(b) *(Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation)* $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.

(c) *(Assoziativität)* $(AB)C = A(BC)$.

*Bei der Multiplikation mehrerer Matrizen werden wir die Klammern daher oft weglassen; das n-fache Matrixprodukt $A \cdots A$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ schreiben wir als $A^n$.*

(d) *(Verträglichkeit mit der Transposition)* $(AB)^\mathsf{T} = B^\mathsf{T} A^\mathsf{T}$.

*Das Matrixprodukt ist jedoch im Allgemeinen nicht kommutativ (aufgrund der Größenbedingung ist das Produkt AB ja auch nicht einmal genau dann definiert, wenn BA es ist).*

*Beweis.* Der Beweis ergibt sich durch einfaches Nachrechnen. Wir zeigen exemplarisch den zweiten Teil von (a): Für $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{m\times n}$ und $B = (b_{j,k})_{j,k}, C = (c_{j,k})_{j,k} \in K^{n\times p}$ gilt

$$\begin{aligned} A(B+C) &= \Big( \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(b_{j,k} + c_{j,k}) \Big)_{i,k} \\ &= \Big( \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,k} + \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}c_{j,k} \Big)_{i,k} \\ &= \Big( \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,k} \Big)_{i,k} + \Big( \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}c_{j,k} \Big)_{i,k} \\ &= AB + AC. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 15.8 (Blockmatrixmultiplikation).** Es seien $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times p}$ zwei Matrizen, die in „Blockform“

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A^{(1,1)} & A^{(1,2)} \\ \hline A^{(2,1)} & A^{(2,2)} \end{array}\right) \quad \text{bzw.} \quad B = \left(\begin{array}{c|c} B^{(1,1)} & B^{(1,2)} \\ \hline B^{(2,1)} & B^{(2,2)} \end{array}\right)$$

mit $A^{(1,1)} \in K^{m_1 \times n_1}$ und $B^{(1,1)} \in K^{n_1 \times p_1}$ gegeben sind. Nach Definition der Matrixmultiplikation können wir das Produkt $AB$ dann ebenfalls in Blockform

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} A^{(1,1)}B^{(1,1)} + A^{(1,2)}B^{(2,1)} & A^{(1,1)}B^{(1,2)} + A^{(1,2)}B^{(2,2)} \\ \hline A^{(2,1)}B^{(1,1)} + A^{(2,2)}B^{(2,1)} & A^{(2,1)}B^{(1,2)} + A^{(2,2)}B^{(2,2)} \end{array}\right)$$

schreiben, wobei die Blöcke formal genauso multipliziert und addiert werden, als würde man das Produkt zweier Matrizen der Größe $2 \times 2$ berechnen: Ist $A^{(r,s)} = \left(a_{i,j}^{(r,s)}\right)_{i,j}$ und $B^{(r,s)} = \left(b_{j,k}^{(r,s)}\right)_{j,k}$ für $r,s \in \{1,2\}$, so ist z. B. der Eintrag von $AB$ in Zeile $i \leq m_1$ und Spalte $k \leq p_1$ (also im Block links oben) gegeben durch

$$\sum_{j=1}^{n_1} a_{i,j}^{(1,1)} b_{j,k}^{(1,1)} + \sum_{j=1}^{n-n_1} a_{i,j}^{(1,2)} b_{j,k}^{(2,1)},$$

was genau der Eintrag von $A^{(1,1)}B^{(1,1)} + A^{(1,2)}B^{(2,1)}$ an dieser Stelle ist.

Analog funktioniert diese Regel auch für eine Aufteilung in mehr oder weniger als zwei Blöcke entlang der Zeilen bzw. Spalten. Häufig kommt z. B. der Fall vor, in dem wir die Matrix $B$ spaltenweise als $B = \left(b^{(1)} \mid \cdots \mid b^{(p)}\right)$ mit $b^{(1)}, \ldots, b^{(p)} \in K^n$ schreiben; in diesem Fall ist dann

$$AB = A\left(b^{(1)} \mid \cdots \mid b^{(p)}\right) = \left(Ab^{(1)} \mid \cdots \mid Ab^{(p)}\right).$$

Wir werden diese Rechenregeln zur Blockmatrixmultiplikation im Folgenden oft verwenden, ohne jedesmal wieder darauf hinzuweisen.

**Aufgabe 15.9.**

(a) Finde eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \backslash \{0\}$ mit $A^2 := A \cdot A = 0$.

(b) Finde Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $AB = 0$ und $BA \neq 0$.

Mit Hilfe des Matrixprodukts können wir nun zu jeder Matrix $A \in K^{m\times n}$ zwei Unterräume definieren; einen von $K^m$ und einen von $K^n$:

**Definition 15.10** (Bild und Kern einer Matrix)**.** Für eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ nennen wir

(a) $\operatorname{Im} A := \{Ax : x \in K^n\} \subset K^m$ das **Bild** von $A$;

(b) $\operatorname{Ker} A := \{x \in K^n : Ax = 0\} \subset K^n$ den **Kern** von $A$.

Die Bezeichnungen kommen dabei von den englischen Worten „image“ und „kernel“.

**Lemma und Definition 15.11** (Rang einer Matrix)**.** *Es sei $A \in K^{m\times n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$.*

(a) $\operatorname{Im} A$ *ist der von den Spalten von $A$ erzeugte Unterraum von $K^m$.*

*Man nennt seine Dimension* $\operatorname{rk} A := \dim \operatorname{Im} A$ *den* ***Rang*** *von $A$; die Bezeichnung kommt dabei vom englischen Wort „rank“.*

(b) $\operatorname{Ker} A$ *ist ein Unterraum von $K^n$.*

*Beweis.*

(a) Schreiben wir $A = (a_1 \mid \cdots \mid a_n)$ mit $a_1, \ldots, a_n \in K^m$, so ist nach Definition des Matrixprodukts

$$\operatorname{Im} A = \{Ax : x \in K^n\} = \{x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n : x_1, \ldots, x_n \in K\} = \operatorname{Lin}(a_1, \ldots, a_n).$$

Also ist $\operatorname{Im} A$ der von den Spalten von $A$ erzeugte Unterraum.

(b) Wir überprüfen die Unterraumkriterien aus Definition 13.8: Zunächst ist natürlich $A \cdot 0 = 0$, also $0 \in \operatorname{Ker} A$. Für alle $x, y \in \operatorname{Ker} A$ und $\lambda \in K$ gilt außerdem $Ax = Ay = 0$, also auch

$$A(x+y) = Ax + Ay = 0 \quad \text{und} \quad A \cdot \lambda x = \lambda \cdot Ax = 0,$$

und damit $x + y \in \operatorname{Ker} A$ und $\lambda x \in \operatorname{Ker} A$. □

**Bemerkung 15.12.** Es sei wieder $A \in K^{m\times n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Nach Lemma 15.11 (a) bilden die Spalten von $A$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Im}A$. Mit der Basisauswahl aus Satz 14.11 können wir aus diesen Erzeugern eine Basis von $\mathrm{Im}A$ auswählen, die dann $\mathrm{rk}A$ Elemente hat – während mehr als $\mathrm{rk}A$ Elemente nach Folgerung 14.21 (b) natürlich linear abhängig sein müssen. Wir sehen also:

Der Rang $\mathrm{rk}A$ ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten von $A$.

32

(b) Aus (a) folgt natürlich sofort $\mathrm{rk}A \leq n$. Da $\mathrm{Im}A$ ein Unterraum von $K^m$ ist, gilt nach Lemma 14.23 außerdem auch $\mathrm{rk}A \leq m$.

(c) Die Unterräume $\mathrm{Im}A$ und $\mathrm{Ker}A$ lassen sich auch mit Hilfe des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ interpretieren: Nach Definition ist $\mathrm{Im}A = \{Ax : x \in K^n\}$ die Menge aller $b \in K^m$, für die das Gleichungssystem lösbar ist, und $\mathrm{Ker}A = \{x \in K^n : Ax = 0\}$ die Lösungsmenge im Fall der rechten Seite $b = 0$.

**Beispiel 15.13.** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

Dann ist

$$\mathrm{Im}A = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rk}A = \dim \mathrm{Im}A = 2$$

und

$$\mathrm{Ker}A = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = -x_2 + x_3 = 0\} = \mathrm{Lin}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Eine wichtige Eigenschaft des Rangs ist, dass er in folgendem Sinne bei der Multiplikation mit einer anderen Matrix nicht größer werden kann.

**Lemma 15.14** (Rang eines Produkts)**.** *Es seien $m,n,p \in \mathbb{N}$ sowie $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times p}$.*

*Dann gilt* $\mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}A$ *und* $\mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}B$.

*Beweis.* Zunächst gilt nach Definition des Bildes

$$\mathrm{Im}(AB) = \{ABx : x \in K^p\} = \{Ay : y \in \mathrm{Im}B\}.$$

Zum einen folgt daraus nun wegen $\mathrm{Im}B \subset K^n$

$$\mathrm{Im}(AB) \subset \{Ay : y \in K^n\} = \mathrm{Im}A,$$

und damit $\mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}A$. Zum anderen können wir mit $r := \mathrm{rk}B$ eine Basis $(b_1,\ldots,b_r)$ von $\mathrm{Im}B$ wählen und erhalten

$$\mathrm{Im}(AB) = \{A(\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_r b_r) : \lambda_1,\ldots,\lambda_r \in K\} = \mathrm{Lin}(Ab_1,\ldots,Ab_r),$$

nach Bemerkung 14.22 (a) also auch $\mathrm{rk}(AB) \leq r = \mathrm{rk}B$. □

**Aufgabe 15.15** (Rang einer Summe)**.** Es seien $m,n \in \mathbb{N}$ und $A,B \in K^{m\times n}$.

Zeige, dass dann $\mathrm{rk}(A+B) \leq \mathrm{rk}A + \mathrm{rk}B$ gilt.

Zum Ende dieses Abschnitts wollen wir nun noch die formalen Eigenschaften der Matrixmultiplikation betrachten. Nachdem sie nach Lemma 15.7 (c) schon einmal assoziativ ist, ist es dabei naheliegend zu untersuchen, ob sie auch die anderen Gruppenaxiome aus Definition 3.1 erfüllt. Damit sie überhaupt zwischen allen betrachteten Matrizen definiert ist, sollten wir uns dazu auf quadratische Matrizen einer festen Größe beschränken. Ein – wie in Definition 3.1 (b) gefordertes – neutrales Element ist dann schnell gefunden:

**Konstruktion 15.16** (Einheitsmatrix)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die **Einheitsmatrix** der Größe $n \times n$ als die Matrix, deren Einträge auf der Diagonale gleich 1 und sonst überall 0 sind, also

$$E_n := (e_1 \,|\, \cdots \,|\, e_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}.$$

Wir schreiben sie oft auch einfach als $E$, wenn ihre Größe aus dem Zusammenhang klar ist. In der Literatur ist manchmal auch die Bezeichnung $I_n$ oder $I$ üblich. Offensichtlich gilt nun für jede Matrix $A = (a_1 \,|\, \cdots \,|\, a_n) \in K^{m \times n}$

$$AE_n = A \cdot (e_1 \,|\, \cdots \,|\, e_n) \overset{15.8}{=} (Ae_1 \,|\, \cdots \,|\, Ae_n) \overset{15.6\,(c)}{=} (a_1 \,|\, \cdots \,|\, a_n) = A,$$

und damit analog auch $A^\mathsf{T} E_m = A^\mathsf{T}$, nach Transponieren mit Lemma 15.7 (d) also $E_m A = A$. Die Einheitsmatrizen sind in diesem Sinne also (sogar für nicht-quadratische Matrizen) neutral für die Matrixmultiplikation. Außerdem ist natürlich $\operatorname{rk} E_n = n$, denn es gilt $\operatorname{Im} E_n = \operatorname{Lin}(e_1, \ldots, e_n) = K^n$.

Wie wir jetzt sehen wollen, existieren inverse Matrizen jedoch nicht immer, sondern nur zu Matrizen mit maximalem Rang.

**Satz und Definition 15.17** (Inverse Matrizen)**.** *Für jede quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $\operatorname{rk} A = n$.

(b) *Es gibt eine rechtsinverse Matrix $B$ zu $A$, also eine Matrix $B \in K^{n \times n}$ mit $AB = E$.*

(c) *Es gibt eine linksinverse Matrix $B$ zu $A$, also eine Matrix $B \in K^{n \times n}$ mit $BA = E$.*

*Eine quadratische Matrix $A$ mit diesen Eigenschaften heißt **invertierbar**. In diesem Fall sind die rechts- und linksinverse Matrix zu $A$ außerdem eindeutig bestimmt und gleich; man schreibt sie als $A^{-1}$ und nennt sie die zu $A$ **inverse Matrix**.*

*Beweis.*

(a) $\Rightarrow$ (b): Nach Voraussetzung gilt $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} A = n$, mit Lemma 14.23 also $\operatorname{Im} A = K^n$. Für alle $i = 1, \ldots, n$ ist damit $e_i \in \operatorname{Im} A$, d. h. es gibt ein $b_i \in K^n$ mit $Ab_i = e_i$. Definieren wir nun $B := (b_1 \,|\, \cdots \,|\, b_n)$, so ergibt sich wie gewünscht

$$AB = A \cdot (b_1 \,|\, \cdots \,|\, b_n) \overset{15.8}{=} (Ab_1 \,|\, \cdots \,|\, Ab_n) = (e_1 \,|\, \cdots \,|\, e_n) = E.$$

(b) $\Rightarrow$ (c): Wegen $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk} E = n$ folgt zunächst $\operatorname{rk} B = n$ aus Lemma 15.14. Nach der schon gezeigten Richtung „(a) $\Rightarrow$ (b)“ gibt es also eine Matrix $C \in K^{n \times n}$ mit $BC = E$. Dabei ist aber $C = EC = ABC = AE = A$, also wie behauptet $BA = E$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Wegen $\operatorname{rk}(BA) = \operatorname{rk} E = n$ folgt dies sofort aus Lemma 15.14.

Sind diese Bedingungen erfüllt und $B$ eine rechts- bzw. $C$ eine linksinverse Matrix zu $A$, so gilt außerdem $C = CE = CAB = EB = B$, d. h. $B$ und $C$ sind eindeutig bestimmt und gleich. □

**Lemma und Definition 15.18** (Invertierbare Matrizen als Gruppe)**.** *Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in K^{n \times n}$ zwei invertierbare Matrizen. Dann gilt:*

(a) *$AB$ ist ebenfalls invertierbar mit $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.*

(b) *$A^{-1}$ ist ebenfalls invertierbar mit $(A^{-1})^{-1} = A$.*

*Insbesondere ist die Menge aller invertierbaren Matrizen in $K^{n \times n}$ also eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation. Man bezeichnet sie mit $\mathrm{GL}(n, K)$ (der Name kommt vom englischen Begriff „general linear group“).*

*Beweis.* Nach Voraussetzung gilt $A^{-1}A = B^{-1}B = E$ gemäß Satz 15.17 (c). Also folgt

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$

und damit Teil (a); Teil (b) ergibt sich direkt aus $A^{-1}A = E$ mit Satz 15.17 (b).

Damit ist $\mathrm{GL}(n,K)$ eine Gruppe: Die Matrixmultiplikation ist eine Verknüpfung auf dieser Menge nach (a) und assoziativ nach Lemma 15.7 (c), und $\mathrm{GL}(n,K)$ enthält das neutrale Element $E$ sowie zu jeder Matrix $A$ die inverse Matrix $A^{-1}$ nach (b). □

**Beispiel 15.19.** Die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathrm{rk}A = \dim \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2$$

ist nach Definition 15.17 invertierbar. In der Tat ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{und damit} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir werden in Satz 15.35 noch sehen, wie inverse Matrizen effizient berechnet werden können.

**Bemerkung 15.20.** Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{GL}(n,K)$ eine invertierbare Matrix.

(a) Die Inversenbildung vertauscht mit der Transposition, d. h. es gilt $(A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}}$, denn es ist

$$(A^{-1})^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}} \overset{15.7\,(d)}{=} (AA^{-1})^{\mathsf{T}} = E^{\mathsf{T}} = E,$$

und damit ist $(A^{-1})^{\mathsf{T}}$ die inverse Matrix zu $A^{\mathsf{T}}$.

(b) Für alle $b \in K^n$ ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ äquivalent zu $x = A^{-1}b$, hat also diese eindeutige Lösung für $x$. Diese Aussage ist momentan aber eher für theoretische Zwecke als für konkrete Berechnungen nützlich, zumal wir ja noch keine gute Berechnungsmöglichkeit für inverse Matrizen kennen.

**Aufgabe 15.21.** Für ein gegebenes $a \in \mathbb{R}$ sei $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Berechne $A^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

(Hinweis: Bestimme $A^n$ für kleine Werte von $n$, stelle damit eine Vermutung für die allgemeine Form von $A^n$ auf, und beweise diese Vermutung dann mit vollständiger Induktion.)

(b) Für welche $a$ ist die Matrix $A$ invertierbar? Bestimme in diesen Fällen auch die inverse Matrix $A^{-1}$.

**Aufgabe 15.22.** Für $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_{>0}$ und gegebene Matrizen $A_1 \in K^{n_1\times n_1}$, $A_2 \in K^{n_2\times n_2}$ und $B \in K^{n_1\times n_2}$ setzen wir

$$A := \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad \in K^{n\times n}$$

mit $n = n_1 + n_2$.

Zeige, dass $A$ genau dann invertierbar ist, wenn $A_1$ und $A_2$ invertierbar sind, und bestimme in diesem Fall die inverse Matrix $A^{-1}$ aus $A_1$, $A_2$ und $B$.

**Aufgabe 15.23.** Es seien $m,n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix vom Rang $r$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \le m$ und $k \le n$ verstehen wir unter einer $k\times k$-*Teilmatrix* von $A$ eine Matrix, die man erhält, indem man aus $A$ eine beliebige Auswahl von Zeilen und Spalten herausstreicht, so dass eine quadratische Matrix der Größe $k \times k$ übrig bleibt.

Zeige, dass es genau dann eine invertierbare $k\times k$-Teilmatrix von $A$ gibt, wenn $k \le r$ gilt.

## 15.B Der Gauß-Algorithmus

Wie bereits angekündigt wollen wir jetzt untersuchen, wie man lineare Gleichungssysteme – die wir in Matrixschreibweise nach Beispiel 15.6 (b) nun als $Ax = b$ mit $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^m$ schreiben werden – explizit numerisch lösen kann. Wie ihr natürlich wisst, besteht die Strategie hierbei darin, die gegebenen Gleichungen mit einem geeigneten Algorithmus z. B. durch Addition, Subtraktion oder Multiplikation mit Skalaren so umzuformen und zu kombinieren, dass ein äquivalentes Gleichungssystem entsteht, dessen Lösung man leicht ablesen kann. In der Matrixform entspricht nun jede Gleichung einer Zeile der Matrix $A$, und demzufolge wollen wir also die Zeilen der Matrix umformen und miteinander kombinieren können. Diese Zeilenumformungen entsprechen in unserer Schreibweise einfachen Matrixmultiplikationen, die wir jetzt einführen wollen.

**Konstruktion 15.24** (Elementarmatrizen)**.** Es seien $m,n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{m\times n}$.

(a) Für $k \in \{1,\dots,m\}$ und $\lambda \in K\backslash\{0\}$ setzen wir

$$F_k(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{m\times m},$$

wobei der Eintrag $\lambda$ in Zeile und Spalte $k$ steht. Die Matrix $F_k(\lambda)$ ist also nichts weiter als die Einheitsmatrix, bei der der Eintrag 1 in der $k$-ten Zeile und Spalte durch ein $\lambda \neq 0$ ersetzt wurde. Mit dieser Matrix ist

$$F_k(\lambda)\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{k,1} & \cdots & \lambda a_{k,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix},$$

d. h. die Multiplikation von $A$ mit $F_k(\lambda)$ von links entspricht der Multiplikation der $k$-ten Zeile von $A$ mit $\lambda$.

(b) Für $k,l \in \{1,\dots,m\}$ mit $k \neq l$ und $\lambda \in K$ setzen wir

$$F_{k,l}(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \lambda & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{m\times m},$$

wobei der Eintrag $\lambda$ in Zeile $k$ und Spalte $l$ steht, d. h. diesmal haben wir in der Einheitsmatrix den Eintrag 0 in Zeile $k$ und Spalte $l$ durch $\lambda$ ersetzt. (Beachte, dass der Eintrag $\lambda$ für $k < l$ oberhalb und für $k > l$ unterhalb der Diagonalen steht; wir haben in der Matrix oben der Einfachheit halber nur den Fall $k < l$ dargestellt.) In diesem Fall ist

$$F_{k,l}(\lambda)\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \lambda & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l,1} & \cdots & a_{l,n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{k,1}+\lambda a_{l,1} & \cdots & a_{k,n}+\lambda a_{l,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l,1} & \cdots & a_{l,n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix},$$

d. h. die Multiplikation von $A$ mit $F_{k,l}(\lambda)$ von links entspricht der Addition des $\lambda$-fachen von Zeile $l$ zu Zeile $k$.

Die Matrizen $F_k(\lambda)$ für $\lambda \in K\backslash\{0\}$ sowie $F_{k,l}(\lambda)$ für $k \neq l$ und $\lambda \in K$ heißen **Elementarmatrizen**. Es gibt sie in jeder (quadratischen) Größe $m \times m$; zur Vereinfachung der Schreibweise deuten wir diese Größe in der Notation $F_k(\lambda)$ bzw. $F_{k,l}(\lambda)$ aber nicht an.

Man sagt, dass $F_k(\lambda) \cdot A$ und $F_{k,l}(\lambda) \cdot A$ aus $A$ durch eine **elementare Zeilenumformung** entstehen.

**Bemerkung 15.25.**

(a) Die Elementarmatrizen sind invertierbar mit

$$(F_k(\lambda))^{-1} = F_k\Big(\frac{1}{\lambda}\Big) \quad \text{und} \quad (F_{k,l}(\lambda))^{-1} = F_{k,l}(-\lambda).$$

Dies folgt direkt aus Konstruktion 15.24: Wenn wir z. B. das Matrixprodukt

$$F_k\Big(\frac{1}{\lambda}\Big) \cdot F_k(\lambda) = F_k\Big(\frac{1}{\lambda}\Big) \cdot F_k(\lambda) \cdot E$$

bilden, multiplizieren wir die $k$-te Zeile in der Einheitsmatrix zuerst mit $\lambda$ und dann mit $\frac{1}{\lambda}$, d. h. es kommt insgesamt wieder die Einheitsmatrix heraus – also ist $F_k(\frac{1}{\lambda}) \cdot F_k(\lambda) = E$, und damit $(F_k(\lambda))^{-1} = F_k(\frac{1}{\lambda})$.

Analog zeigt man die Aussage über das Inverse von $F_{k,l}(\lambda)$.

(b) Führen wir mit einer Matrix $A$ mehrere elementare Zeilenumformungen aus, so ist das Ergebnis nach Konstruktion 15.24 eine Matrix $F_1 \cdot \cdots \cdot F_r \cdot A$ mit Elementarmatrizen $F_1, \ldots, F_r$. Da diese Elementarmatrizen nach (a) invertierbar sind, ist das Produkt $F := F_1 \cdot \cdots \cdot F_r$ nach Lemma 15.18 (a) ebenfalls wieder invertierbar. Das Ergebnis der Zeilenumformungen ist also die Matrix $FA$, d. h. wir haben $A$ von links mit einer invertierbaren Matrix $F$ multipliziert. In der Tat werden wir in Folgerung 15.36 noch sehen, dass *jede* invertierbare Matrix ein Produkt von Elementarmatrizen ist, also jede Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix von links als Abfolge von elementaren Zeilenumformungen geschrieben werden kann.

(c) Das Vertauschen von zwei Zeilen $k, l \in \{1, \ldots, m\}$ mit $k \neq l$ in einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ lässt sich als Folge von elementaren Zeilenumformungen wie in (b) realisieren: Sind $a_1, \ldots, a_m$ die Zeilen von $A$, so erhalten wir

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_l \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{k,l}(1)\cdot} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k + a_l \\ \vdots \\ a_l \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{l,k}(-1)\cdot} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k + a_l \\ \vdots \\ -a_k \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{k,l}(1)\cdot} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_l \\ \vdots \\ -a_k \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{F_l(-1)\cdot} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_l \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

(d) Man kann die Elementarmatrizen auch verwenden, um analog *elementare Spaltenumformungen* durchzuführen: Multipliziert man eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ mit einer Elementarmatrix $F_k(\lambda)$ (der Größe $n$) *von rechts*, so entspricht dies der Multiplikation der $k$-ten *Spalte* von $A$ mit $\lambda$. Analog addiert man das $\lambda$-fache von Spalte $k$ zu Spalte $l$ von $A$, wenn man das Produkt $A \cdot F_{k,l}(\lambda)$ bildet. Wie in (b) lässt sich eine Abfolge von elementaren Spaltenumformungen also durch Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix von rechts beschreiben.

Mit derartigen Zeilenumformungen wollen wir jetzt eine Matrix bzw. ein lineares Gleichungssystem auf eine möglichst einfache Form bringen. Die folgende Form wird dabei herauskommen.

**Definition 15.26** (Zeilenstufenform)**.** Es seien $m, n, r \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{m \times n}$.

(a) Wir sagen, dass $A$ in **Zeilenstufenform** (mit $r$ Stufen ist), wenn

$$A = \begin{pmatrix} & \overset{k_1}{\downarrow} & & \overset{k_2}{\downarrow} & & & \overset{k_r}{\downarrow} & \\ & \boxed{1} & & & & & & \\ & & & 1 & & & & * \\ & & & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \end{pmatrix}$$

ist, wobei das Symbol „$*$“ für beliebige Einträge steht. Mit anderen Worten gibt es also Spalten $1 \leq k_1 < \cdots < k_r \leq n$ (die sogenannten **Stufenspalten**), so dass gilt:

- $a_{i,k_i} = 1$ für alle $i = 1, \ldots, r$;
- rechts hiervon stehen beliebige Einträge (d. h. $a_{i,j}$ ist beliebig falls $i \leq r$ und $j > k_i$);
- alle anderen Einträge sind 0.

(b) Sind zusätzlich noch außer den geforderten Einsen alle anderen Einträge in den Stufenspalten gleich Null, ist also sogar

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & * \cdots * & 0 & * \cdots * & & 0 & * \cdots * \\ & & 1 & * \cdots * & & 0 & * \cdots * \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & & \boxed{1} & * \cdots * \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

(d. h. $a_{l,k_i} = 0$ für alle $l < i \leq r$), so sagt man, dass $A$ in **reduzierter Zeilenstufenform** ist.

Wie schon angekündigt besagt der folgende wichtige Satz nun, dass man jede Matrix mit elementaren Zeilenumformungen auf diese Formen bringen kann. Dabei sind beide Formen in der Praxis wichtig: Die reduzierte Zeilenstufenform ist natürlich „schöner“, weil sie mehr Nullen enthält und damit einfacher ist – andererseits werden wir aber sehen, dass die normale, nicht-reduzierte Zeilenstufenform für viele Zwecke ausreichend und mit weniger Rechenaufwand zu erzielen ist. In der Tat ist der Beweis des Satzes auch konstruktiv in dem Sinne, dass er explizit eine mögliche Vorgehensweise angibt, wie eine (reduzierte) Zeilenstufenform mit elementaren Zeilenumformungen erreicht werden kann. Dieser sogenannte Gauß-Algorithmus im Beweis ist mindestens genauso wichtig wie die eigentliche Aussage:

**Satz 15.27 (Gauß-Algorithmus).** *Jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ lässt sich durch elementare Zeilenumformungen in (reduzierte) Zeilenstufenform bringen.*

*Mit anderen Worten (siehe Bemerkung 15.25 (b)) gibt es also ein Produkt $F \in \mathrm{GL}(m,K)$ von Elementarmatrizen, so dass $FA$ in (reduzierter) Zeilenstufenform ist.*

*Beweis.* Wir beweisen den Satz mit Induktion über die Anzahl $n$ der Spalten von $A$. Da für $n = 0$ nichts zu zeigen ist, müssen wir nur den Induktionsschritt $n \to n+1$ durchführen. Es sei also $A \in K^{m \times (n+1)}$ beliebig vorgegeben. Wir wollen $A$ mit elementaren Zeilenumformungen in (reduzierte) Zeilenstufenform bringen und nehmen nach Induktionsvoraussetzung an, dass wir dies für alle Matrizen mit $n$ Spalten bereits können. Wir unterscheiden dabei zwei Fälle:

Fall 1: Alle Einträge in der ersten Spalte von $A$ sind 0, d. h. es ist $A = (0 \,|\, A')$ für eine Matrix $A' \in K^{m \times n}$. Nach Induktionsvoraussetzung können wir dann $A'$ durch elementare Zeilenumformungen in (reduzierte) Zeilenstufenform bringen. Da diese Zeilenumformungen an der ersten Nullspalte aber nichts ändern, haben wir damit auch $A$ in (reduzierte) Zeilenstufenform gebracht.

Fall 2: Es sind nicht alle Einträge in der ersten Spalte von $A$ gleich 0.

(a) Falls der Eintrag $a_{1,1}$ links oben in $A$ gleich Null ist, vertauschen wir zwei Zeilen von $A$ so, dass dieser Eintrag nicht mehr gleich 0 ist (nach Bemerkung 15.25 (c) ist dies durch elementare Zeilenumformungen machbar).

(b) Wir dividieren die erste Zeile durch $a_{1,1}$ und erhalten eine Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ a_{2,1} & \\ \vdots & * \\ a_{m,1} & \end{array}\right).$$

(c) Wir subtrahieren von jeder Zeile $k \in \{2,\dots,m\}$ das $a_{k,1}$-fache der ersten Zeile und bekommen dadurch

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right)$$

mit einer Matrix $A' \in K^{(m-1)\times n}$.

(d) Nach Induktionsvoraussetzung können wir $A'$ jetzt mit elementaren Zeilenumformungen in Zeilenstufenform bringen. Damit ist aber auch die gesamte Matrix bereits in Zeilenstufenform – wollen wir also nur diese normale, nicht-reduzierte Zeilenstufenform erreichen, so sind wir damit fertig.

(e) Wollen wir eine reduzierte Zeilenstufenform erreichen, bringen wir $A'$ gemäß der Induktionsvoraussetzung sogar in reduzierte Zeilenstufenform und bekommen eine Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & * \cdots * & * & * \cdots * & & * & * \cdots * \\ \hline 0 & & 1 & * \cdots * & & 0 & * \cdots * \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & & & 1 & * \cdots * \\ 0 & & & & & & \end{array}\right).$$

Subtrahieren wir nun geeignete Vielfache der Zeilen $2,\dots,m$ von der ersten Zeile, so können wir damit dann noch die Einträge in den Stufenspalten der ersten Zeile zu Null machen und erhalten so auch die reduzierte Zeilenstufenform. □

33

**Beispiel 15.28.** Wir wollen die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$$

mit elementaren Zeilenumformungen in Zeilenstufenform bringen. Dazu können wir nach dem Verfahren im Beweis von Satz 15.27 wie folgt vorgehen (die Notation $Z3 - 3Z2 \to Z3$ bedeutet dabei z. B., dass wir das Dreifache der zweiten Zeile von der dritten subtrahieren):

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \overset{-Z1\to Z1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z2+Z1\to Z2 \\ Z3-Z1\to Z3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\overset{Z3-3Z2\to Z3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & -2 & -3 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Möchten wir eine Matrix in reduzierter Zeilenstufenform erreichen, so addieren wir schließlich noch das Doppelte der zweiten Zeile zur ersten und erhalten

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 15.29.** Bringe die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

mit elementaren Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform.

## 15.C Algorithmen der linearen Algebra

Nachdem wir jetzt gesehen haben, wie man eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ mit dem Gauß-Algorithmus durch elementare Zeilenumformungen in (evtl. reduzierte) Zeilenstufenform bringen kann, wollen wir nun untersuchen, wie man damit die in der linearen Algebra auftretenden Fragestellungen numerisch lösen kann. Für die Beweise dieser Aussagen ist es dabei nützlich, die Zeilenstufenform von $A$ wie in Satz 15.27 als $FA$ für eine invertierbare Matrix $F \in \mathrm{GL}(m,K)$ zu schreiben – beachte jedoch, dass wir diese Matrix $F$ für konkrete Anwendungen oft gar nicht explizit kennen müssen, sondern es genügt, wenn wir wie in Beispiel 15.28 direkt die Zeilenstufenform $FA$ bestimmen.

Wir beginnen dabei mit dem Rang von $A$. Dieser ist sehr einfach zu bestimmen, er ist nämlich wie im folgenden Satz immer die Anzahl der Stufen in einer zugehörigen Zeilenstufenform. Gleichzeitig liefert dieses Argument nicht nur den Rang – also die Dimension von $\mathrm{Im}A$ – sondern auch eine Basis von $\mathrm{Im}A$, nämlich indem wir die Spalten von $A$ nehmen, die den Stufenspalten entsprechen.

**Satz 15.30** (Bild und Rang einer Matrix)**.** *Es seien $m,n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_1 \,|\, \cdots \,|\, a_n) \in K^{m \times n}$. Wir bringen die Matrix $A$ in Zeilenstufenform $FA$ mit $F \in \mathrm{GL}(m,K)$; dabei seien $r$ die Anzahl der Stufen und $k_1 < \cdots < k_r$ die Stufenspalten von $FA$.*

*Dann ist die Familie $(a_{k_1}, \ldots, a_{k_r})$ eine Basis von* $\mathrm{Im}A$*. Insbesondere gilt also* $\mathrm{rk}A = r$*.*

*Beweis.* Da wir jede Matrix in Zeilenstufenform mit dem Gauß-Algorithmus aus Satz 15.27 in reduzierte Zeilenstufenform mit denselben Stufenspalten überführen können, können wir annehmen, dass $FA = (Fa_1 \,|\, \cdots \,|\, Fa_n)$ sogar in reduzierter Zeilenstufenform ist. Für alle $i = 1, \ldots, r$ ist die $i$-te Stufenspalte der Matrix $FA$ dann gleich $Fa_{k_i} = e_i$. Wir müssen nun zwei Dinge zeigen:

(a) $B := (a_{k_1}, \ldots, a_{k_r})$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Im}A$: Da $FA$ in Zeilenstufenform mit $r$ Stufen ist, haben die Spalten von $FA$ höchstens in den ersten $r$ Zeilen Einträge ungleich 0. Es gilt also nicht nur $\mathrm{Lin}(Fa_{k_1}, \ldots, Fa_{k_r}) = \mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_r)$, sondern sogar

$$\mathrm{Lin}(Fa_{k_1}, \ldots, Fa_{k_r}) = \mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_r) = \mathrm{Lin}(Fa_1, \ldots, Fa_n).$$

Multiplikation mit $F^{-1}$ von links ergibt also wie behauptet

$$\mathrm{Lin}\, B = \mathrm{Lin}(a_{k_1}, \ldots, a_{k_r}) = \mathrm{Lin}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{Im}A.$$

(b) $B$ ist linear unabhängig: Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ mit $\lambda_1 a_{k_1} + \cdots + \lambda_r a_{k_r} = 0$. Multiplikation mit $F$ von links liefert dann sofort

$$\lambda_1 Fa_{k_1} + \cdots + \lambda_r Fa_{k_r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r = 0,$$

und damit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$. □

**Beispiel 15.31.** Wir betrachten noch einmal die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

wie in Beispiel 15.28. Dort hatten wir $A$ in eine Zeilenstufenform mit zwei Stufen und den Stufenspalten 1 und 3 gebracht. Nach Satz 15.30 ist also $\mathrm{rk}A = 2$, und die erste und dritte Spalte der Ausgangsmatrix $A$ (nicht der Zeilenstufenform!) ergeben für $\mathrm{Im}A$ die Basis

$$\left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Als Nächstes wollen wir lineare Gleichungssysteme betrachten, die wir gemäß Beispiel 15.6 (b) in Matrixform als $Ax = b$ schreiben können.

**Algorithmus 15.32** (Lösungen linearer Gleichungssysteme)**.** Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ sowie $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^m$. Wir möchten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösen, und damit insbesondere im Fall $b = 0$ auch $\mathrm{Ker}A$ bestimmen.

Dazu bilden wir zunächst aus den gegebenen Daten die sogenannte *erweiterte Koeffizientenmatrix* $(A\,|\,b) \in K^{m\times(n+1)}$ und bringen sie mit elementaren Zeilenumformungen in reduzierte Zeilenstufenform $F(A\,|\,b) = (FA\,|\,Fb)$ mit $F \in \mathrm{GL}(m, K)$. Da $F$ invertierbar ist, ist das ursprüngliche Gleichungssystem $Ax = b$ äquivalent zu $FAx = Fb$, d. h. wir haben die Lösungsmenge des Gleichungssystems durch den Übergang von $(A\,|\,b)$ zu $(FA\,|\,Fb)$ nicht geändert und können ab jetzt nur noch das umgeformte System betrachten. Dementsprechend schreiben wir im Folgenden die Einträge von $FA$ als $a_{i,j}$ und die Koordinaten von $Fb$ als $b_i$ für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$.

Durch die Umformung ist natürlich auch $FA$ in reduzierter Zeilenstufenform mit $r := \mathrm{rk}A$ Stufen (siehe Satz 15.30). Bezeichnen wir die Stufenspalten von $FA$ mit $k_1 < \cdots < k_r$ und die Nichtstufenspalten mit $j_1 < \cdots < j_{n-r}$, so ist also

$$(FA\,|\,Fb) = \left(\begin{array}{ccccccccc|c} & & k_1 & & k_2 & & & k_r & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \\ \multicolumn{2}{l}{\multirow{3}{*}{$0$}} & 1 & * \cdots * & 0 & * \cdots * & & 0 & * \cdots * & b_1 \\ & & & & 1 & * \cdots * & & 0 & * \cdots * & b_2 \\ & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & 1 & * \cdots * & b_r \\ & & & & & & & & & b_{r+1} \\ & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & 0 \end{array}\right).$$

Für den Eintrag $b_{r+1}$ gibt es dabei zwei Möglichkeiten:

(a) $b_{r+1} = 1$, also $\mathrm{rk}(A\,|\,b) = r + 1$: Zeile $r + 1$ des umgeformten Gleichungssystems $FAx = Fb$ ergibt dann den Widerspruch $0 = 1$, d. h. in diesem Fall existiert keine Lösung.

(b) $b_{r+1} = 0$, also $\mathrm{rk}(A\,|\,b) = r$: In diesem Fall sind die Nichtstufenvariablen $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-r}}$ frei wählbar, und Zeile $i$ für $i = 1, \ldots, r$ bestimmt daraus die $i$-te Stufenvariable $x_{k_i}$ eindeutig zu

$$x_{k_i} = b_i - \sum_{l=1}^{n-r} a_{i,j_l} x_{j_l} \quad \in K, \tag{1}$$

wobei $a_{i,j_l}$ die Einträge „$*$“ in der obigen Matrix sind (und nur ungleich 0 sein können, falls $j_l > k_i$ ist, was im Folgenden aber keine Rolle spielt).

Alternativ hätten wir $(A\,|\,b)$ auch nur in nicht notwendig reduzierte Zeilenstufenform bringen können (was natürlich weniger Arbeit ist). Dann drückt Zeile $i$ des umgeformten Gleichungssystems die $i$-te Stufenvariable $x_{k_i}$ durch alle freien Variablen $x_{j_1},\dots,x_{j_{n-r}}$ *und die weiter rechts stehenden Stufenvariablen* $x_{k_{i+1}},\dots,x_{k_r}$ aus. Wir müssen diese Zeilen dann also von unten nach oben durchgehen und so der Reihe nach $x_{k_r},\dots,x_{k_1}$ aus den freien Variablen *und den bereits bestimmten Stufenvariablen* berechnen (was dann wieder etwas mehr Arbeit ist).

Im Fall (b) der Lösbarkeit haben wir oben in (1) den Wert jeder Variablen einzeln angegeben. Fassen wir nun noch alle diese Komponenten von $x$ zu einem Vektor zusammen, so können wir die Lösung auch schreiben als

$$x = w - \sum_{l=1}^{n-r} x_{j_l} w_{j_l} \quad \in K^n, \tag{2}$$

wobei die Koordinaten der Vektoren $w_{j_1},\dots,w_{j_{n-r}},w$ gegeben sind durch:

- die $k_i$-te Koordinate von $w_{j_l}$ bzw. $w$ ist $a_{i,j_l}$ bzw. $b_i$ für $i = 1,\dots,r$ und $j = 1,\dots,n-r$ (die Koordinate $k_i$ von (2) wird damit genau (1));
- die $j_l$-te Koordinate von $w_{j_l}$ ist $-1$ für $j = 1,\dots,n-r$, und alle anderen Koordinaten zu Nichtstufenvariablen in $w_{j_l}$ und $w$ sind 0 (die Koordinate $j_l$ von (2) wird damit die triviale Gleichung $x_{j_l} = x_{j_l}$).

Als Merkregel können wir die Vektoren $w_{j_1},\dots,w_{j_{n-r}},w$ damit als die entsprechenden Spalten der folgenden Matrix $W = (w_1\,|\,\cdots\,|\,w_n\,|\,w) \in K^{n\times(n+1)}$ erhalten:

> Zu einer gegebenen Matrix $(FA\,|\,Fb) \in K^{m\times(n+1)}$ in reduzierter Zeilenstufenform mit Stufenspalten $k_1 < \cdots < k_r$ konstruieren wir eine Matrix $W \in K^{n\times(n+1)}$, indem wir für $i = 1,\dots,r$ Zeile $i$ von $(FA\,|\,Fb)$ in Zeile $k_i$ von $W$ schreiben; die restlichen Einträge von $W$ sind $-1$ auf der Diagonalen und 0 sonst.

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ ist mit diesen Bezeichnungen nach (2) dann also $w + \mathrm{Lin}(w_{j_1},\dots,w_{j_{n-r}})$; im Fall $b = 0$ für die Berechnung von $\mathrm{Ker}A$ ist dabei natürlich auch $w = 0$.

Die hierbei auftretenden Vektoren $w_{j_1},\dots,w_{j_{n-r}}$ sind darüber hinaus linear unabhängig: Sind nämlich $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-r} \in K$ mit $\lambda_1 w_{j_1} + \cdots + \lambda_{n-r} w_{j_{n-r}} = 0$, so besagt die $j_l$-te Koordinate dieser Gleichung genau $\lambda_l \cdot (-1) = 0$ für alle $l = 1,\dots,n-r$.

Fassen wir die Ergebnisse unserer gesamten Konstruktion zusammen, haben wir damit insgesamt also gezeigt:

**Satz 15.33** (Kern einer Matrix und lineare Gleichungssysteme)**.** *Es seien $m,n \in \mathbb{N}$ sowie $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^m$ mit $r := \mathrm{rk}A$. Wir bringen die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A\,|\,b)$ in reduzierte Zeilenstufenform mit Nichtstufenspalten $1 \le j_1 < \cdots < j_{n-r} \le n$ von $A$, und bilden dazu die Matrix $W = (w_1\,|\,\cdots\,|\,w_n\,|\,w) \in K^{n\times(n+1)}$ aus Algorithmus 15.32. Dann gilt:*

(a) *Die Familie $(w_{j_1},\dots,w_{j_{n-r}})$ ist eine Basis von $\mathrm{Ker}A$. Insbesondere ist die Dimension des Kerns also $\dim \mathrm{Ker}A = n - r = n - \mathrm{rk}A$, und es folgt die* ***Dimensionsformel für Matrizen***

$$\dim \mathrm{Im}A + \dim \mathrm{Ker}A = n.$$

(b) *Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn $\mathrm{rk}(A\,|\,b) = \mathrm{rk}A$ gilt. In diesem Fall ist die Lösungsmenge gegeben durch*

$$\{x \in K^n : Ax = b\} = w + \mathrm{Ker}A$$

*und damit ein verschobener Unterraum der Dimension $n-r$.*

**Beispiel 15.34.** Über dem Körper $\mathbb{R}$ seien

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A\,|\,b)$ ist dann genau die Matrix, die wir in Beispiel 15.28 in reduzierte Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (*)$$

gebracht haben; im linken Teil der Matrix haben wir dabei auch $A$ in reduzierte Zeilenstufenform gebracht. Nach dieser Umformung besagt das Gleichungssystem $Ax = b$ nun genau

$$x_1 - 2x_2 - x_4 = 2 \quad \text{und} \quad x_3 + x_4 = 3,$$

was sich natürlich auch ohne einen weiteren Algorithmus leicht lösen lässt: Die Nichtstufenvariablen $x_2$ und $x_4$ sind frei wählbar, und die anderen beiden Variablen gegeben durch $x_1 = 2x_2 + x_4 + 2$ und $x_3 = -x_4 + 3$.

Wollen wir trotzdem das obige „Kochrezept“ aus Algorithmus 15.32 bzw. Satz 15.33 verwenden, lesen wir an $(*)$ zunächst ab, dass $\operatorname{rk}(A\,|\,b) = 2 = \operatorname{rk} A$ gilt und das Gleichungssystem damit lösbar ist. Wir bilden die Matrix $W \in \mathbb{R}^{4\times 5}$, indem wir die Zeilen 1 und 2 von $(*)$ in die Zeilen 1 und 3 von $W$ schreiben (unten eingekreist, die Stufeneinsen stehen nun also genau auf der Diagonalen); die übrigen Einträge von $W$ sind $-1$ auf der Diagonalen und 0 sonst:

$$W = (w_1\,|\,w_2\,|\,w_3\,|\,w_4\,|\,w) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Eine Basis von $\operatorname{Ker} A$ ist nun nach Satz 15.33 (a) gegeben durch die oben grau markierten Spalten $(w_2, w_4)$ von $W$ (also die Spalten der Zusatzeinträge $-1$), und die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ ist $w + \operatorname{Lin}(w_2, w_4)$ nach Satz 15.33 (b). Wollen wir nur den Kern von $A$ bestimmen, können wir natürlich komplett mit $A$ statt mit $(A\,|\,b)$ rechnen und haben demzufolge sowohl in $(*)$ als auch in $W$ keine separate rechte Spalte.

Auch die Berechnung inverser Matrizen ist mit Zeilenstufenformen einfach:

**Satz 15.35** (Inverse Matrix)**.** *Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$. Wir bringen $A$ mit elementaren Zeilenumformungen in reduzierte Zeilenstufenform $FA$ mit $F \in \mathrm{GL}(n, K)$, führen aber alle Umformungen mit der erweiterten Matrix $(A\,|\,E) \in K^{n\times(2n)}$ durch, so dass wir am Ende die Matrix $F(A\,|\,E) = (FA\,|\,FE)$ erhalten.*

*Dann ist $A$ genau dann invertierbar, wenn nach der Umformung in der linken Hälfte der erweiterten Matrix die Einheitsmatrix $FA = E$ steht. In diesem Fall steht in der rechten Hälfte die inverse Matrix $FE = F = A^{-1}$.*

*Beweis.* Nach Satz 15.17 ist $A$ genau dann invertierbar, wenn $\operatorname{rk} A = n$ gilt, also $FA$ in reduzierter Zeilenstufenform mit $n$ Stufen ist. Die einzige $n \times n$-Matrix in reduzierter Zeilenstufenform mit $n$ Stufen ist aber die Einheitsmatrix. Also ist $A$ genau dann invertierbar, wenn $FA = E$ gilt, und die inverse Matrix $F = A^{-1}$ steht in diesem Fall in der rechten Hälfte $FE$ der umgeformten erweiterten Matrix. □

**Folgerung 15.36.** *Jede invertierbare Matrix ist ein Produkt von Elementarmatrizen.*

*Beweis.* Zu jedem $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ gibt es nach Satz 15.35 ein Produkt $F = F_1 \cdot \dots \cdot F_k$ von Elementarmatrizen $F_1, \dots, F_k$ mit $F = A^{-1}$. Da die inversen Matrizen von Elementarmatrizen nach Bemerkung 15.25 (a) wieder Elementarmatrizen sind, ist damit aber auch $A = F^{-1} = F_k^{-1} \cdot \dots \cdot F_1^{-1}$ ein Produkt von Elementarmatrizen. □

**Beispiel 15.37.** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wir bringen nun $A$ mit Satz 15.27 in reduzierte Zeilenstufenform, führen aber alle Umformungen mit der $2 \times 4$-Matrix $(A \mid E_2)$ durch:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{Z2-3Z1 \to Z2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \overset{Z1-Z2 \to Z1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Da in der linken Hälfte nun die Einheitsmatrix steht, ist $A$ nach Satz 15.35 invertierbar, und die zu $A$ inverse Matrix ist die rechte Hälfte

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Als letzten Algorithmus wollen wir nun noch untersuchen, welche Schlussfolgerungen wir ziehen können, wenn wir in einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ elementare Spalten- statt Zeilenumformungen durchführen, was nach Bemerkung 15.25 (d) als Multiplikation mit einem Produkt von Elementarmatrizen von rechts geschrieben werden kann. Natürlich entspricht dies auch genau elementaren Zeilenumformungen in der transponierten Matrix $A^\mathsf{T}$. Da wir $A^\mathsf{T}$ nach Satz 15.30 mit elementaren Zeilenumformungen in eine Zeilenstufenform mit $\mathrm{rk}(A^\mathsf{T})$ Stufen bringen können, können wir also auch $A$ mit elementaren Spaltenumformungen in eine *Spaltenstufenform* (d. h. eine transponierte Zeilenstufenform) mit $\mathrm{rk}(A^\mathsf{T})$ Stufen bringen. Wie wir jetzt zeigen wollen, kann man auch an dieser Spaltenstufenform das Bild von $A$ ablesen, auch wenn sie ganz anders aussieht als die Zeilenstufenform.

**Satz 15.38** (Alternative Formel für Bild und Rang einer Matrix)**.** *Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{m \times n}$. Wir bringen $A$ mit elementaren Spaltenumformungen in Spaltenstufenform*

$$AF = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow k_1 \\ \leftarrow k_2 \\ \\ \leftarrow k_r \end{matrix}$$

*mit $F \in \mathrm{GL}(n, K)$, wobei $r = \mathrm{rk}(A^\mathsf{T})$ die Anzahl der Stufen und $k_1 < \cdots < k_r$ die Stufenzeilen von $AF$ sind; die Matrix $AF$ hat also die Form $AF =: (a_1 \mid \cdots \mid a_r \mid 0 \mid \cdots \mid 0)$ für gewisse $a_1, \ldots, a_r \in K^m$.*

*Dann ist $(a_1, \ldots, a_r)$ eine Basis von* $\mathrm{Im} A$. *Insbesondere gilt damit* $\mathrm{rk} A = r = \mathrm{rk}(A^\mathsf{T})$.

*Beweis.* Wir müssen zwei Dinge über die Familie $B := (a_1, \ldots, a_r)$ zeigen:

(a) $B$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Im} A$: Es gilt

$$\mathrm{Im}(AF) = \{AFx : x \in K^n\} = \{Ay : y \in K^n\} = \mathrm{Im} A$$

mit der Substitution $y = Fx$ (bzw. $x = F^{-1}y$). Also wird $\mathrm{Im} A = \mathrm{Im}(AF)$ von den Spalten von $AF$ erzeugt, und damit von $B$.

(b) $B$ ist linear unabhängig: Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ mit $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r = 0$. Betrachten wir diese Gleichung der Reihe nach in den Koordinaten $k_1, \ldots, k_r$, so erhalten wir wegen der Spaltenstufenform von $AF$ daraus $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$. □

**Beispiel 15.39.** Wir betrachten noch ein letztes Mal die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$$

aus Beispiel 15.28, und bringen sie diesmal mit elementaren Spaltenumformungen in Spaltenstufenform:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \overset{-S1\to S1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \overset{\substack{S2-2S1\to S2\\ S3-2S1\to S3\\ S4-3S1\to S4\\ S5-4S1\to S5}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\overset{S2\leftrightarrow S3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \overset{\substack{S4-S2\to S4\\ S5-3S2\to S5}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nach Satz 15.38 ist also

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von $\mathrm{Im}A$ (die sich von der aus Beispiel 15.31 unterscheidet). Beachte, dass wir diesmal im Gegensatz zu Beispiel 15.31 die Spalten der umgeformten Matrix und nicht die von $A$ nehmen müssen!

**Bemerkung 15.40** (Invarianz des Rangs einer Matrix unter Transposition)**.** Als Folgerung aus unseren beiden Algorithmen zur Berechnung des Rangs einer Matrix haben wir in Satz 15.38 gesehen, dass $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}(A^\mathsf{T})$ für jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ gilt. Diese wichtige Eigenschaft des Rangs ist ganz und gar nicht aus der Definition $\mathrm{rk}A = \dim \mathrm{Im}A$ bzw. $\mathrm{rk}(A^\mathsf{T}) = \dim \mathrm{Im}(A^\mathsf{T})$ offensichtlich – in der Tat sind $\mathrm{Im}A$ und $\mathrm{Im}(A^\mathsf{T})$ komplett verschiedene Unterräume, die ja sogar in unterschiedlichen Vektorräumen $K^m$ bzw. $K^n$ liegen. In der Praxis bedeutet sie, dass jede Eigenschaft des Rangs, die für die Spalten einer Matrix gilt, auch für die Zeilen gilt: So ist der Rang z. B. nicht nur wie in Bemerkung 15.12 (a) die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten von $A$, sondern auch die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen von $A$.

34

**Algorithmus 15.41** (Weitere Algorithmen der linearen Algebra)**.** Die numerische Berechnung unserer anderen bisher aufgetretenen Fragestellungen der linearen Algebra lässt sich leicht auf die in diesem Abschnitt behandelten Sätze bzw. Algorithmen zurückführen:

(a) *Eindeutige Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen:* Es seien $m,n \in \mathbb{N}$ sowie $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^m$. Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist nach Satz 15.33 genau dann eindeutig lösbar, wenn $\mathrm{rk}(A\,|\,b) = \mathrm{rk}A$ und $\dim \mathrm{Ker}A = 0$ gilt, was nach der Dimensionsformel für Matrizen äquivalent ist zu $\mathrm{rk}(A\,|\,b) = \mathrm{rk}A = n$.

Ist $A$ sogar quadratisch (also $m = n$), so folgt dabei aus $\mathrm{rk}A = n$ bereits $\mathrm{rk}(A\,|\,b) = n$, denn wegen $(A\,|\,b) \in K^{n\times(n+1)}$ kann der Rang dieser Matrix nicht größer werden als $n$. Damit ist das Gleichungssystem $Ax = b$ im quadratischen Fall genau dann eindeutig lösbar, wenn $\mathrm{rk}A = n$ gilt, also $A$ invertierbar ist. Die eindeutige Lösung ist dann natürlich $x = A^{-1}b$ wie in Bemerkung 15.20 (b).

(b) *Lineare Abhängigkeit:* Es seien $r,n \in \mathbb{N}$ und $x_1,\dots,x_r \in K^n$. Die Familie $(x_1,\dots,x_r)$ ist genau dann linear unabhängig, wenn sie eine Basis von $\mathrm{Lin}(x_1,\dots,x_r) = \mathrm{Im}A$ mit $A := (x_1\,|\,\cdots\,|\,x_r)$ ist. Mit Folgerung 14.21 ist dies äquivalent zu $\mathrm{rk}A = r$.

(c) *Basisauswahl:* Es seien wieder $r,n \in \mathbb{N}$ und $x_1,\dots,x_r \in K^n$ Vektoren, die damit ein Erzeugendensystem von $U := \mathrm{Lin}(x_1,\dots,x_r) = \mathrm{Im}A$ mit $A := (x_1\,|\,\cdots\,|\,x_r)$ bilden. Um aus diesen Vektoren eine Basis von $U$ auszuwählen, können wir einfach mit Satz 15.30 eine Basis von $U$ bestimmen, die aus geeigneten Spalten von $A$ besteht.

(d) *Basisergänzung:* Nun seien die Vektoren $x_1,\dots,x_r \in K^n$ linear unabhängig; wir wollen sie zu einer Basis von $K^n$ ergänzen. Auch dazu bilden wir wieder die Matrix $A = (x_1\,|\,\cdots\,|\,x_r)$, die nach (b) Rang $r$ hat. Diesmal bringen wir sie aber wie in Satz 15.38 mit elementaren Spaltenumformungen in eine Spaltenstufenform mit $r$ Stufen.

Sind dabei $j_1,\dots,j_{n-r}$ die Nichtstufenzeilen, so ergänzen die entsprechenden Einheitsvektoren $e_{j_1},\dots,e_{j_{n-r}}$ die Vektoren $x_1,\dots,x_r$ zu einer Basis von $K^n$: Diese Vektoren liefern nämlich die fehlenden Stufen in der Spaltenstufenform, d. h. wir können die erweiterte Matrix $(x_1|\cdots|x_r|e_{j_1}|\cdots|e_{j_{n-r}})$ mit elementaren Spaltenumformungen in eine Spaltenstufenform mit $n$ Stufen bringen – was genau bedeutet, dass ihr Rank gleich $n$ ist und die Vektoren in ihren Spalten damit eine Basis von $K^n$ sind.

(e) *Durchschnitt und Summe von Unterräumen:* Wie wir in Algorithmus 14.27 schon gesehen haben, führt die Berechnung des Durchschnitts von Unterräumen auf ein lineares Gleichungssystem, und die Berechnung der Summe auf eine Basisauswahl. Beides können wir nun mit Hilfe der Methoden aus diesem Kapitel behandeln.

**Aufgabe 15.42.**

(a) Berechne Basen von $\mathrm{Im}A$ und $\mathrm{Ker}A$ für die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Berechne den Rang der reellen Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & b & b & b \\ a & 0 & b & b \\ a & a & 0 & b \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $a,b \in \mathbb{R}$.

(c) Zeige, dass die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ invertierbar ist, und berechne $A^{-1}$.

**Aufgabe 15.43.** Gegeben seien in $\mathbb{R}^5$ die Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix};$$

wir setzen $A = (x_1|x_2|x_3|x_4|x_5) \in \mathbb{R}^{5\times 5}$.

(a) Wähle aus $(x_1,\dots,x_5)$ eine Basis von $\mathrm{Im}A$ aus und berechne eine Basis von $\mathrm{Im}(A^\mathsf{T})$.

(b) Bestimme die Dimension von $\mathrm{Lin}(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

(c) Gilt $\mathrm{Lin}(x_1,x_4) \cap \mathrm{Lin}(x_1,x_5) = \{0\}$?

(Hinweis: Die Lösung zu allen Aufgabenteilen lässt sich aus derselben Rechnung ableiten.)

**Aufgabe 15.44.** In $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Unterräume

$$U_1 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad U_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = x_1 + x_2 - 3x_4 = 0\}.$$

(a) Berechne Basen von $U_1$, $U_2$, $U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2$.

(b) Ergänze die in (a) gefundene Basis von $U_2$ zu einer Basis von $U_1 + U_2$.

**Aufgabe 15.45** (Elementare Codierungstheorie)**.** In dieser Aufgabe seien $K = \mathbb{Z}_2$ der Körper mit 2 Elementen aus Beispiel 3.6 (b), sowie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{7\times 4}.$$

(a) Berechne eine Matrix $B \in K^{3\times 7}$ mit $\operatorname{Im} A = \operatorname{Ker} B$.

(b) Zeige, dass es zu jedem $y \in K^7$ genau ein $x \in K^4$ gibt, für das sich $y$ von $Ax$ in höchstens einer Koordinate unterscheidet.

(Hinweis: der Vektor $By \in K^3$ sollte erkennen lassen, wo dieser Unterschied liegt.)

Diese Aufgabe beinhaltet die Grundidee der sogenannten Codierungstheorie. Angenommen, wir wollen einen Vektor $x \in K^4$ (also 4 Bits) über eine gestörte Leitung an einen Empfänger übertragen. Wenn wir dann statt der 4 Bits $x$ die 7 Bits $Ax$ übertragen und beim Empfänger statt $Ax$ fälschlicherweise $y$ ankommt, kann dieser nach (b) die ursprüngliche Information $x$ auch dann noch aus $y$ rekonstruieren, wenn bei ihm ein Bit falsch angekommen ist. Auf vielen Datenträgern, Strichcodes oder QR-Codes sind die Daten in einer solchen Art codiert, damit Lesefehler automatisch erkannt und korrigiert werden können.

**Aufgabe 15.46.** Es sei $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix vom Rang $r$.

Beweise, dass es dann Matrizen $B \in K^{m\times r}$ und $C \in K^{r\times n}$ vom Rang $r$ gibt mit $A = BC$.

(Hinweis: Zeige die Aussage zunächst für den Fall, dass $A$ in Zeilenstufenform ist.)

**Aufgabe 15.47.** Es seien $m,n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $A \in K^{m\times n}$. Wir wählen eine beliebige Basis $(x_1,\dots,x_k)$ von $\operatorname{Ker} A$ und ergänzen sie zu einer Basis $(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_l)$ von $K^n$.

Zeige durch direktes Nachprüfen der Definitionen, dass $(Ay_1,\dots,Ay_l)$ dann eine Basis von $\operatorname{Im} A$ ist.

Insbesondere erhalten wir auf diese Art also einen alternativen Beweis der Dimensionsformel für Matrizen (siehe Satz 15.33 (a))

$$\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = n.$$

# 16. Lineare Abbildungen

In den letzten Kapiteln haben wir ausführlich Vektorräume untersucht – also die grundlegende Struktur, mit der sich die lineare Algebra befasst – und dabei auch gesehen, wie man konkret mit ihnen rechnen kann. Um nun verschiedene Vektorräume miteinander in Verbindung setzen zu können, müssen wir als Nächstes Abbildungen zwischen Vektorräumen untersuchen, die mit den gegebenen Vektorraumstrukturen verträglich sind. Dies wollen wir in diesem Kapitel tun.

In der Tat ist dies eine sehr allgemeine Vorgehensweise der Mathematik: Immer wenn man eine neue mathematische Struktur (wie z. B. Gruppen, Körper, oder jetzt hier die Vektorräume) einführt, wird man als Erstes zwei Dinge untersuchen:

- die sogenannten *Unterstrukturen*, d. h. Teilmengen, die selbst wieder die betrachtete Struktur haben (in der linearen Algebra also die Untervektorräume aus Abschnitt 13.B), und
- die sogenannten *Morphismen*, d. h. Abbildungen, die diese Struktur erhalten.

Wir haben dies in Abschnitt 3.A nur deswegen für Gruppen und Körper nicht getan, weil wir in dieser Vorlesung nur Vektorräume, aber nicht Gruppen und Körper ausführlich studieren wollen. Diejenigen von euch, die auch die Parallelvorlesung „Algebraische Strukturen“ hören, haben dort aber z. B. auch schon Untergruppen und Morphismen von Gruppen kennengelernt – und werden im Vergleich zur linearen Algebra sicher feststellen, dass sich Untervektorräume und Morphismen von Vektorräumen in vielerlei Hinsicht sehr ähnlich verhalten.

## 16.A Morphismen von Vektorräumen

In der linearen Algebra besteht die „Struktur“ eines Vektorraums gemäß Definition 13.1 in der Existenz einer Vektoraddition und einer Skalarmultiplikation mit gewissen Eigenschaften. Die mit dieser Struktur verträglichen Abbildungen sind also genau die im Sinne der folgenden Definition *linearen* Abbildungen.

**Definition 16.1** (Lineare Abbildungen bzw. Morphismen)**.** Es seien $V$ und $W$ zwei Vektorräume über demselben Grundkörper $K$. Man nennt eine Abbildung $f\colon V \to W$ eine **lineare Abbildung** oder **Morphismus** (oder **(Vektorraum-)Homomorphismus**), wenn für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in K$ gilt, dass

$$f(x+y) = f(x)+f(y) \quad (\text{„}f \text{ ist verträglich mit der Vektoraddition“})$$
$$\text{und} \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad (\text{„}f \text{ ist verträglich mit der Skalarmultiplikation“}).$$

Die Menge aller solchen Morphismen mit Startraum $V$ und Zielraum $W$ wird mit $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ bezeichnet (oder auch nur mit $\mathrm{Hom}(V,W)$, wenn der Grundkörper aus dem Zusammenhang klar ist).

Ist $V = K^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so schreiben wir statt $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$ der Einfachheit halber oft nur $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

**Bemerkung 16.2.** Setzt man $\lambda = 0$ in Definition 16.1 ein, so erhält man sofort, dass $f(0) = 0$ für jeden Morphismus $f\colon V \to W$ gelten muss. Für ein festes $b \in V \setminus \{0\}$ ist also z. B. die Verschiebeabbildung $f\colon V \to V$, $x \mapsto x+b$ wegen $f(0) = b \neq 0$ nie ein Morphismus.

Beachte, dass es hier also (leider) unterschiedliche Notationen in der Analysis und der linearen Algebra gibt: Eine Funktion der Form $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax+b$ mit $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ würde man in der Analysis im Sinne von Definition 3.24 als linear bezeichnen, sie ist in der linearen Algebra gemäß Definition 16.1 aber wegen $f(0) \neq 0$ keine lineare Abbildung!

**Beispiel 16.3.**

(a) Für beliebige $K$-Vektorräume $V$ und $W$ ist die Nullabbildung $f\colon V \to W$, $x \mapsto 0$ natürlich immer ein Morphismus, ebenso für gleichen Start- und Zielraum die identische Abbildung $\mathrm{id}_V\colon V \to V$, $x \mapsto x$.

(b) Für eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ bezeichnen wir mit $f_A$ die Abbildung

$$f_A\colon K^n \to K^m,\ x \mapsto Ax.$$

Sie ist ein Morphismus, denn für alle $x, y \in K^n$ und $\lambda \in K$ gilt

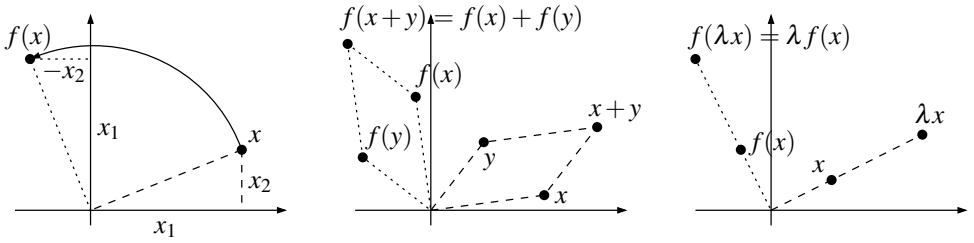
$$f_A(x+y) = A(x+y) = Ax+Ay = f_A(x)+f_A(y) \quad \text{und} \quad f_A(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda f_A(x).$$

Dies ist sicher das mit Abstand wichtigste Beispiel für eine lineare Abbildung – in der Tat werden wir in Abschnitt 16.C noch sehen, dass sogar *jede* lineare Abbildung von $K^n$ nach $K^m$ so geschrieben werden kann.

Konkret erhalten wir z. B. für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{die lineare Abbildung} \quad f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Geometrisch beschreibt sie wie im Bild unten links eine Vierteldrehung um den Ursprung. An den anderen beiden Bildern kann man die Morphismuseigenschaft auch gut anschaulich ablesen: Im mittleren Bild ist z. B. das gepunktete Parallelogramm aus der Drehung des gestrichelten entstanden, und der äußerste Punkt ergibt sich damit sowohl durch Addition der Punkte $f(x)$ und $f(y)$ als auch durch Drehung von $x+y$, d. h. es ist $f(x)+f(y) = f(x+y)$. Entsprechendes gilt für die Skalarmultiplikation im rechten Bild.




Anschaulich ist damit auch schon erkennbar, dass Drehungen um andere Winkel um den Ursprung ebenfalls Morphismen sein sollten. Wir werden solche allgemeinen Drehungen später in Beispiel 19.13 und Abschnitt 22.A noch untersuchen.

(c) Die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2$$

ist nicht linear, denn es ist z. B.

$$f\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1+1 = 2 \neq 0 = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

(d) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist die Transposition von Matrizen

$$f\colon K^{m\times n} \to K^{n\times m},\ A \mapsto A^{\mathsf{T}}$$

eine lineare Abbildung, denn für alle $A = (a_{i,j})_{i,j}, B = (b_{i,j})_{i,j} \in K^{m\times n}$ und $\lambda \in K$ gilt

$$f(A+B) = (A+B)^{\mathsf{T}} = (a_{j,i}+b_{j,i})_{i,j} = (a_{j,i})_{i,j} + (b_{j,i})_{i,j} = A^{\mathsf{T}} + B^{\mathsf{T}} = f(A) + f(B)$$

und $\quad f(\lambda A) = (\lambda a_{j,i})_{i,j} = \lambda(a_{j,i})_{i,j} = \lambda A^{\mathsf{T}} = \lambda f(A).$

(e) Zum Vektorraum $\mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller reellen Polynome aus Beispiel 13.12 (c) betrachten wir die Abbildung $f\colon \mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \varphi \mapsto \varphi'$, die jedem Polynom $\varphi\colon x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ seine *Ableitung*

$$\varphi'\colon x \mapsto \sum_{k=1}^n k\,a_k x^{k-1} \qquad (*)$$

zuordnet.

Wenn ihr die Ableitung bereits aus der Analysis kennt, wisst ihr aus Beispiel 10.9 (c) schon, dass die Ableitung eines Polynoms durch $(*)$ gegeben ist, und dass $f$ eine lineare Abbildung ist, da nach Satz 10.8 (a) und Beispiel 10.9 (b) für alle differenzierbaren Funktionen $\varphi$ und $\psi$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ sowohl $(\varphi+\psi)' = \varphi' + \psi'$ als auch $(\lambda\varphi)' = \lambda\varphi'$ gilt.

Wenn ihr die Ableitung aus der Analysis noch nicht kennt, könnt ihr $(*)$ für die Zwecke der linearen Algebra einfach als *Definition* der Ableitung eines Polynoms ansehen. Man rechnet dann schnell nach, dass $f$ wirklich eine lineare Abbildung ist: Für zwei Polynome $\varphi(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ und $\psi(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ (wobei $n$ der größere der beiden Grade ist, so dass sowohl $\varphi$ als auch $\psi$ so geschrieben werden können) sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$(\varphi+\psi)'(x) = \sum_{k=1}^n k\,(a_k+b_k)x^{k-1} = \sum_{k=1}^n k\,a_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^n k\,b_k x^{k-1} = \varphi'(x) + \psi'(x)$$

$$\text{und} \quad (\lambda\varphi)'(x) = \sum_{k=1}^n k\,(\lambda a_k)x^{k-1} = \lambda \sum_{k=1}^n k\,a_k x^{k-1} = \lambda\varphi'(x).$$

**Aufgabe 16.4.** Untersuche, ob die folgenden Abbildungen $f$ zwischen $\mathbb{R}$-Vektorräumen linear sind:

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax_2^2 + bx_2 \\ cx_1x_2 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von fest gegebenen $a,b,c \in \mathbb{R}$.

(b) $f\colon V \to V,\ \varphi \mapsto f(\varphi)$ mit $f(\varphi)(x) = x^2\,\varphi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 16.5.** Wir betrachten die Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{sowie} \quad y_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},\ y_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Man zeige:

(a) Es gibt einen Morphismus $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x_i) = e_i$ für alle $i \in \{1,2,3\}$.

(b) Es gibt einen Morphismus $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x_i) = y_i$ für alle $i \in \{1,2,3\}$.

(Die Morphismen müssen nicht explizit angegeben werden.)

Wir wollen nun einige elementare Eigenschaften von Morphismen zeigen und beginnen damit, dass Bilder und Urbilder (im Sinne von Definition 2.11) von Unterräumen unter Morphismen immer wieder Unterräume sind.

**Lemma 16.6** (Bilder und Urbilder von Unterräumen)**.** *Es sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) *Für jeden Unterraum $U$ von $V$ ist $f(U)$ ein Unterraum von $W$.*

(b) *Für jeden Unterraum $U$ von $W$ ist $f^{-1}(U)$ ein Unterraum von $V$.*

*Beweis.* Die Aussagen ergeben sich durch einfaches Nachprüfen der Definition 13.8:

(a) Wegen $0 \in U$ ist nach Bemerkung 16.2 zunächst auch $0 = f(0) \in f(U)$. Wir zeigen nun die Abgeschlossenheit von $f(U)$ bezüglich der Vektoraddition. Es seien dazu $x,y \in f(U)$, d. h. $x = f(u)$ und $y = f(v)$ für gewisse $u,v \in U$. Dann ist auch $u+v \in U$, und damit folgt $x+y = f(u)+f(v) = f(u+v) \in f(U)$.

Genauso zeigt man die Abgeschlossenheit unter der Skalarmultiplikation.

(b) Wegen $f(0) = 0 \in U$ ist zunächst einmal $0 \in f^{-1}(U)$. Wir zeigen jetzt die Abgeschlossenheit von $f^{-1}(U)$ unter der Vektoraddition. Dazu seien $x, y \in f^{-1}(U)$, d. h. $x, y \in V$ mit $f(x), f(y) \in U$. Dann ist auch $f(x+y) = f(x) + f(y) \in U$, also $x+y \in f^{-1}(U)$.

Analog ergibt sich die Abgeschlossenheit unter der Skalarmultiplikation. □

Die wichtigsten Spezialfälle dieses Lemmas sind die folgenden, die wir in Definition 15.10 und Lemma 15.11 schon im Zusammenhang mit Matrizen kennengelernt hatten:

**Definition 16.7** (Bild, Rang und Kern eines Morphismus)**.** Es sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung von $K$-Vektorräumen.

(a) Die Menge $\operatorname{Im} f := f(V) = \{f(x) : x \in V\}$ heißt das **Bild** von $f$; nach Lemma 16.6 (a) ist sie ein Unterraum von $W$. Die Dimension dieses Unterraums heißt der **Rang** von $f$, geschrieben $\operatorname{rk} f := \dim \operatorname{Im} f \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(b) Die Menge $\operatorname{Ker} f := f^{-1}(\{0\}) = \{x \in V : f(x) = 0\}$ heißt der **Kern** von $f$; nach Lemma 16.6 (b) ist sie ein Unterraum von $V$.

**Bemerkung 16.8.** Für eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ hatten wir in Beispiel 16.3 (b) die lineare Abbildung $f_A\colon K^n \to K^m$, $x \mapsto Ax$ konstruiert. Vergleichen wir nun Definition 16.7 mit den Definitionen 15.10 und 15.11, so sehen wir also unmittelbar, dass

$$\operatorname{Im} f_A = \operatorname{Im} A, \quad \operatorname{rk} f_A = \operatorname{rk} A \quad \text{und} \quad \operatorname{Ker} f_A = \operatorname{Ker} A$$

gilt. Insbesondere können wir damit Bild, Rang und Kern solcher linearen Abbildungen mit den Methoden aus Abschnitt 15.C auch explizit berechnen.

Offensichtlich ist eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ nach Definition genau dann surjektiv, wenn $\operatorname{Im} f = W$ gilt. Wir wollen jetzt ein analoges Kriterium auch für die Injektivität zeigen.

**Lemma 16.9.** *Eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ gilt.*

*Beweis.*

„⇒“: Ist $f$ injektiv, so hat der Nullvektor höchstens ein Urbild unter $f$. Wegen $f(0) = 0$ ist das Urbild des Nullvektors also genau der Nullvektor, d. h. es ist $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

„⇐“: Es sei $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Weiterhin seien $x, y \in V$ mit $f(x) = f(y)$. Wegen der Linearität von $f$ gilt dann $f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$, mit $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ also $x - y = 0$. Damit folgt $x = y$, d. h. $f$ ist injektiv. □

**Lemma 16.10** (Umkehrabbildungen und Verkettungen)**.** *Es sei $f\colon V \to W$ ein Morphismus von $K$-Vektorräumen. Dann gilt:*

(a) *Ist $f$ bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1}$ ein Morphismus.*

(b) *Ist $g\colon W \to Z$ ein weiterer Morphismus von $K$-Vektorräumen, so ist auch $g \circ f\colon V \to Z$ ein Morphismus.*

*Beweis.*

(a) Es seien $x, y \in W$; wir setzen $u = f^{-1}(x)$ und $v = f^{-1}(y)$, also $x = f(u)$ und $y = f(v)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(x+y) &= f^{-1}(f(u) + f(v)) \\ &= f^{-1}(f(u+v)) && (f \text{ ist ein Morphismus}) \\ &= u + v && (f^{-1} \text{ ist die Umkehrabbildung von } f) \\ &= f^{-1}(x) + f^{-1}(y). \end{aligned}$$

Analog zeigt man die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation.

(b) Für alle $x, y \in V$ gilt

$$\begin{aligned} g(f(x+y)) &= g(f(x)+f(y)) && (f \text{ ist ein Morphismus}) \\ &= g(f(x))+g(f(y)) && (g \text{ ist ein Morphismus}). \end{aligned}$$

Genauso ergibt sich die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation. □

**Aufgabe 16.11.** Man zeige: Sind $f, g\colon V \to W$ zwei lineare Abbildungen, so gilt

(a) $\operatorname{Im}(f+g) \leq \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$;

(b) $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \leq \operatorname{Ker}(f+g)$.

Weiterhin gebe man in beiden Fällen ein Beispiel an, das zeigt, dass man im Allgemeinen nicht „$\leq$“ durch „$=$“ ersetzen kann.

**Aufgabe 16.12.** Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ betrachten wir die Abbildung

$$f\colon \operatorname{Pol}_{n-1}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n,\ \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(1) \\ \vdots \\ \varphi(n) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass $f$ linear ist.

(b) Bestimme Kern und Bild von $f$, und gib dabei von jedem Element von $\operatorname{Im} f$ explizit ein Urbild an.

**Aufgabe 16.13.** Es sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen $K$-Vektorräumen. Ferner sei $U$ ein Unterraum von $V$ mit $U \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ und $U + \operatorname{Ker} f = V$.

Zeige, dass die Abbildung $f|_U\colon U \to \operatorname{Im} f$ bijektiv ist.

**Aufgabe 16.14.** Beweise für jede lineare Abbildung $f\colon V \to V$ mit gleichem Start- und Zielraum, dass

$$f \circ f = f \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_V - f) = \operatorname{Im} f.$$

Wie wir nun zum Abschluss dieses Abschnitts noch sehen wollen, haben bijektive Morphismen wie in Lemma 16.10 (a) in der Praxis eine besondere Bedeutung. Sie haben daher auch einen besonderen Namen:

**Definition 16.15** (Isomorphismen)**.** Es seien $V$ und $W$ zwei $K$-Vektorräume.

(a) Einen bijektiven Morphismus $f\colon V \to W$ (der nach Lemma 16.10 (a) also einen Umkehrmorphismus $f^{-1}\colon W \to V$ besitzt) bezeichnet man als **(Vektorraum-)Isomorphismus**.

(b) $V$ und $W$ heißen **isomorph** (in Zeichen: $V \cong W$), wenn es einen Isomorphismus $f\colon V \to W$ zwischen ihnen gibt.

**Beispiel 16.16.** Anschaulich bedeutet ein Isomorphismus $f$ zwischen zwei Vektorräumen $V$ und $W$, dass diese beiden Räume „als Vektorräume ununterscheidbar“ sind: Die Objekte in $V$ und $W$ sind zwar unterschiedlich benannt, aber in allen Rechnungen können wir jederzeit mit der bijektiven Abbildung $f$ bzw. der inversen Abbildung $f^{-1}$ zwischen den beiden Darstellungen in $V$ und $W$ hin- und herwechseln, ohne das Endergebnis zu ändern. Die folgenden beiden Beispiele verdeutlichen dies; viele weitere werden wir im nächsten Abschnitt noch kennenlernen.

(a) Der Unterraum

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \leq \mathbb{R}^3 \quad \text{ist mit} \quad f\colon V \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

isomorph zu $\mathbb{R}^2$. In der Tat ist in diesem Beispiel offensichtlich, dass $f$ linear und bijektiv ist. Auch anschaulich ist in diesem Fall klar, dass $V$ und $\mathbb{R}^2$ „im Prinzip ununterscheidbar“ sind, denn beide Räume sind einfach die reelle Ebene – die im Fall von $V$ lediglich als Koordinatenebene in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet ist.

(b) Für alle $m,n \in \mathbb{N}$ ist der Raum $K^{m\times n}$ aller $m \times n$-Matrizen über $K$ isomorph zu $K^{mn}$: Ein Isomorphismus $f\colon K^{m\times n} \to K^{mn}$ ist einfach dadurch gegeben, dass man die Einträge einer Matrix von links oben nach rechts unten nun untereinander in einen Vektor in $K^{mn}$ schreibt. Auch hier ist klar, dass $f$ linear und bijektiv ist, also dass die Anordnung der Zahlen – einmal als rechteckiges Schema und einmal untereinander geschrieben – nichts an der Vektorraumstruktur ändert, da Addition und Skalarmultiplikation in beiden Fällen einfach komponentenweise ausgeführt werden. (Dass es in $K^{m\times n}$ eine Matrixmultiplikation gibt, in $K^{mn}$ jedoch nicht, spielt hierbei keine Rolle, da dies nicht Teil der Vektorraumaxiome ist.)

35

Wie erwartet haben isomorphe Vektorräume als „ununterscheidbare Vektorräume“ auch immer die gleiche Dimension. Dies wollen wir zum Abschluss dieses Abschnitts noch formal beweisen.

**Lemma 16.17.** *Es sei $f\colon V \to W$ ein Morphismus zwischen endlich-dimensionalen $K$-Vektorräumen.*

(a) *Ist $f$ surjektiv, so bildet $f$ jedes Erzeugendensystem von $V$ auf ein Erzeugendensystem von $W$ ab. Insbesondere gilt dann also* $\dim V \geq \dim W$.

(b) *Ist $f$ injektiv, so bildet $f$ jede linear unabhängige Familie in $V$ auf eine linear unabhängige Familie in $W$ ab. Insbesondere gilt dann also* $\dim V \leq \dim W$.

(c) *Ist $f$ ein Isomorphismus, so bildet $f$ jede Basis von $V$ auf eine Basis von $W$ ab. Insbesondere gilt dann also* $\dim V = \dim W$.

*Beweis.* Es sei $B = (x_1,\dots,x_n)$ eine Familie von Vektoren in $V$. Wir betrachten die abgebildete Familie $f(B) := (f(x_1),\dots,f(x_n))$ von Vektoren in $W$.

(a) Es seien $B$ ein Erzeugendensystem von $V$ und $y \in W$ beliebig. Da $f$ surjektiv ist, gibt es zunächst ein $x \in V$ mit $f(x) = y$. Weil $B$ ein Erzeugendensystem von $V$ ist, können wir dann $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ für gewisse $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$ schreiben. Damit ist aber auch

$$y = f(x) = f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) \quad \in \operatorname{Lin} f(B).$$

Also ist $f(B)$ ein Erzeugendensystem von $W$.

Wenden wir dies auf eine Basis $B$ von $V$ an, so erhalten wir aus Folgerung 14.21 (a) sofort $\dim V = n \geq \dim W$.

(b) Es seien $B$ linear unabhängig und $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$ mit $\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) = 0$, also (weil $f$ linear ist) mit

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = 0.$$

Nach Voraussetzung ist $f$ injektiv, d. h. es ist $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ aufgrund von Lemma 16.9. Also folgt bereits $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$, und damit auch $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, da $B$ linear unabhängig ist. Die Familie $f(B)$ ist somit linear unabhängig.

Wenden wir dies wieder auf eine Basis $B$ von $V$ an, so erhalten wir aus Folgerung 14.21 (b) diesmal $\dim V = n \leq \dim W$.

(c) Dies ist einfach (a) kombiniert mit (b). □

## 16.B Die Klassifikation endlich-dimensionaler Vektorräume

Immer wenn man eine mathematische Struktur eingeführt und dazu ein paar Beispiele untersucht hat, fragt man sich in der Regel, ob man vielleicht sogar eine *vollständige* Liste aller Beispiele angeben kann – in der linearen Algebra also, ob wir eine vollständige Liste aller (endlich-dimensionalen) Vektorräume hinschreiben können. Dabei soll „vollständig“ immer „vollständig bis auf Isomorphie“ bedeuten, da wir ja gerade in Beispiel 16.16 gesehen haben, dass isomorphe Vektorräume von ihrer Struktur her ohnehin ununterscheidbar sind, so dass es uns natürlich reichen sollte, wenn dann einer von ihnen in unserer Liste steht.

Bei vielen mathematischen Strukturen ist eine derartige Klassifikation schlichtweg aussichtslos, weil es viel zu viele Beispiele gibt, die auch keinem ersichtlichen Schema folgen. Dies ist z. B. bei Gruppen (siehe Definition 3.1) der Fall – niemand kann eine vollständige Liste aller Gruppen (bis auf Isomorphie) angeben. Falls ihr die Parallelvorlesung „Algebraische Strukturen“ hört, in der Gruppen ausführlich untersucht werden, werdet ihr dort also nahezu keine Resultate in diese Richtung finden.

Es ist eine Besonderheit der linearen Algebra, dass dies bei endlich-dimensionalen Vektorräumen anders ist: Wie wir jetzt sehen wollen, sind diese Vektorräume genau durch ihre Dimension klassifiziert, d. h. zu jedem Körper $K$ und jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es bis auf Isomorphie *genau einen* $K$-Vektorraum dieser Dimension, nämlich $K^n$. Dies wird unsere weitere Arbeit ganz wesentlich vereinfachen: Wenn wir dann Aussagen über beliebige endlich-dimensionale Vektorräume beweisen wollen, genügt es deswegen nämlich, nur die Vektorräume $K^n$ zu betrachten – und mit denen lässt es sich natürlich deutlich leichter arbeiten als mit abstrakten Vektorräumen.

In der Tat haben wir alle Ideen zum Beweis dieser Klassifikation schon gesehen: Zu einem $n$-dimensionalen Vektorraum $V$ können wir nach Satz 14.11 eine Basis $B$ wählen, und dann jeden Vektor in $V$ nach Lemma 14.8 eindeutig durch seine Koordinaten bezüglich $B$ beschreiben, die einen Vektor in $K^n$ bilden. Diese Zuordnung liefert wie folgt den gewünschten Isomorphismus zwischen $V$ und $K^n$.

**Konstruktion 16.18** (Koordinatenabbildungen)**.** Es sei $V$ ein endlich erzeugter Vektorraum der Dimension $n = \dim V$ mit gegebener Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$. Da jeder Vektor $x \in V$ nach Lemma 14.8 eine eindeutige Darstellung $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ besitzt, gibt es dann eine bijektive Abbildung

$$\Phi_B \colon V \to K^n,\ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Man nennt $\Phi_B$ die **Koordinatenabbildung** zur Basis $B$, und $\Phi_B(x) \in K^n$ für ein $x \in V$ den **Koordinatenvektor** von $x$ bezüglich $B$. Offensichtlich ist $\Phi_B$ linear, und damit ein Isomorphismus zwischen $V$ und $K^n$.

**Beispiel 16.19.**

(a) Für die Standardbasis $B = (e_1, \dots, e_n)$ von $K^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist die Koordinatenabbildung $\Phi_B \colon K^n \to K^n$ natürlich einfach die identische Abbildung.

(b) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $B = (1, x, \dots, x^n)$ die Basis von $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aus Beispiel 14.5 (d). Die zugehörige Koordinatenabbildung

$$\Phi_B \colon \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1},\ a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \mapsto \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

ordnet dann einem Polynom genau seine Koeffizienten zu (in der Reihenfolge, die wir für die Basis $B$ gewählt haben). Also ist $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n+1}$. Im Sinne von Beispiel 16.16 ist dieser Isomorphismus auch hier anschaulich klar, da der Vektor der Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$ dieselben Informationen enthält wie das daraus gebildete Polynom $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$.

**Folgerung 16.20** (Klassifikation endlich-dimensionaler Vektorräume)**.** *Jeder endlich-dimensionale $K$-Vektorraum $V$ ist (über die Koordinatenabbildung zu einer beliebigen Basis) isomorph zu $K^n$ für ein eindeutig bestimmtes $n \in \mathbb{N}$, nämlich für $n = \dim V$.*

*Beweis.* Die Existenz eines Isomorphismus haben wir in Konstruktion 16.18 gesehen, die Eindeutigkeit von $n$ in Lemma 16.17 (c). □

Mit diesem wichtigen Ergebnis können wir nun wie angekündigt viele Aussagen und Rechenmethoden von $K^n$ auf beliebige endlich-dimensionale Vektorräume übertragen. Als Erstes betrachten wir dazu den offensichtlichen Isomorphismus $K^n \times K^m \cong K^{n+m}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$, der sich ergibt,

da die Elemente beider Seiten einfach durch $n+m$ skalare Komponenten gegeben sind. Für endlich erzeugte Vektorräume ergibt sich daraus die folgende Dimensionsaussage.

**Folgerung 16.21** (Dimensionsformel für Produkte)**.** *Sind $V$ und $W$ zwei endlich-dimensionale Vektorräume, so gilt*

$$\dim(V\times W)=\dim V+\dim W.$$

*Eine analoge Aussage gilt natürlich auch für Produkte von mehr als zwei Vektorräumen.*

*Beweis.* Nach Folgerung 16.20 gibt es Isomorphismen $f\colon V\to K^n$ und $g\colon W\to K^m$ mit $n=\dim V$ und $m=\dim W$. Dann ist aber auch

$$V\times W\to K^n\times K^m\cong K^{n+m},\ (x,x')\mapsto(f(x),g(x'))$$

ein Isomorphismus (mit Umkehrabbildung $(y,y')\mapsto(f^{-1}(y),g^{-1}(y'))$), und damit ergibt sich aus Folgerung 16.20

$$\dim(V\times W)=n+m=\dim V+\dim W.$$ □

Auch die Algorithmen zur Bestimmung von Erzeugendensystemen und linearer Unabhängigkeit, zur Basisauswahl und -ergänzung, oder zur Berechnung von Durchschnitten und Summen von Unterräumen können wir über Koordinatenabbildungen von $K^n$ auf beliebige endlich-dimensionale Vektorräume übertragen. Am besten sieht man dies vermutlich an einem Beispiel:

**Beispiel 16.22.** Im Vektorraum $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller reellen Polynome vom Grad höchstens 3 seien

$$U_1=\mathrm{Lin}(1+2x^3,x+x^2+x^3)\quad\text{und}\quad U_2=\mathrm{Lin}(1+x+2x^3,x^2+x^3).$$

Um mit diesen Unterräumen konkrete Berechnungen durchzuführen, können wir gemäß Beispiel 14.5 (d) die Basis $B=(1,x,x^2,x^3)$ von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ wählen und die Koordinatenvektoren bezüglich $B$ benutzen. Konkret sind diese Koordinatenvektoren der oben gegebenen Polynome die Vektoren

$$\Phi_B(1+2x^3)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix},\ \Phi_B(x+x^2+x^3)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \Phi_B(1+x+2x^3)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\ \Phi_B(x^2+x^3)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\qquad(*)$$

in $\mathbb{R}^4$. Damit können wir z. B. berechnen:

(a) Da die ersten beiden Vektoren in $(*)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^4$ sind, sind die Polynome $1+2x^3$ und $x+x^2+x^3$ nach Lemma 16.17 (b) linear unabhängig in $U_1$, und damit eine Basis von $U_1$. Es ist also $\dim U_1=2$. Analog sieht man auch $\dim U_2=2$.

(b) Die ersten beiden Vektoren in $(*)$ bilden eine $4\times 2$-Matrix in Spaltenstufenform mit 2 Stufen und den Stufenzeilen 1 und 2. Nach Algorithmus 15.41 (d) können sie also mit den Einheitsvektoren $e_3$ und $e_4$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzt werden. Anwenden des Isomorphismus $\Phi_B^{-1}$ liefert daher mit Lemma 16.17 (c), dass $\Phi_B^{-1}(e_3)=x^2$ und $\Phi_B^{-1}(e_4)=x^3$ die Polynome $1+2x^3$ und $x+x^2+x^3$ zu einer Basis von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ergänzen.

(c) Um eine Basis des Durchschnitts $U_1\cap U_2$ zu bestimmen, berechnen wir zunächst das Bild dieses Durchschnitts unter $\Phi_B$. Diese Rechnung haben wir schon in Algorithmus 14.27 (a) durchgeführt: Es ist

$$\Phi_B(U_1)\cap\Phi_B(U_2)=\mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\cap\mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Lin}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}\quad\subset\mathbb{R}^4.$$

Anwenden von $\Phi_B^{-1}$ liefert also $U_1\cap U_2=\mathrm{Lin}(1+x+x^2+3x^3)$; insbesondere hat $U_1\cap U_2$ damit die Dimension 1.

## 16.C Abbildungsmatrizen

Im letzten Abschnitt haben wir endlich-dimensionale Vektorräume klassifiziert: Jeder solche Vektorraum $V$ ist (über die Koordinatenabbildung zu einer beliebigen Basis) isomorph zu $K^n$ mit $n = \dim V$. Mit diesem sehr nützlichen Ergebnis der linearen Algebra kann man sowohl Beweise (wie in Folgerung 16.21) als auch Rechnungen (wie in Beispiel 16.22) in $V$ auf solche in $K^n$ zurückzuführen, wo sie z. B. mit Hilfe von Matrizen und dem Gauß-Algorithmus oft einfacher durchführbar sind.

Ein ähnliches Klassifikationsproblem wollen wir nun auch für Morphismen untersuchen: Ist $W$ ein weiterer endlich-dimensionaler Vektorraum der Dimension $m$, können wir dann alle linearen Abbildungen von $V$ nach $W$ klassifizieren, also die Menge $\mathrm{Hom}(V,W)$ beschreiben? Wenn ihr auch die „Algebraischen Strukturen“ hört, habt ihr dort vielleicht schon das eine oder andere Mal das analoge Problem für Gruppen gesehen – also alle Morphismen zwischen zwei gegebenen Gruppen zu bestimmen – und gesehen, dass dies in der Regel gar nicht so einfach ist und sehr von den konkret betrachteten Gruppen abhängt. Aber auch hier wollen wir jetzt sehen, dass sich die lineare Algebra wieder viel schöner verhält und eine ganz explizite Beschreibung von $\mathrm{Hom}(V,W)$ ermöglicht.

Im Sinne unserer Klassifikationsidee sollten wir dazu natürlich $V$ und $W$ durch die dazu isomorphen Vektorräume $K^n$ und $K^m$ ersetzen können. Wir betrachten daher jetzt zunächst einmal die Menge $\mathrm{Hom}(K^n,K^m)$ aller linearen Abbildungen von $K^n$ nach $K^m$ und untersuchen anschließend, wie der allgemeine Fall darauf zurückgeführt werden kann.

Im Fall des Start- und Zielraums $K^n$ bzw. $K^m$ haben wir in Beispiel 16.3 (b) schon viele Morphismen gesehen, nämlich zu jeder Matrix $A \in K^{m\times n}$ die lineare Abbildung

$$f_A \colon K^n \to K^m,\ x \mapsto Ax.$$

Wir werden nun zeigen, dass in der Tat *jede* lineare Abbildung von $K^n$ nach $K^m$ von dieser Form ist – und zwar sogar mit einer eindeutig bestimmten Matrix $A$. In diesem Sinne sind lineare Abbildungen in $\mathrm{Hom}(K^n,K^m)$ und Matrizen in $K^{m\times n}$ also „im Prinzip dasselbe“. Wie ihr vielleicht schon vermutet, wird dies dann exakt formuliert in der Sprechweise der linearen Algebra wieder heißen, dass $\mathrm{Hom}(K^n,K^m)$ und $K^{m\times n}$ isomorphe Vektorräume sind.

**Satz und Definition 16.23** (Lineare Abbildungen $K^n \to K^m$ und Abbildungsmatrizen)**.** *Zu jeder linearen Abbildung $f\colon K^n \to K^m$ mit $m,n \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ mit $f = f_A$ wie in Beispiel 16.3 (b), also mit*

$$f(x) = Ax \quad \text{für alle } x \in K^n,$$

*nämlich $A = (f(e_1)\,|\,\cdots\,|\,f(e_n))$. Wir nennen sie die **Abbildungsmatrix** von $f$ und bezeichnen sie mit $A_f$.*

*Beweis.* Die geforderte Bedingung legt nach Beispiel 15.6 (c) für alle $j = 1,\dots,n$ die $j$-te Spalte von $A$ fest zu $Ae_j = f(e_j)$. Damit ist $A$ eindeutig bestimmt als $(f(e_1)\,|\,\cdots\,|\,f(e_n))$. Da $f$ linear ist, folgt aus dieser Beziehung für die Einheitsvektoren aber auch für alle $x \in K^n$ mit Koordinaten $x_1,\dots,x_n$

$$f(x) = f(x_1e_1+\cdots+x_ne_n) = x_1f(e_1)+\cdots+x_nf(e_n) = x_1Ae_1+\cdots+x_nAe_n = Ax. \qquad \square$$

**Folgerung 16.24.** *Für alle $m,n \in \mathbb{N}$ gilt:*

(a) $\mathrm{Hom}(K^n,K^m)$ *ist ein Unterraum von* $\mathrm{Abb}(K^n,K^m)$*, und die Abbildung*

$$K^{m\times n} \to \mathrm{Hom}(K^n,K^m),\ A \mapsto f_A$$

*ist ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung* $\mathrm{Hom}(K^n,K^m) \to K^{m\times n},\ f \mapsto A_f$.

*Insbesondere ist also* $\dim \mathrm{Hom}(K^n,K^m) = m\cdot n$.

(b) *Unter dem Isomorphismus aus (a) entspricht die Matrixmultiplikation der Verkettung von Morphismen, d. h. für alle linearen Abbildungen $f\colon K^n \to K^m$ und $g\colon K^m \to K^p$ gilt*

$$A_{g\circ f} = A_g \cdot A_f.$$

*Beweis.*

(a) Die Abbildung $K^{m\times n} \to \mathrm{Abb}(K^n, K^m)$, $A \mapsto f_A$ ist linear, denn für alle $A, B \in K^{m\times n}$ sowie $x \in K^n$ und $\lambda \in K$ gilt

$$f_{A+B}(x) = (A+B)x = Ax + Bx = f_A(x) + f_B(x) \quad \text{und} \quad f_{\lambda A}(x) = (\lambda A)x = \lambda(Ax) = \lambda f_A(x),$$

und damit $f_{A+B} = f_A + f_B$ und $f_{\lambda A} = \lambda f_A$. Nach Satz 16.23 ist diese Abbildung injektiv mit Bild $\mathrm{Hom}(K^n, K^m)$. Also ist $\mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ nach Lemma 16.6 (a) ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(K^n, K^m)$, und die eingeschränkte Abbildung $K^{m\times n} \to \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$, $A \mapsto f_A$ ist ein Isomorphismus. Nach Definition der Abbildungsmatrix ist ihre Umkehrabbildung genau $\mathrm{Hom}(K^n, K^m) \to K^{m\times n}$, $f \mapsto A_f$.

(b) Für alle $x \in K^n$ gilt

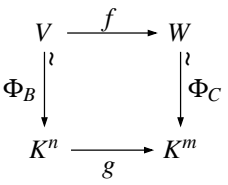
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(A_f \cdot x) = A_g \cdot A_f \cdot x,$$

d. h. $A_g \cdot A_f$ ist die Abbildungsmatrix von $g \circ f$. □

36

**Konstruktion 16.25** (Lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen)**.** Wie angekündigt wollen wir die Ergebnisse von Satz 16.23 und Folgerung 16.24 jetzt auf Morphismen zwischen beliebigen endlich-dimensionalen Vektorräumen $V$ und $W$ übertragen.

Die Idee dazu ist im Diagramm rechts dargestellt: Wir wählen Basen $B$ und $C$ von $V$ bzw. $W$, die zu den vertikal eingezeichneten Koordinatenabbildungen $\Phi_B \colon V \to K^n$ und $\Phi_C \colon W \to K^m$ mit $n = \dim V$ und $m = \dim W$ führen. Die Schlangen am Beginn dieser Pfeile deuten an, dass es sich dabei um Isomorphismen handelt. Mit $\Phi_B$ und $\Phi_C$ wollen wir nun Abbildungen $f \colon V \to W$ mit Abbildungen $g \colon K^n \to K^m$ in Beziehung setzen.




Ist z. B. $f \colon V \to W$ gegeben, so können wir daraus eine Abbildung $g \colon K^n \to K^m$ konstruieren, indem wir im Diagramm „den Umweg über $f$ nehmen“, also durch

$$g = \Phi_C \circ f \circ \Phi_B^{-1} \quad \text{bzw.} \quad f = \Phi_C^{-1} \circ g \circ \Phi_B.$$

Genauso können wir mit diesen Gleichungen natürlich auch umgekehrt $f$ aus $g$ konstruieren. Nach Lemma 16.10 (b) ist $f$ dabei genau dann ein Morphismus, wenn $g$ einer ist. Da ein Morphismus $g \colon K^n \to K^m$ nun nach Satz 16.23 immer die Form $x \mapsto Ax$ mit $A \in K^{m\times n}$ hat, erhalten wir daraus den Morphismus

$$f \colon V \to W,\ x \mapsto \Phi_C^{-1}(A \cdot \Phi_B(x)), \quad \text{bzw. mit} \quad \Phi_C(f(x)) = A \cdot \Phi_B(x) \ \text{ für alle } x \in V.$$

Wir bezeichnen diesen Morphismus mit $f_A^{B,C} \colon V \to W$. Beachte, dass er sich von der bisherigen Formel aus Satz 16.23 nur um die Koordinatenabbildungen unterscheidet: Während wir die Matrix $A$ bisher direkt mit dem Startvektor multipliziert haben, um den Zielvektor zu erhalten, müssen wir sie jetzt mit dem *Koordinatenvektor* des Startvektors multiplizieren, um den *Koordinatenvektor* des Zielvektors zu erhalten. Im Fall $V = K^n$ und $W = K^m$, und wenn $B$ und $C$ die Standardbasen sind, sind die Koordinatenabbildungen natürlich die Identität, und wir erhalten genau die bisherige Formel zurück.

Die obigen Formeln erscheinen auf den ersten Blick vielleicht etwas unübersichtlich. In der Praxis ergibt sich ihre Anwendung aber oft ganz von selbst, da wir eine Matrix ja gar nicht mit einem Vektor in einem allgemeinen Vektorraum $V$ multiplizieren können und beim Matrixprodukt auch kein Vektor eines allgemeinen Vektorraums $W$ herauskommt – so dass klar ist, dass wir hier mit den jeweiligen Koordinatenvektoren arbeiten müssen.

Mit dieser Konstruktion können wir nun wie gewünscht Satz 16.23 und Folgerung 16.24 auf beliebige endlich-dimensionale Vektorräume übertragen:

**Satz und Definition 16.26** (Lineare Abbildungen $V \to W$ und Abbildungsmatrizen)**.** *Es seien $V$ und $W$ zwei endlich-dimensionale Vektorräume mit $n := \dim V$ und $m := \dim W$. Ferner wählen wir Basen $B = (x_1, \ldots, x_n)$ und $C = (y_1, \ldots, y_m)$ von $V$ bzw. $W$.*

*Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $f: V \to W$ genau eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ mit $f = f_A^{B,C}$ wie in Konstruktion 16.25, also mit*

$$\Phi_C(f(x)) = A \cdot \Phi_B(x) \quad \text{für alle } x \in V,$$

*nämlich $A = (\Phi_C(f(x_1)) \mid \cdots \mid \Phi_C(f(x_n)))$. Wir nennen sie die **Abbildungsmatrix** von $f$ bezüglich $B$ und $C$ und bezeichnen sie mit $A_f^{B,C}$.*

*Beweis.* Wir verwenden die Bezeichnungen aus Konstruktion 16.25. Zu $f$ gibt es dann zunächst genau eine lineare Abbildung $g: K^n \to K^m$ mit $f = \Phi_C^{-1} \circ g \circ \Phi_B$, und dazu dann genau eine Abbildungsmatrix $A$ wie in Satz 16.23, also mit

$$f(x) = \Phi_C^{-1}(A \cdot \Phi_B(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_C(f(x)) = A \cdot \Phi_B(x) \text{ für alle } x \in V.$$

Wegen $\Phi_B(x_j) = e_j$ für $j = 1, \dots, n$ ist dabei die $j$-te Spalte von $A$ wie behauptet gegeben durch

$$Ae_j = A \cdot \Phi_B(x_j) = \Phi_C(f(x_j)). \qquad \square$$

**Folgerung 16.27.** *Es seien wieder $V$ und $W$ zwei endlich-dimensionale Vektorräume mit $n := \dim V$ und $m := \dim W$ sowie Basen $B = (x_1, \dots, x_n)$ bzw. $C = (y_1, \dots, y_m)$. Dann gilt:*

(a) $\mathrm{Hom}(V,W)$ *ist ein Unterraum von* $\mathrm{Abb}(V,W)$*, und die Abbildung*

$$K^{m\times n} \to \mathrm{Hom}(V,W),\ A \mapsto f_A^{B,C}$$

*ist ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung* $\mathrm{Hom}(V,W) \to K^{m\times n},\ f \mapsto A_f^{B,C}$.

*Insbesondere ist also* $\dim \mathrm{Hom}(V,W) = \dim V \cdot \dim W$.

(b) *Unter dem Isomorphismus aus (a) entspricht die Matrixmultiplikation der Verkettung von Morphismen, d. h. ist $f: V \to W$ linear, so gilt für alle linearen Abbildungen $g: W \to Z$ in einen weiteren Vektorraum $Z$ mit gegebener Basis $D$*

$$A_{g\circ f}^{B,D} = A_g^{C,D} \cdot A_f^{B,C}.$$

*Beweis.*

(a) Wie im Beweis von Folgerung 16.24 (a) rechnet man auch hier wieder leicht nach, dass die Abbildung $K^{m\times n} \to \mathrm{Abb}(V,W),\ A \mapsto f_A^{B,C}$ linear ist. Da sie nach Satz 16.26 injektiv mit Bild $\mathrm{Hom}(V,W)$ ist, folgt die Behauptung.

(b) Nach Definition 16.26 der Abbildungsmatrizen von $f$ und $g$ gilt

$$\Phi_C(f(x)) = A_f^{B,C} \cdot \Phi_B(x) \quad \text{für alle } x \in V$$
$$\text{sowie} \quad \Phi_D(g(y)) = A_g^{C,D} \cdot \Phi_C(y) \quad \text{für alle } y \in W.$$

Setzen wir dies mit $y = f(x)$ ineinander ein, so erhalten wir für alle $x \in V$

$$\Phi_D(g(f(x))) = A_g^{C,D} \cdot A_f^{B,C} \cdot \Phi_B(x).$$

Dies bedeutet genau, dass $A_g^{C,D} \cdot A_f^{B,C}$ die Abbildungsmatrix von $g \circ f$ bezüglich der Startbasis $B$ und der Zielbasis $D$ ist. $\square$

**Beispiel 16.28.** Es seien $V = \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit der Basis $B = (1, x, x^2)$ und $W = \mathrm{Pol}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit der Basis $C = (1, x)$ (siehe Beispiel 14.5 (d)). Wir betrachten wie in Beispiel 16.3 (e) die lineare Abbildung $f: V \to W,\ \varphi \mapsto \varphi'$, die einem Polynom seine Ableitung zuordnet.

(a) Um die Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ zu bestimmen, müssen wir nach Definition 16.26 die Basisvektoren von $B$ abbilden und das Ergebnis als Linearkombinationen der Basisvektoren von $C$ schreiben: Es ist

$$\begin{aligned} f(1) = 1' &= 0 &&= 0 \cdot 1 + 0 \cdot x, \\ f(x) = x' &= 1 &&= 1 \cdot 1 + 0 \cdot x, \\ f(x^2) = (x^2)' &= 2x &&= 0 \cdot 1 + 2 \cdot x. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten dieser Linearkombinationen bilden wie üblich die zugehörigen Koordinatenvektoren; wir schreiben sie in die Spalten der gesuchten Abbildungsmatrix und erhalten so

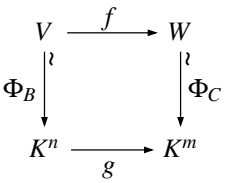
$$\Phi_C(f(1)) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \Phi_C(f(x)) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \Phi_C(f(x^2)) = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad A_f^{B,C} = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

(b) Auch die umgekehrte Richtung, aus der Abbildungsmatrix die Abbildung zu rekonstruieren, ist nicht weiter schwierig, wenn man sich daran erinnert, dass die Matrix immer nur Koordinatenvektoren sieht. Angenommen, wir wollen $f(\varphi)$ für $\varphi = 2x^2+3x+4$, also letztlich die Ableitung $\varphi'$, nur aus der Kenntnis der Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ bestimmen. Dann brauchen wir zunächst den Koordinatenvektor $\Phi_B(\varphi)$ und können diesen dann an die Abbildungsmatrix multiplizieren: Wegen $\varphi = 4\cdot 1 + 3\cdot x + 2\cdot x^2$ ist

$$\Phi_B(\varphi) = \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}, \quad \text{und damit} \quad A_f^{B,C}\cdot\Phi_B(\varphi) = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}.$$

Nach Satz 16.26 ist dies nun der Koordinatenvektor $\Phi_C(f(\varphi))$ des Bildes $f(\varphi)$. Damit ist $f(\varphi) = 3\cdot 1 + 4\cdot x = 4x+3$ (was in der Tat die Ableitung von $\varphi$ ist).

**Bemerkung 16.29** (Bild, Rang und Kern von Abbildungsmatrizen)**.** In Verallgemeinerung von Bemerkung 16.8 lassen sich Bild, Rang und Kern einer linearen Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen wie erwartet auf die zugehörigen Abbildungsmatrizen zurückführen und so mit den Methoden aus Abschnitt 15.C auch leicht berechnen. Dazu betrachten wir noch einmal das Diagramm rechts aus Konstruktion 16.25, in dem die Abbildung $g$ gegeben ist durch $x \mapsto A_f^{B,C}\cdot x$. Damit ist




$$\operatorname{Im} f = f(V) = \Phi_C^{-1}(g(\Phi_B(V))) = \Phi_C^{-1}(g(K^n)) = \Phi_C^{-1}(\operatorname{Im} g) = \Phi_C^{-1}(\operatorname{Im} A_f^{B,C})$$

$$\text{und}\quad \operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0\}) = \Phi_B^{-1}(g^{-1}(\Phi_C(\{0\}))) = \Phi_B^{-1}(g^{-1}(\{0\})) = \Phi_B^{-1}(\operatorname{Ker} g) = \Phi_B^{-1}(\operatorname{Ker} A_f^{B,C}).$$

Da Isomorphismen nach Lemma 16.17 (c) die Dimension erhalten, folgt damit auch $\operatorname{rk} f = \operatorname{rk} A_f^{B,C}$.

Für die konkrete Abbildung $f$ und die Basen $B$ und $C$ aus Beispiel 16.28 ist z. B. mit der dort berechneten Abbildungsmatrix

$$\operatorname{Im} A_f^{B,C} = \mathbb{R}^2 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{Im} f = \Phi_C^{-1}(\mathbb{R}^2) = \operatorname{Pol}_1(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

insbesondere ist also $\operatorname{rk} f = 2$ und $f$ ist surjektiv. Für den Kern der betrachteten Ableitungsabbildung gilt

$$\operatorname{Ker} A_f^{B,C} = \operatorname{Lin}(e_1) \quad\Rightarrow\quad \operatorname{Ker} f = \Phi_B^{-1}(\operatorname{Lin}(e_1)) = \operatorname{Lin}(1),$$

hier erhalten wir also erwartungsgemäß den Unterraum aller konstanten Polynome.

Mit diesen Ergebnissen können wir nun alle unsere Ergebnisse zu Matrizen auf Morphismen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen übertragen. Hier sind ein paar sehr wichtige Beispiele dafür:

**Folgerung 16.30.** *Für jede lineare Abbildung $f\colon V \to W$ zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen $V$ und $W$ gilt:*

(a) $\operatorname{rk} f \le \dim V$ *und* $\operatorname{rk} f \le \dim W$.

(b) *Für jede weitere lineare Abbildung $g\colon W \to Z$ in einen endlich-dimensionalen Vektorraum $Z$ gilt* $\operatorname{rk}(g\circ f) \le \operatorname{rk} f$ *und* $\operatorname{rk}(g\circ f) \le \operatorname{rk} g$.

(c) ***(Dimensionsformel für Morphismen)*** $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim V$.

(d) *Ist $V = W$, so ist $f$ genau dann surjektiv, wenn $f$ injektiv ist.*

*Beweis.* Wir wählen beliebige Basen der Vektorräume $V$, $W$ und $Z$ und betrachten die Abbildungsmatrizen $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times p}$ bezüglich dieser Basen (mit $n = \dim V$, $m = \dim W$ und $p = \dim Z$). Nach Bemerkung 16.29 ergeben sich die Teile (a), (b) und (c) der Folgerung dann unmittelbar aus den entsprechenden Resultaten für die Matrizen $A$ und $B$ aus Bemerkung 15.12 (b), Lemma 15.14 bzw. Satz 15.33 (a). So gilt z. B. für Teil (c)

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f \overset{16.29}{=} \dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Ker} A \overset{15.33\,(a)}{=} n = \dim V.$$

Teil (d) folgt nun unmittelbar aus dieser Dimensionsformel (c), denn die Surjektivität von $f$ ist äquivalent zu $\dim \operatorname{Im} f = \dim W$ (also $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$), und die Injektivität von $f$ nach Lemma 16.9 zu $\dim \operatorname{Ker} f = 0$. □

**Bemerkung 16.31.** Folgerung 16.30 (d) sieht zwar vielleicht so aus, als ob die Dimension von $V$ hierbei keine Rolle spielt, ist aber für einen unendlich-dimensionalen Raum $V$ falsch: Betrachten wir z. B. mit dem Vektorraum $V = \operatorname{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ aller reellen Zahlenfolgen die „Verschiebemorphismen“

$$f\colon V \to V,\ (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_0, x_1, x_2, \dots)$$
$$\text{und} \quad g\colon V \to V,\ (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_1, x_2, x_3, \dots),$$

so ist $f$ injektiv aber nicht surjektiv, und $g$ surjektiv aber nicht injektiv.

Als weitere einfache Konsequenz aus Folgerung 16.27 erhalten wir außerdem, dass sich lineare Abbildungen stets auf einer Basis des Startraums beliebig vorgeben lassen und dann eindeutig bestimmt sind (siehe auch Aufgabe 16.5):

**Folgerung 16.32.** *Es seien $V$ und $W$ endlich-dimensionale Vektorräume, $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von $V$ und $(y_1, \dots, y_n)$ eine beliebige Familie (mit gleich vielen Elementen) in $W$.*

*Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ mit $f(x_i) = y_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.*

*Beweis.* Wähle eine Basis $C$ von $W$ und betrachte die Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ der gesuchten Morphismen, die nach Satz 16.26 die Form $A_f^{B,C} = (\Phi_C(f(x_1)) \mid \cdots \mid \Phi_C(f(x_n)))$ hat. Die Bedingungen $f(x_i) = y_i$ für alle $i$ sind offensichtlich äquivalent dazu, dass diese Abbildungsmatrix gleich $A_f^{B,C} = (\Phi_C(y_1) \mid \cdots \mid \Phi_C(y_n))$ ist, und liefern damit genau einen solchen Morphismus. □

**Aufgabe 16.33.** Es sei $V = \operatorname{Pol}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit Basis $B = (1, x, x^2)$. Wir betrachten die Abbildung $f\colon V \to V$ mit $f(\varphi)(x) = \varphi'(x+1) + x\varphi(1)$, wobei $\varphi'$ die Ableitung von $\varphi$ bezeichnet.

(a) Zeige, dass $f$ eine lineare Abbildung ist.

(b) Berechne die Abbildungsmatrix $A_f^{B,B}$.

(c) Berechne $\operatorname{Ker} f$.

**Aufgabe 16.34.** Es seien

$$U = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \quad \text{und} \quad f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto Ax \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass $f(U) \subset U$ gilt, bestimme eine Basis $B$ von $U$, und berechne die Abbildungsmatrix der eingeschränkten Abbildung $f|_U\colon U \to U$ bezüglich der Basis $B$ im Start- und Zielraum.

**Aufgabe 16.35.** Bestimme die Dimension von $\operatorname{Ker}(g \circ f)$, wenn $f\colon K^8 \to K^5$ eine surjektive und $g\colon K^5 \to K^7$ eine injektive lineare Abbildung ist.

**Aufgabe 16.36.** Es seien $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f \circ f = f$. Man zeige:

(a) $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

(b) Es gibt eine Basis $B$ von $V$, so dass die Abbildungsmatrix von $f$ mit *gleicher* Start- und Zielbasis $B$ die Form

$$A_f^{B,B} = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

mit $r = \operatorname{rk} f$ hat.

**Aufgabe 16.37.** Es sei $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix vom Rang $r := \operatorname{rk} A$. Zeige, dass $A$ dann als Matrixprodukt $A = BC$ mit $B \in K^{m\times r}$ und $C \in K^{r\times n}$ geschrieben werden kann.

(Hinweis: Betrachte zugehörige lineare Abbildungen und verwende Folgerung 16.27 (b).)

Nach Konstruktion hängen unsere gerade eingeführten Abbildungsmatrizen $A_f^{B,C}$ natürlich von der (letztlich willkürlichen) Wahl der Basen $B$ und $C$ im Start- bzw. Zielraum der Abbildung $f$ ab. Wir wollen daher nun untersuchen, wie sich diese Abbildungsmatrizen ändern, wenn man zu anderen Basen übergeht. Dazu benötigen wir die sogenannten Basiswechselmatrizen, die einfach nur ein Spezialfall von Abbildungsmatrizen sind.

**Definition 16.38** (Basiswechselmatrizen)**.** Es seien $B = (x_1, \ldots, x_n)$ und $C = (y_1, \ldots, y_n)$ zwei Basen eines endlich-dimensionalen $K$-Vektorraums $V$. Dann heißt die Abbildungsmatrix der Identität $\mathrm{id}_V$ bezüglich der Startbasis $B$ und Zielbasis $C$, nach Definition 16.26 also

$$A^{B,C} := A_{\mathrm{id}}^{B,C} = (\Phi_C(x_1) \,|\, \cdots \,|\, \Phi_C(x_n)) \quad \in K^{n\times n},$$

die **Basiswechselmatrix** von $B$ nach $C$.

**Beispiel 16.39.** Im Vektorraum $\mathrm{Pol}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ betrachten wir die beiden Basen

$$B = (1, x) \quad \text{und} \quad C = (x+2, -1).$$

Analog zu Beispiel 16.28 (a) schreiben wir die beiden Basisvektoren von $B$ als Linearkombinationen der Basisvektoren von $C$:

$$1 = 0\cdot(x+2) + (-1)\cdot(-1) \quad \text{und} \quad x = 1\cdot(x+2) + 2\cdot(-1).$$

Damit ist

$$\Phi_C(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \Phi_C(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{B,C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung 16.40.** Es sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis $B$.

(a) Offensichtlich ist stets $A^{B,B} = E$.

(b) Ist $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus zwischen $V$ und einem weiteren Vektorraum $W$ mit Basis $C$, so gilt nach Folgerung 16.27 (b)

$$A_{f^{-1}}^{C,B} \cdot A_f^{B,C} = A_{f^{-1}\circ f}^{B,B} = A^{B,B} \overset{\text{(a)}}{=} E.$$

Die Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ zu einem Isomorphismus $f$ ist also invertierbar mit inverser Matrix $A_{f^{-1}}^{C,B}$. Insbesondere erhalten wir daraus für $V = W$ und $f = \mathrm{id}_V$, dass Basiswechselmatrizen immer invertierbar sind mit $(A^{B,C})^{-1} = A^{C,B}$.

Umgekehrt sind invertierbare Matrizen in folgendem Sinne auch immer Basiswechselmatrizen:

**Lemma 16.41.** *Es sei $B$ eine Basis eines endlich erzeugten Vektorraums $V$. Ferner sei $T \in \mathrm{GL}(n,K)$ eine invertierbare Matrix mit $n = \dim V$. Dann gilt:*

(a) *Es gibt eine Basis $C$ von $V$ mit $A^{C,B} = T$.*

(b) *Es gibt eine Basis $C$ von $V$ mit $A^{B,C} = T$.*

*Beweis.*

(a) Wir setzen $y_i = \Phi_B^{-1}(Te_i)$ für $i = 1,\dots,n$. Da $T$ invertierbar und $\Phi_B^{-1}$ ein Isomorphismus ist, ist auch $K^n \to V$, $x \mapsto \Phi_B^{-1}(Tx)$ ein Isomorphismus, und bildet nach Lemma 16.17 (c) damit die Standardbasis $(e_1,\dots,e_n)$ auf eine Basis $C := (y_1,\dots,y_n)$ von $V$ ab.

Für $i = 1,\dots,n$ ist die $i$-te Spalte der Basiswechselmatrix $A^{C,B}$ nun nach Definition 16.38

$$\Phi_B(y_i) = \Phi_B(\Phi_B^{-1}(Te_i)) = Te_i,$$

also die $i$-te Spalte von $T$. Damit ist wie gewünscht $A^{C,B} = T$.

(b) Nach (a) gibt es eine Basis $C$ von $V$ mit $A^{C,B} = T^{-1}$, nach Bemerkung 16.40 (b) also mit $A^{B,C} = T$. □

37

Mit diesen Basiswechselmatrizen können wir nun konkret angeben, wie sich Abbildungsmatrizen unter einem Basiswechsel transformieren.

**Satz 16.42** (Verhalten von Abbildungsmatrizen unter Basiswechsel)**.** *Es sei $f\colon V \to W$ ein Morphismus zwischen endlich erzeugten Vektorräumen mit $n := \dim V$ und $m := \dim W$ sowie gegebenen Basen $B$ und $C$ von $V$ bzw. $W$.*

(a) *Sind $B'$ und $C'$ zwei weitere Basen von $V$ bzw. $W$, so gilt*

$$A_f^{B',C'} = A^{C,C'} \cdot A_f^{B,C} \cdot A^{B',B}.$$

(b) *Sind umgekehrt $S \in \mathrm{GL}(m,K)$ und $T \in \mathrm{GL}(n,K)$ zwei invertierbare Matrizen, so gibt es Basen $B'$ und $C'$ von $V$ bzw. $W$, so dass $A^{C,C'} = S$ und $A^{B',B} = T$ gilt, und damit*

$$A_f^{B',C'} = S \cdot A_f^{B,C} \cdot T.$$

*Beweis.*

(a) Dies folgt sofort durch doppelte Anwendung von Folgerung 16.27 (b) auf den Morphismus

$$f = \mathrm{id}_W \circ f \circ \mathrm{id}_V : V \to V \to W \to W$$

mit den Basen $B'$, $B$, $C$, $C'$ in den vier Räumen dieser Abbildungskette.

(b) Nach Lemma 16.41 existieren Basen $B'$ und $C'$ mit $A^{C,C'} = S$ und $A^{B',B} = T$; die behauptete Formel für die Abbildungsmatrix ergibt sich dann aus (a). □

**Beispiel 16.43.** Es sei $f\colon \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\varphi \mapsto \varphi'$ die Ableitungsabbildung wie in Beispiel 16.28. Dort hatten wir die Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ für die Basen $B = (1,x,x^2)$ und $C = (1,x)$ im Start- bzw. Zielraum berechnet. Wollen wir nun stattdessen die Abbildungsmatrix $A_f^{B,C'}$ für die Basis $C' = (x+2,-1)$ von $\mathrm{Pol}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bestimmen, so können wir entweder wieder das gleiche Verfahren wie in Beispiel 16.28 anwenden, oder die Formel aus Satz 16.42 (a) benutzen: Mit der in Beispiel 16.39 berechneten Basiswechselmatrix $A^{C,C'}$ ist

$$A_f^{B,C'} = A^{C,C'} \cdot A_f^{B,C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 16.42 beschreiben zwei Matrizen derselben Größe also genau dann die gleiche lineare Abbildung – nur bezüglich evtl. verschiedener Basen – wenn sie durch Multiplikation mit invertierbaren Matrizen von links und rechts auseinander hervorgehen. Es ist daher nützlich, die folgende Notation einzuführen.

**Definition 16.44** (Äquivalente Matrizen)**.** Zwei Matrizen $A, A' \in K^{m \times n}$ mit $m,n \in \mathbb{N}$ heißen **äquivalent** zueinander, wenn es invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{GL}(m,K)$ und $T \in \mathrm{GL}(n,K)$ gibt mit $A' = SAT$.

**Bemerkung 16.45.**

(a) Wie man leicht nachprüfen kann, ist die Äquivalenz von Matrizen in der Tat eine Äquivalenzrelation im Sinne von Definition 2.31.

(b) Nach Satz 16.42 sind zwei Matrizen genau dann äquivalent zueinander, wenn sie die gleiche lineare Abbildung, nur bezüglich evtl. anderer Basen im Start- und Zielraum beschreiben.

Wir werden in Bemerkung 17.30 noch sehen, dass diese Bedingung sehr leicht überprüft werden kann: Sie ist einfach äquivalent dazu, dass die beiden Matrizen denselben Rang haben. Eine Richtung dieser Aussage können wir aber jetzt schon zeigen.

**Folgerung 16.46** (Äquivalente Matrizen haben denselben Rang)**.** *Es seien $m,n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{m\times n}$. Für alle $S \in \mathrm{GL}(m,K)$ und $T \in \mathrm{GL}(n,K)$ gilt dann* $\mathrm{rk}(SAT) = \mathrm{rk}A$.

*Beweis.* Es sei $f = f_A \colon K^n \to K^m$. Für die Standardbasen $B$ und $C$ von $K^n$ bzw. $K^m$ ist dann also $A_f^{B,C} = A$. Nach Satz 16.42 (b) gibt es nun Basen $B'$ und $C'$ von $K^n$ bzw. $K^m$ mit $A_f^{B',C'} = SAT$. Mit Bemerkung 16.29 erhalten wir also wie behauptet $\mathrm{rk}(SAT) = \mathrm{rk}A_f^{B',C'} = \mathrm{rk}\, f = \mathrm{rk}A$. □

**Aufgabe 16.47.** Wir betrachten die Basen

$$B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad C = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ sowie die lineare Abbildung $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$A_f^{B,C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Abbildungsmatrix $A_f$ von $f$ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$.

**Aufgabe 16.48.** Zum Vektorraum $V = \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit der Basis $B = (1,x,x^2)$ betrachten wir die lineare Abbildung $f \colon V \to V$ mit $f(\varphi)(x) = \varphi(x+1)$ für alle $\varphi \in V$.

(a) Berechne die Abbildungsmatrix $A_f^{B,B}$.

(b) Zeige, dass $A_f^{B,B}$ invertierbar ist, und berechne die inverse Matrix $\left(A_f^{B,B}\right)^{-1}$.

(c) Zeige, dass es zu jeder Basis $C'$ von $V$ eine Basis $C$ von $V$ gibt mit $A_f^{C,C'} = E$.

(d) Zeige, dass es zu keiner Basis $C'$ von $V$ eine Basis $C$ von $V$ gibt mit $A_f^{C,C'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

**Aufgabe 16.49** (Berechnung von Basiswechselmatrizen)**.** Für ein $n \in \mathbb{N}$ seien $B = (x_1,\dots,x_n)$ und $C = (y_1,\dots,y_n)$ zwei Basen von $K^n$. Wir setzen $A := (y_1 \,|\, \cdots \,|\, y_n \,|\, x_1 \,|\, \cdots \,|\, x_n) \in K^{2\times 2n}$ und bringen die linke Hälfte dieser Matrix mit elementaren Zeilenumformungen in reduzierte Zeilenstufenform, führen dabei aber alle Umformungen mit der gesamten Matrix durch.

Zeige, dass dann in der rechten Hälfte der Matrix genau die Basiswechselmatrix $A^{B,C}$ steht.

# 17. Komplemente und Quotientenräume

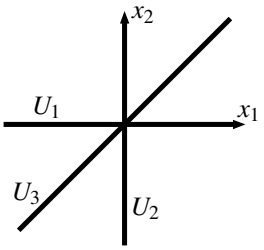
In diesem Kapitel wollen wir uns mit der folgenden Frage beschäftigen, die in der linearen Algebra oft auftritt: Gegeben sei ein Unterraum $U$ eines Vektorraums $V$. Können wir dann jeden Vektor $x \in V$ in einem gewissen Sinne eindeutig in einen „Anteil in $U$“ und einen „Restteil“ zerlegen?

Diese Frage ist so sicher erst einmal nicht mathematisch exakt formuliert, und in der Tat werden wir in den beiden Abschnitten dieses Kapitels zwei ganz verschiedene Arten sehen, wie man sie interpretieren kann. Das folgende Beispiel zeigt aber schon einmal in einem sehr einfachen Fall, was damit gemeint sein kann: Sind $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \text{Lin}(e_1)$ die horizontale Koordinatenachse, so können wir natürlich jeden Vektor $x \in V$ eindeutig als $x = x_1e_1 + x_2e_2$ mit seinen Koordinaten $x_1$ und $x_2$ bezüglich der Standardbasis schreiben. Wir haben $x$ damit also geschrieben als Summe von einem Anteil $x_1e_1$ in $U$ und einem Rest $x_2e_2$, der in $\text{Lin}(e_2)$ liegt. Diese recht naheliegende Idee, einen Vektor eindeutig in eine Summe zu zerlegen, bei der jeder Summand in einem gegebenen Unterraum liegt, wollen wir jetzt im ersten Abschnitt dieses Kapitels untersuchen.

## 17.A Direkte Summen und Komplemente

Wir betrachten noch einmal die Konstruktion der Summe $U_1 + \cdots + U_n$ von Unterräumen $U_1, \dots, U_n$ eines Vektorraums $V$ wie in Lemma 13.13:

**Bemerkung 17.1** (Eindeutigkeit der Summendarstellung)**.** Jeder Vektor in einer Summe $U_1 + \cdots + U_n$ von Unterräumen eines Vektorraums $V$ lässt sich nach Definition als $x_1 + \cdots + x_n$ mit $x_i \in U_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ schreiben. Allerdings ist diese Darstellung im Allgemeinen natürlich nicht eindeutig: Betrachten wir z. B. wie im Bild rechts die drei Ursprungsgeraden




$$U_1 = \text{Lin}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad U_2 = \text{Lin}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad U_3 = \text{Lin}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^2$, so hat der Vektor

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\in U_1} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\in U_2} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{\in U_3} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{\in U_1} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{\in U_2} + \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{\in U_3} \quad \in U_1 + U_2 + U_3 = \mathbb{R}^2$$

zwei verschiedene Darstellungen dieser Art. Ist die Darstellung jedoch immer eindeutig, so geben wir dieser Situation einen besonderen Namen:

**Definition 17.2** (Direkte Summe von Unterräumen)**.** Es seien $U_1, \dots, U_n$ Untervektorräume eines $K$-Vektorraums $V$ und $U = U_1 + \cdots + U_n$. Hat jedes $x \in U$ eine *eindeutige* Darstellung der Form $x = x_1 + \cdots + x_n$ mit $x_i \in U_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, so nennt man die Summe **direkt**. Möchte man dies auch in der Notation andeuten, so schreibt man dafür $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$.

Die Summe in Bemerkung 17.1 ist also nicht direkt – was natürlich einfach daran liegt, dass die drei aufspannenden Vektoren von $U_1$, $U_2$ und $U_3$ linear abhängig sind. In der Tat kann man sich direkte Summen als eine Verallgemeinerung des Konzepts der linearen Unabhängigkeit auf Unterräume vorstellen.

**Lemma 17.3** (Alternatives Kriterium für direkte Summen)**.** *Die Summe $U_1 + \cdots + U_n$ von Unterräumen $U_1, \dots, U_n$ eines $K$-Vektorraums $V$ ist genau dann direkt, wenn die Abbildung*

$$f\colon U_1 \times \cdots \times U_n \to U_1 + \cdots + U_n,\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \cdots + x_n$$

*ein Isomorphismus ist. Ist $V$ endlich-dimensional, so gilt in diesem Fall also die* ***Dimensionsformel für direkte Summen***

$$\dim U_1 + \cdots + \dim U_n = \dim(U_1 \oplus \cdots \oplus U_n).$$

*Beweis.* Es ist klar, dass die Abbildung $f$ in jedem Fall linear ist; außerdem ist $f$ nach Definition der Summe $U_1 + \cdots + U_n$ stets surjektiv. Injektiv ist $f$ genau dann, wenn für alle $x_i, y_i \in U_i$ aus $x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_n$ bereits $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$, also $x_i = y_i$ für alle $i$ folgt. Dies bedeutet nach Definition 17.2 aber genau, dass die Summe direkt ist.

Ist $V$ darüber hinaus endlich-dimensional, so gilt dies nach Lemma 14.23 (a) auch für die Unterräume $U_1, \ldots, U_n$. Da endlich erzeugte isomorphe Vektorräume nach Lemma 16.17 (c) die gleiche Dimension haben, ist also

$$\dim U_1 + \cdots + \dim U_n \overset{16.21}{=} \dim(U_1 \times \cdots \times U_n) = \dim(U_1 \oplus \cdots \oplus U_n). \qquad \square$$

Im Fall von nur zwei Unterräumen kann man besonders einfach feststellen, ob ihre Summe direkt ist:

**Lemma 17.4.** *Die Summe $U_1 + U_2$ von zwei Unterräumen $U_1$ und $U_2$ eines $K$-Vektorraums $V$ ist genau dann direkt, wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.*

*Beweis.* Nach Lemma 17.3 ist die Summe $U_1 + U_2$ genau dann direkt, wenn die Abbildung

$$f\colon U_1 \times U_2 \to U_1 + U_2,\ (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$$

ein Isomorphismus ist. Wir hatten im Beweis dieses Lemmas aber auch schon gesehen, dass $f$ stets linear und surjektiv ist. Also ist die Summe $U_1 + U_2$ genau dann direkt, wenn $f$ injektiv ist, d. h. nach Lemma 16.9 genau dann, wenn $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$ gilt. Nun ist aber

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f &= \{(x_1, x_2) : x_1 \in U_1, x_2 \in U_2, x_1 + x_2 = 0\} \\ &= \{(x_1, -x_1) : x_1 \in U_1, -x_1 \in U_2\} \\ &= \{(x_1, -x_1) : x_1 \in U_1 \cap U_2\},\end{aligned}$$

und damit ist wie behauptet genau dann $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$, wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. $\square$

**Beispiel 17.5.**

(a) Die Summe $U_1 + U_2$ der $x_1$-Achse und der $x_2$-Achse in $\mathbb{R}^3$ in Beispiel 13.14 ist direkt, denn in diesem Fall ist natürlich $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. In der Tat sieht man in diesem Beispiel auch sofort, dass sich jeder Vektor in der $x_1$-$x_2$-Ebene $U_1 + U_2$ wie in der Einleitung zu diesem Kapitel eindeutig als Summe von einem Vektor in $U_1$ und einem in $U_2$ schreiben lässt.

(b) Die Summe $U_1 + U_2 + U_3$ in Bemerkung 17.1 ist hingegen nicht direkt, wie wir dort bereits gesehen hatten. Allerdings ist in diesem Fall trotzdem $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{0\}$ – was zeigt, dass sich die Aussage von Lemma 17.4 nicht genauso auf mehr als zwei Summanden übertragen lässt. Zu Lemma 17.4 analoge Aussagen für allgemeine Summen sind stattdessen die folgenden.

**Aufgabe 17.6.** Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $U_1, \ldots, U_n$ Unterräume eines endlich-dimensionalen Vektorraums. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Die Summe $U_1 + \cdots + U_n$ ist direkt.

(b) Sind $x_i \in U_i$ für $i = 1, \ldots, n$ so dass $x_1 + \cdots + x_n = 0$ ist, so gilt bereits $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

(c) $U_i \cap (U_1 + \cdots + U_{i-1} + U_{i+1} + \cdots + U_n) = \{0\}$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

(d) $U_i \cap (U_{i+1} + \cdots + U_n) = \{0\}$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$.

**Aufgabe 17.7.** Es seien $U_1, \ldots, U_n$ Unterräume eines endlich erzeugten Vektorraums $V$. Zeige in Ergänzung zu Lemma 17.3, dass die Summe $U_1 + \cdots + U_n$ *genau dann* direkt ist, wenn

$$\dim(U_1 + \cdots + U_n) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_n,$$

und dass man in diesem Fall eine Basis von $U_1 + \cdots + U_n$ erhält, indem man Basen von $U_1, \ldots, U_n$ vereinigt.

Sind nun $U$ ein Unterraum eines Vektorraums $V$ und $U'$ ein weiterer Unterraum mit $U \oplus U' = V$, so haben wir genau die am Anfang dieses Kapitels beschriebene Situation, dass sich jeder Vektor $x \in V$ eindeutig als $x = y + z$ schreiben lässt, wobei $y$ in $U$ liegt und $z$ als „Restteil" des Vektors in $U'$ aufgefasst werden kann. Diese Situation hat einen besonderen Namen:

**Definition 17.8** (Komplemente)**.** Es sei $U$ ein Unterraum eines $K$-Vektorraums $V$. Ein Unterraum $U' \leq V$ heißt **Komplement** oder **komplementärer Unterraum** von $U$ in $V$, wenn $U \oplus U' = V$ (nach Lemma 17.4 also $U + U' = V$ und $U \cap U' = \{0\}$) gilt.

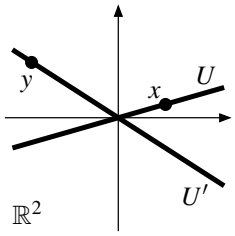
**Bemerkung 17.9** (Dimensionsformel für Komplemente)**.** Nach Lemma 17.3 gilt für jedes Komplement $U'$ eines Untervektorraums $U$ in einem endlich-dimensionalen Vektorraum $V$ die Dimensionsformel $\dim U + \dim U' = \dim V$, also

$$\dim U' = \dim V - \dim U.$$

**Beispiel 17.10** (Nichteindeutigkeit von Komplementen)**.** Wie im Bild unten rechts seien $U = \mathrm{Lin}(x)$ und $U' = \mathrm{Lin}(y)$ zwei verschiedene Ursprungsgeraden in $\mathbb{R}^2$. Da $x$ und $y$ dann keine Vielfachen voneinander sind, sind diese beiden Vektoren also linear unabhängig und bilden damit eine Basis des zweidimensionalen Vektorraums $\mathbb{R}^2$.

Es ist also $U + U' = \mathrm{Lin}(x,y) = \mathbb{R}^2$, außerdem gilt natürlich $U \cap U' = \{0\}$. Also ist $U'$ ein Komplement von $U$.

Da es zu einer gegebenen Ursprungsgeraden $U$ in $\mathbb{R}^2$ aber natürlich unendlich viele Geraden $U' \neq U$ gibt, folgt daraus insbesondere, dass Komplemente von Unterräumen in der Regel nicht eindeutig sind. Wir wollen nun aber sehen, dass Komplemente zumindest im endlich-dimensionalen Fall stets existieren:




**Satz 17.11** (Existenz von Komplementen)**.** *Jeder Unterraum $U$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums $V$ besitzt ein Komplement.*

*Beweis.* Nach Lemma 14.23 (a) ist $U$ endlich erzeugt, besitzt damit also nach Satz 14.11 eine Basis $(x_1,\dots,x_n)$. Wir ergänzen sie gemäß Folgerung 14.16 zu einer Basis $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ von $V$ und zeigen, dass $U' := \mathrm{Lin}(y_1,\dots,y_m)$ dann ein Komplement von $U$ ist:

- Es ist offensichtlich $U + U' = V$, denn nach Beispiel 13.14 ist
$$U + U' = \mathrm{Lin}(x_1,\dots,x_n) + \mathrm{Lin}(y_1,\dots,y_m) = \mathrm{Lin}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) = V.$$
- Nach der Dimensionsformel aus Satz 14.25 ist damit
$$\dim(U \cap U') = \dim U + \dim U' - \dim(\underbrace{U + U'}_{=V}) = n + m - (n+m) = 0,$$
also auch $U \cap U' = \{0\}$. □

**Bemerkung 17.12** (Berechnung von Komplementen)**.** Beachte, dass der Beweis von Satz 17.11 konstruktiv ist, d. h. auch die konkrete Berechnung eines Komplements ermöglicht: Möchte man ein Komplement $U'$ zu einem Unterraum $U$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums $V$ berechnen, muss man nur eine Basis von $U$ zu einer Basis von $V$ ergänzen; die dafür hinzugenommenen Vektoren bilden dann eine Basis eines Komplements $U'$.

So haben wir z. B. in Beispiel 16.22 (b) im Raum $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller Polynome vom Grad höchstens 3 die Basis $(1+2x^3, x+x^2+x^3)$ von $U := \mathrm{Lin}(1+2x^3, x+x^2+x^3)$ mit den Polynomen $x^2$ und $x^3$ zu einer Basis von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ergänzt; dementsprechend ist $U' := \mathrm{Lin}(x^2,x^3)$ also ein Komplement von $U$ in $V$.

**Aufgabe 17.13.** Es seien $U_1, U_2, U_3$ und $U$ Unterräume eines Vektorraums $V$ mit $U_1 \oplus U_2 = U$ und $U \oplus U_3 = V$.

Zeige, dass dann $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 = V$ gilt.

## 17.B Quotientenräume

Komplemente von Unterräumen sind in der Praxis sehr nützlich: Wir haben gerade gesehen, dass ein Komplement $U'$ eines Unterraums $U$ in einem Vektorraum $V$ die „Restteile“ von Vektoren in $V$ misst, wenn man ihren Anteil in $U$ heraus nimmt. Unschön ist an dieser Konstruktion allerdings, dass ein Komplement nach Beispiel 17.10 nicht eindeutig bestimmt und damit ein recht unnatürliches Objekt ist. Was im obigen Sinne der Restteil eines Vektors in $V$ nach Herausnehmen des Anteils in $U$ ist, lässt sich also nicht beantworten, solange man nicht eine (letztlich willkürliche) Wahl eines Komplements von $U$ in $V$ getroffen hat.

Wir wollen nun eine deutlich schönere Konstruktion einführen, die solche Restteile auch ohne willkürliche Wahlen messen kann. Der Preis dafür ist, dass der Vektorraum, der diese Restteile auf ganz natürliche Art beschreibt, kein *Unterraum* von $V$ mehr ist, sondern ein sogenannter *Quotientenraum*: ein Raum von Äquivalenzklassen von Vektoren in $V$ wie in Abschnitt 2.B, wobei wir zwei Vektoren in $V$ miteinander identifizieren wollen, wenn sie sich um ein Element von $U$ voneinander unterscheiden. Diejenigen von euch, die auch die Vorlesung „Algebraische Strukturen“ besuchen, kennen diese Idee vermutlich bereits von den Faktorgruppen [G, Kapitel 6].

**Lemma und Definition 17.14.** *Es seien $V$ ein $K$-Vektorraum und $U \leq V$ ein fest gewählter Unterraum. Dann ist durch*

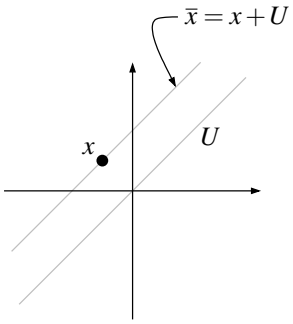
$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x - y \in U \qquad \text{für alle } x, y \in V$$

*eine Äquivalenzrelation auf $V$ definiert. Für die Äquivalenzklasse eines Vektors $x \in V$ bezüglich dieser Relation gilt*

$$\bar{x} = x + U := \{x + u : u \in U\},$$

*d. h. $\bar{x}$ ist (wie in Beispiel 13.12 (c) und im Bild rechts) ein verschobener Unterraum mit Aufpunkt $x$. Man nennt dies auch einen affinen Unterraum mit Aufpunkt $x$.*

*Die Menge $V/\sim$ aller Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation bezeichnet man mit $V/U$.*




*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation wie in Definition 2.31 ist.

Reflexivität: Für alle $x \in V$ gilt $x - x = 0 \in U$ nach Definition 13.8 (a), und damit $x \sim x$.

Symmetrie: Es seien $x, y \in V$ mit $x \sim y$, also $x - y \in U$. Dann ist nach Definition 13.8 (c) auch $(-1)(x - y) = y - x \in U$, und damit $y \sim x$.

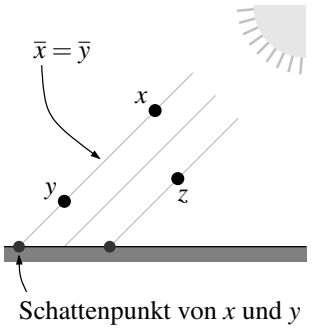
Transitivität: Sind $x, y, z \in V$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$, also $x - y \in U$ und $y - z \in U$, so ist nach Definition 13.8 (b) auch $(x - y) + (y - z) = x - z \in U$, und damit $x \sim z$.

Also ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Für die Klasse $\bar{x}$ eines Vektors $x$ gilt nun nach Definition 2.31

$$\bar{x} = \{y \in V : y - x \in U\} = \{y \in V : y - x = u \text{ für ein } u \in U\} = \{x + u : u \in U\}. \qquad \square$$

38

**Bemerkung 17.15** (Anschauliche Deutung von $V/U$)**.** Die geometrische Bedeutung des Raumes $V/U$ lässt sich am besten wie im Bild rechts erläutern, in dem $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \operatorname{Lin}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist. Dort scheint die Sonne mit parallelen (hell eingezeichneten) Strahlen in Richtung von $U$ und wirft dabei von jedem Punkt in $V$ einen Schatten auf den Boden. In diesem Bild ist die Klasse $\bar{x} \in V/U$ eines Punktes $x \in V$ gerade der Sonnenstrahl durch $x$. Zwei Punkte in $V$ bestimmen also genau dann den gleichen Punkt in $V/U$, wenn sie auf dem gleichen Sonnenstrahl liegen, d. h. denselben Schattenpunkt auf dem Boden werfen. Im Bild rechts ist also $\bar{x} = \bar{y} \neq \bar{z}$.



In diesem Sinne kann man sich $V/U$ damit als eine „Schattenwelt“ von $V$ vorstellen, die zwar jeden Punkt von $V$ sieht, aber nur mit einem Teil seiner Informationen: Der „Abstand zur Sonne“ eines Punktes in $V$ ist anhand des Schattenbildes nicht mehr zu rekonstruieren. Für einen Vektor $x \in V$ nimmt die Klasse $\overline{x}$ also wie beabsichtigt „den Anteil in $U$ heraus“.

**Bemerkung 17.16.** Für zwei Vektoren $x, y \in V$ gilt nach Satz 2.33 (a) genau dann $\overline{x} = \overline{y}$ in $V/U$, wenn $x \sim y$ ist. Wir sehen mit Definition 17.14 also für alle $x, y \in V$ in $V/U$:

$$\begin{array}{lll} & \overline{x} = \overline{y} & \Leftrightarrow \quad x - y \in U, \\ \text{insbesondere also} & \overline{x} = \overline{0} & \Leftrightarrow \quad x \in U. \end{array}$$

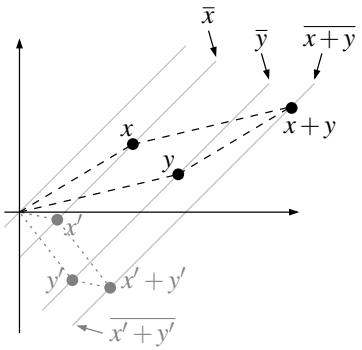
Mit diesen Rechenregeln kann man Gleichungen zwischen Äquivalenzklassen in $V/U$ immer auf Aussagen über die Repräsentanten in $V$ zurückführen. So ist in der Situation von Bemerkung 17.15 beispielsweise

$$\overline{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}}, \quad \text{weil} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \in U.$$

Allerdings fehlt uns noch ein letzter Schritt: Bisher ist der Raum $V/U$ nur eine Menge ohne weitere Struktur. Um ihn im Rahmen der linearen Algebra untersuchen zu können, müssen wir ihn selbst wieder zu einem Vektorraum machen, also auf ihm eine Vektoraddition und Skalarmultiplikation definieren und zeigen, dass damit dann die Vektorraumeigenschaften für $V/U$ gelten.

Die Idee hierfür ist sehr einfach und im Bild rechts dargestellt: Wollen wir die verschobenen Unterräume $\overline{x}$ und $\overline{y}$ in $V/U$ addieren, so addieren wir einfach wie im oberen Teil des Bildes die Aufpunkte $x$ und $y$ und verwenden den so erhaltenen Punkt $x+y$ als Aufpunkt für die Summe, d. h. wir setzen

$$\overline{x} + \overline{y} := \overline{x+y}. \qquad (*)$$




Allerdings müssen wir dabei etwas aufpassen: Wir hätten für dieselben verschobenen Unterräume statt $x$ und $y$ ja auch wie im unteren Teil des Bildes genauso gut andere Aufpunkte $x'$ bzw. $y'$ wählen können und hätten dann als Ergebnis den verschobenen Unterraum $\overline{x'+y'}$ erhalten!

Damit die Vorschrift $(*)$ wirklich widerspruchsfrei eine Verknüpfung auf $V/U$ definiert, müssen wir also überprüfen, dass der verschobene Unterraum $\overline{x'+y'}$ derselbe ist wie $\overline{x+y}$, d. h. dass *das Endergebnis nicht von der Wahl der Aufpunkte abhängt*. Man sagt dazu auch, dass wir die *Wohldefiniertheit* von $(*)$ überprüfen müssen. Eine solche Überprüfung ist immer dann nötig, wenn wir eine Funktion auf einer Menge von Äquivalenzklassen (hier: $V/U$) definieren wollen und bei der Konstruktion die Wahl eines Repräsentanten einer Äquivalenzklasse (hier: eines Aufpunkts eines verschobenen Unterraums) verwenden. Die allgemeine Situation ist die folgende:

**Notation 17.17** (Wohldefiniertheit)**.** Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge $M$. Möchte man auf der Menge $M/\sim$ der Äquivalenzklassen eine Abbildung in eine andere Menge $N$ definieren, so ist die Idee hierfür in der Regel, dass man eine Abbildung $g\colon M \to N$ wählt und dann

$$f\colon M/\sim \to N,\ f(\overline{x}) := g(x) \qquad (*)$$

setzt. Man möchte das Bild einer Äquivalenzklasse unter $f$ also dadurch definieren, dass man einen Repräsentanten dieser Klasse wählt und diesen dann mit $g$ abbildet. Damit dies nun $f$ widerspruchsfrei definiert, brauchen wir offensichtlich, dass das Ergebnis dieser Vorschrift nicht von der Wahl des Repräsentanten abhängt: Sind $x, y \in M$ äquivalent zueinander, sind sie also Repräsentanten derselben Äquivalenzklasse, so muss $g(x) = g(y)$ gelten. Mit anderen Worten benötigen wir

$$g(x) = g(y) \quad \text{für alle } x, y \in M \text{ mit } \overline{x} = \overline{y},$$

damit die Definition $(*)$ widerspruchsfrei ist. Statt „widerspruchsfrei“ sagt man in diesem Fall wie oben schon erwähnt in der Regel, dass $f$ durch die Vorschrift $(*)$ **wohldefiniert** ist. Die Wohldefiniertheit einer Funktion muss man also immer dann nachprüfen, wenn der Startraum der Funktion eine Menge von Äquivalenzklassen ist und die Funktionsvorschrift Repräsentanten dieser Klassen benutzt. Oder noch etwas allgemeiner: Wenn eine Funktionsvorschrift an irgendeiner Stelle eine Wahl beinhaltet, muss man sich vergewissern, dass der letztliche Funktionswert von dieser Wahl unabhängig ist.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir die Menge $V/U$ nun wie angekündigt zu einem Vektorraum machen:

**Satz und Definition 17.18** (Quotientenräume)**.** *Es sei $U$ ein Unterraum eines $K$-Vektorraums $V$. Dann sind die Verknüpfungen*

$$\overline{x}+\overline{y} := \overline{x+y} \qquad \text{und} \qquad \lambda\cdot\overline{x} := \overline{\lambda x} \qquad \text{für } x,y\in V \text{ und } \lambda\in K$$

*auf $V/U$ wohldefiniert und machen $V/U$ zu einem $K$-Vektorraum. Man nennt ihn den **Quotientenraum** bzw. **Faktorraum** von $V$ nach $U$.*

*Man spricht $V/U$ auch als „$V$ **modulo** $U$“ und nennt $\overline{x}\in V/U$ für ein $x\in V$ die **Restklasse** von $x$ modulo $U$.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit der Addition: Sind $x,x',y,y'\in V$ mit $\overline{x}=\overline{x'}$ und $\overline{y}=\overline{y'}$, so bedeutet dies nach Bemerkung 17.16 genau $x-x'\in U$ und $y-y'\in U$. Nach Definition 13.8 (a) ist dann aber auch $(x+y)-(x'+y')=(x-x')+(y-y')\in U$ – was wiederum nach Bemerkung 17.16 genau $\overline{x+y}=\overline{x'+y'}$ bedeutet. Also ist die Addition auf $V/U$ wohldefiniert.

Genauso zeigt man die Wohldefiniertheit der Skalarmultiplikation: Sind $\lambda\in K$ und $x,x'\in V$ mit $\overline{x}=\overline{x'}$, also $x-x'\in U$, so ist nach Definition 13.8 (a) auch $\lambda x-\lambda x'=\lambda(x-x')\in U$ und damit $\overline{\lambda x}=\overline{\lambda x'}$.

Die Vektorraumaxiome für $V/U$ ergeben sich nun unmittelbar aus denen von $V$. So erhält man z. B. die Assoziativität der Vektoraddition durch die einfache Rechnung

$$\big(\overline{x}+\overline{y}\big)+\overline{z}=\overline{x+y}+\overline{z}=\overline{(x+y)+z}=\overline{x+(y+z)}=\overline{x}+\overline{y+z}=\overline{x}+\big(\overline{y}+\overline{z}\big)$$

für alle $x,y,z\in V$, wobei die mittlere Gleichheit die Assoziativität in $V$ ist und sich die anderen Gleichungen aus der Definition der Addition in $V/U$ ergeben. Die übrigen Eigenschaften überprüft man genauso; der Nullvektor in $V/U$ ist die Klasse $\overline{0}$ des Nullvektors in $V$ bzw. der unverschobene Unterraum $U$, das additive Inverse eines Elements $\overline{x}\in V/U$ ist $\overline{-x}$. □

Aufgrund der anschaulichen Deutung von Komplementen und Quotientenräumen sollte es nicht verwundern, dass wir nun zeigen können, dass diese beiden Konzepte letztlich das gleiche beschreiben, also als Vektorräume isomorph zueinander sind. Wie oben schon erwähnt ist der Vorteil des Komplements lediglich, dass es als Unterraum des ursprünglichen Vektorraums anschaulich leichter zu verstehen ist; der Vorteil des Quotientenraums ist dagegen, dass er ohne willkürliche Wahlen konstruiert werden kann und damit aus mathematischer Sicht das natürlichere Objekt ist.

**Satz 17.19** (Quotientenräume und Komplemente)**.** *Es seien $U$ ein Untervektorraum eines $K$-Vektorraums $V$ und $U'$ ein Komplement von $U$. Dann ist die Abbildung*

$$f\colon U'\to V/U,\ x\mapsto\overline{x}$$

*ein Isomorphismus.*

*Ist $V$ endlich-dimensional, so gilt also insbesondere die **Dimensionsformel für Quotientenräume***

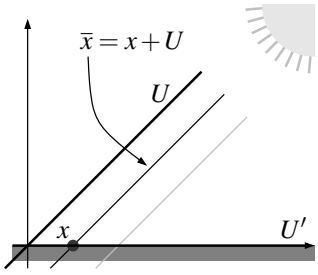
$$\dim V/U=\dim V-\dim U.$$

*Beweis.* Um zu zeigen, dass $f$ ein Isomorphismus ist, müssen wir die folgenden Dinge überprüfen:

- $f$ ist eine lineare Abbildung, denn für alle $x, y \in U'$ ist
$$f(x+y) = \overline{x+y} = \bar{x}+\bar{y} = f(x)+f(y),$$
und eine analoge Aussage gilt natürlich für die Skalarmultiplikation.
- $f$ ist surjektiv: Es sei $\bar{x} \in V/U$ beliebig, also $x \in V$. Wegen $V = U+U'$ können wir $x = x_1+x_2$ mit $x_1 \in U$ und $x_2 \in U'$ schreiben. Dann liegt $x_2$ in der Definitionsmenge $U'$ von $f$, und es gilt $f(x_2) = \overline{x_2} = \bar{x}$ nach Bemerkung 17.16, da $x - x_2 = x_1 \in U$. Also ist $f$ surjektiv.
- $f$ ist injektiv: Es sei $x \in U'$ mit $f(x) = \bar{x} = \bar{0}$, also $x \in U$ nach Bemerkung 17.16. Dann ist aber $x \in U \cap U' = \{0\}$. Damit ist $f$ nach Lemma 16.9 injektiv.

Die Zusatzaussage folgt nun sofort daraus, dass das Komplement $U'$ nach Bemerkung 17.9 die Dimension $\dim V - \dim U$ hat. □

**Bemerkung 17.20.** Das Bild rechts illustriert in der Situation von Bemerkung 17.15 noch einmal, dass der Morphismus $f$ aus Satz 17.19 bijektiv ist: Die Bodenlinie $U'$ ist nach Beispiel 17.10 ein Komplement der Richtung $U$ der Sonnenstrahlen. Die Abbildung $f$ ordnet nun jedem Punkt $x \in U'$ auf dem Boden den Sonnenstrahl $\bar{x} \in V/U$ durch diesen Punkt zu, und liefert offensichtlich eine Bijektion zwischen den Bodenpunkten und der Menge der Sonnenstrahlen. Wenn wir in Bemerkung 17.15 gesagt haben, dass $V/U$ die „Schattenwelt" auf dem Boden ist, haben wir dabei also schon den Isomorphismus zwischen dem eigentlichen Quotientenraum $V/U$ und dem Boden $U'$ verwendet.




**Bemerkung 17.21** (Basen von Quotientenräumen)**.** Nach Satz 17.19 (und Lemma 16.17 (c)) erhalten wir im endlich-dimensionalen Fall eine Basis des Quotientenraums $V/U$, indem wir eine Basis eines Komplements von $U$ wählen und die Restklassen dieser Vektoren in $V/U$ nehmen. Kombinieren wir dies mit dem Verfahren aus Bemerkung 17.12, so bedeutet dies: Wir können eine Basis von $V/U$ konstruieren, indem wir eine Basis von $U$ zu einer Basis von $V$ ergänzen und dann die Restklassen der hinzugenommenen Vektoren wählen.

Im Beispiel $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \mathrm{Lin}(v)$ mit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus Bemerkung 17.15 ergänzt z. B. $e_1$ den Vektor $v$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^2$, und damit ist $(\overline{e_1})$ eine Basis von $V/U$.

Damit müssen wir z. B. den Vektor $\overline{e_2} \in V/U$ als Linearkombination dieser Basis, also als Vielfaches von $\overline{e_1}$ schreiben können. Dies ist hier auch einfach zu sehen: Wegen $e_1 + e_2 = v \in U$ ist $\overline{e_1+e_2} = \bar{0}$ in $V/U$, also $\overline{e_2} = -\overline{e_1}$. Im Bild von Bemerkung 17.20 bedeutet dies einfach, dass die Vektoren $e_2$ und $-e_1$ auf dem gleichen Sonnenstrahl liegen.

**Aufgabe 17.22.** Es sei $U = \{x \in \mathbb{R}^3 : -2x_1 + x_2 + x_3 = x_1 - 2x_3 = 0\} \leq \mathbb{R}^3$.

Sind die Vektoren $\overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ und $\overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^3/U$?

**Aufgabe 17.23.**

(a) Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/U$, $x \mapsto \bar{x}$ mit $U = \mathrm{Lin}(e_1 - 2e_2 + e_3)$.

Bestimme eine Basis $B$ von $\mathbb{R}^3/U$ sowie die zugehörige Abbildungsmatrix $A_f^{E,B}$ für die Standardbasis $E$ von $\mathbb{R}^3$.

(b) Es sei $U$ ein Unterraum eines endlich-dimensionalen $K$-Vektorraums $V$.

Man zeige: Ist $(x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von $U$, und sind $y_1, \dots, y_m \in V$ so dass $(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})$ eine Basis von $V/U$ ist, dann ist $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ eine Basis von $V$.

**Aufgabe 17.24.**

(a) Zeige, dass $f\colon \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R},\mathbb{R})/\mathrm{Pol}_1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\overline{\varphi} \mapsto \varphi''(1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ wohldefiniert ist, und bestimme die Dimension von $\operatorname{Ker} f$.

(b) Es seien $U$ ein Unterraum eines $K$-Vektorraums $V$ und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass

$$g\colon V/U \to V/U,\ \overline{x} \mapsto \overline{f(x)}$$

genau dann eine wohldefinierte lineare Abbildung ist, wenn $f(U) \subset U$ gilt.

Mit Hilfe von Quotientenräumen wollen wir jetzt sehen, wie man aus jeder linearen Abbildung $f\colon V \to W$ „einen Isomorphismus machen kann“. Die Idee hierfür ist sehr einfach: Natürlich kann man $f$ zunächst einmal surjektiv machen, indem man den Zielraum $W$ durch den Bildraum $\operatorname{Im} f$ ersetzt. Um $f$ auch noch injektiv zu machen, also gemäß Lemma 16.9 den Kern zu $\{0\}$ zu machen, können wir einfach den Startraum $V$ durch den Quotientenraum $V/\operatorname{Ker} f$ ersetzen: Auf diese Art werden alle Elemente des Kerns von $f$ miteinander identifiziert, so dass der Kern der neuen Abbildung auf dem Quotientenraum nur noch aus dem einen Element $\overline{0} = \operatorname{Ker} f$ besteht.

**Satz 17.25 (Homomorphiesatz).** *Für jede lineare Abbildung $f\colon V \to W$ ist die Abbildung*

$$g\colon V/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f,\ \overline{x} \mapsto f(x)$$

*(wohldefiniert und) ein Isomorphismus.*

*Beweis.* Wir müssen einige Dinge überprüfen:

- Die Abbildung $g$ ist wohldefiniert: Sind $x, y \in V$ mit $\overline{x} = \overline{y}$, also $x - y \in \operatorname{Ker} f$ nach Bemerkung 17.16, so ist $f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$ und damit $f(x) = f(y)$.
- Die Abbildung $g$ ist linear: Für $x, y \in V$ gilt

  $$g(\overline{x}+\overline{y}) = g(\overline{x+y}) = f(x+y) = f(x) + f(y) = g(\overline{x}) + g(\overline{y});$$

  analog folgt auch die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation.
- Die Abbildung $g$ ist surjektiv: Dies ist klar nach Definition von $\operatorname{Im} f$, denn jedes Element in $\operatorname{Im} f$ ist ja von der Form $f(x) = g(\overline{x})$ für ein $x \in V$.
- Die Abbildung $g$ ist injektiv: Nach Lemma 16.9 genügt es dafür zu zeigen, dass $\operatorname{Ker} g = \{\overline{0}\}$. Es sei also $x \in V$ mit $g(\overline{x}) = 0$. Dann ist $f(x) = 0$, also $x \in \operatorname{Ker} f$ und damit $\overline{x} = \overline{0} \in V/\operatorname{Ker} f$ nach Bemerkung 17.16. □

**Bemerkung 17.26** (Dimensionsformel aus dem Homomorphiesatz)**.** Insbesondere liefert der Homomorphiesatz für eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen einen alternativen Beweis der Dimensionsformel für Morphismen aus Folgerung 16.30 (c), der nicht den Umweg über Matrizen und die algorithmischen Methoden aus Abschnitt 15.C nimmt: Da Isomorphismen nach Lemma 16.17 (c) die Dimension erhalten, folgt aus dem Homomorphiesatz 17.25 mit der Dimensionsformel für Quotientenräume aus Satz 17.19 sofort

$$\dim V - \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f, \quad \text{also} \quad \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim V.$$

**Beispiel 17.27** (Anschauliche Deutung des Homomorphiesatzes)**.** Als anschauliches Beispiel für den Homomorphiesatz können wir noch einmal die „Schattenwelt“ aus Bemerkung 17.15 und Bemerkung 17.20 betrachten. Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die einen Punkt auf seinen Schattenpunkt auf den Boden abbildet, so ist $\operatorname{Ker} f = U$ der Sonnenstrahl durch 0 und $\operatorname{Im} f = U'$ der Boden. Satz 17.25 gibt uns dann den Isomorphismus $g\colon \mathbb{R}^2/U \to U'$, der jeden Sonnenstrahl auf seinen Bodenpunkt abbildet und genau die Umkehrung des Isomorphismus aus Satz 17.19 ist.

**Aufgabe 17.28.** Die lineare Abbildung, die der Situation in Beispiel 17.27 entspricht, ist

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Überprüfe den Homomorphiesatz in diesem Fall explizit, d. h. zeige durch eine direkte Rechnung, dass die Abbildung

$$g\colon \mathbb{R}^2/\operatorname{Lin}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \to \operatorname{Lin}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \overline{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}} \mapsto \begin{pmatrix}x_1-x_2\\0\end{pmatrix}$$

wohldefiniert, linear, surjektiv und injektiv ist.

Als Anwendung des Homomorphiesatzes wollen wir zum Abschluss dieses Kapitels noch einmal Abbildungsmatrizen wie in Satz 16.26 und Folgerung 16.27 betrachten. Dort hatten wir gesehen, dass jeder Morphismus $f\colon V \to W$ zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen nach Wahl von Basen $B$ und $C$ von $V$ bzw. $W$ eindeutig durch seine Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ beschrieben werden kann. Allerdings ist die Wahl solcher Basen natürlich oft willkürlich, und eine andere Wahl führt auch zu einer anderen Matrix – nämlich nach Satz 16.42 zu einer Matrix der Form $S \cdot A_f^{B,C} \cdot T$, wobei $S$ und $T$ die zugehörigen Basiswechselmatrizen sind.

Es ist daher eine naheliegende Frage, in wie weit wir zumindest durch eine geschickte Wahl der Basen $B$ und $C$ erreichen können, dass die Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ möglichst einfach wird – also z. B. viele Nullen enthält. Dabei ist nach Bemerkung 16.29 natürlich klar, dass $A_f^{B,C}$ zumindest denselben Rang wie $f$ haben muss. Ansonsten besagt der folgende Satz aber, dass wir immer die einfachste mögliche Matrix von diesem Rang erhalten können. Der Beweis ist dabei auch konstruktiv, gibt also ein Verfahren an, wie $B$ und $C$ gefunden werden können.

**Satz und Definition 17.29** (Normalform von Abbildungsmatrizen)**.** *Es sei $f\colon V \to W$ ein Morphismus vom Rang $r$ zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen mit $n = \dim V$ und $m = \dim W$. Dann gibt es Basen $B$ und $C$ von $V$ bzw. $W$, so dass die Abbildungsmatrix von $f$ bezüglich dieser Basen die Form*

$$A_f^{B,C} = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

*hat, d. h. so dass Einsen genau auf den ersten $r$ Diagonalpositionen stehen, und sonst überall Nullen. Man sagt, dass eine solche Abbildungsmatrix in **Normalform** ist. (Beachte dabei, dass unter der Einheitsmatrix $E_r$ genau $m-r$ Nullzeilen, rechts von der Einheitsmatrix hingegen $n-r$ Nullspalten stehen – die Matrix $A_f^{B,C}$ ist also nicht notwendig quadratisch.)*

*Beweis.* Nach der Dimensionsformel aus Folgerung 16.30 (c) ist $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \operatorname{rk} f = n - r$. Wir können also eine Basis $(x_{r+1}, \dots, x_n)$ von $\operatorname{Ker} f$ wählen und zu einer Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$ von $V$ ergänzen. Damit ist $(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_r})$ nach Bemerkung 17.21 eine Basis des Quotientenraums $V/\operatorname{Ker} f$.

Nach dem Homomorphiesatz 17.25 ist nun aber die Abbildung $V/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f$, $\overline{x} \mapsto f(x)$ ein Isomorphismus, und damit ist $(y_1, \dots, y_r)$ mit $y_i := f(x_i)$ für $i = 1, \dots, r$ nach Lemma 16.17 (c) eine Basis von $\operatorname{Im} f$. Wir ergänzen diese schließlich noch zu einer Basis $C = (y_1, \dots, y_m)$ von $W$. Wegen

$$f(x_i) = \begin{cases} y_i & \text{für } i \le r, \\ 0 & \text{für } i > r, \end{cases} \quad \text{also} \quad \Phi_C(f(x_i)) = \begin{cases} e_i & \text{für } i \le r, \\ 0 & \text{für } i > r, \end{cases}$$

hat die Matrix $A_f^{B,C}$ nach Definition 16.26 dann die gewünschte Form $(e_1 | \cdots | e_r | 0 | \cdots | 0)$. □

**Bemerkung 17.30** (Normalform von Matrizen bezüglich Äquivalenz)**.** Nach Bemerkung 16.45 (b) können wir Satz 17.29 auch so formulieren: Ist $A \in K^{m \times n}$ eine beliebige Matrix vom Rang $r$, so ist $A$ äquivalent zur Matrix

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \qquad (*)$$

d. h. es gibt invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{GL}(m,K)$ und $T \in \mathrm{GL}(n,K)$, so dass $SAT$ diese eine spezielle Form hat. Insbesondere sind also alle Matrizen vom gleichen Rang zueinander äquivalent. Zusammen mit Folgerung 16.46 bedeutet dies, dass zwei Matrizen (derselben Größe) genau dann zueinander äquivalent sind, wenn sie denselben Rang haben.

Analog zu Satz 17.29 nennt man $(*)$ auch die **Normalform** von $A$ (bezüglich der Äquivalenz von Matrizen); sie ist die „einfachste“ Matrix in der Äquivalenzklasse von $A$. Normalformen bezüglich anderer Matrixtransformationen werden wir z. B. in Kapitel 20 und Satz 22.35 noch kennenlernen.

**Bemerkung 17.31** (Alternativer Beweis von $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}(A^\mathsf{T})$ mit Normalformen)**.** Als Beispiel für die Nützlichkeit von Normalformen wollen wir damit nun einen alternativen Beweis der Gleichung $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}(A^\mathsf{T})$ für jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ geben.

Bisher hatten wir diese sehr wichtige Aussage in Satz 15.38 durch den Vergleich von zwei verschiedenen Verfahren zur Berechnung von $\mathrm{Im}A$ gezeigt. Auch wenn dies natürlich ein vollständiger Beweis war, gibt er dennoch durch seine algorithmische Struktur wenig Erkenntnisse darüber, welche Idee dahinter steckt – das Ergebnis ist einfach am Ende aus einer nicht besonders gut überschaubaren Rechnung so herausgekommen.

Im Gegensatz dazu geben Normalformen einen sehr einfachen und sofort verständlichen Beweis dieser Aussage: Da sich der Rang einer Matrix beim Übergang zu einer äquivalenten Matrix nach Folgerung 16.46 nicht ändert, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die Matrix in Normalform bezüglich Äquivalenz ist. Für solche Matrizen ist die Aussage aber offensichtlich.

Die ausführliche Formulierung dieses Beweises lautet so: Nach Bemerkung 17.30 gibt es Matrizen $S \in \mathrm{GL}(m,K)$ und $T \in \mathrm{GL}(n,K)$, so dass

$$SAT = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{mit} \quad r = \mathrm{rk}A$$

gilt. Transponieren dieser Gleichung liefert dann mit Lemma 15.7 (d) die Matrix

$$T^\mathsf{T}A^\mathsf{T}S^\mathsf{T} = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)^\mathsf{T} = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad \in K^{n\times m},$$

nach Folgerung 16.46 ist also

$$\mathrm{rk}(A^\mathsf{T}) = \mathrm{rk}(T^\mathsf{T}A^\mathsf{T}S^\mathsf{T}) = \mathrm{rk}\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = r = \mathrm{rk}A.$$

**Aufgabe 17.32.** Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5}$.

(a) Für die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $x \mapsto Ax$ bestimme man Basen $B$ von $\mathbb{R}^5$ und $C$ von $\mathbb{R}^4$, so dass die Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ in Normalform ist.

(b) Bestimme $S \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{R})$ und $T \in \mathrm{GL}(5,\mathbb{R})$ so, dass $SAT$ in Normalform ist.

(c) Es sei $f\colon \mathrm{Pol}_4(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $f(\varphi)(x) = x\varphi''(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Gibt es Basen $B$ und $C$ von $\mathrm{Pol}_4(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R},\mathbb{R})$, so dass $A_f^{B,C} = A$ gilt?

**Aufgabe 17.33.**

(a) Bestimme Basen $B$ und $C$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass die Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ der Transpositionsabbildung $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $M \mapsto M^\mathsf{T}$ in Normalform ist.

(b) Kann diese Normalform auch mit derselben Basis im Start- und Zielraum erreicht werden?

# 18. Determinanten

Zum Ende des ersten Teils der linearen Algebra wollen wir jetzt noch die sogenannten Determinanten einführen, die beim Rechnen mit Matrizen ein unverzichtbares Hilfsmittel sind. Determinanten haben sehr viele schöne Eigenschaften und können demzufolge auch auf viele verschiedene Arten motiviert werden. Eine mögliche Herangehensweise ist, dass man nach einem einfachen Kriterium für die Invertierbarkeit quadratischer Matrizen sucht, so wie in dem folgenden einfachen Lemma für $2 \times 2$-Matrizen:

**Lemma 18.1.** *Eine $2 \times 2$-Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

*über einem Körper $K$ ist genau dann invertierbar, wenn $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0$ gilt.*

*Beweis.* Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Fall 1: Ist $a_{1,1} = 0$, so ist $A$ genau dann invertierbar, wenn $a_{1,2} \neq 0$ und $a_{2,1} \neq 0$ gilt – denn wenn diese beiden Einträge ungleich Null sind, sind die beiden Spalten von $A$ offensichtlich linear unabhängig (so dass dann $\operatorname{rk} A = 2$ ist), während $A$ andernfalls eine Nullzeile oder Nullspalte enthält und somit höchstens Rang 1 haben kann. Im Fall $a_{1,1} = 0$ sind die Bedingungen $a_{1,2} \neq 0$ und $a_{2,1} \neq 0$ aber äquivalent zu $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0$.
- Fall 2: Ist $a_{1,1} \neq 0$, so wenden wir den Gauß-Algorithmus aus Satz 15.27 an, um $\operatorname{rk} A$ zu berechnen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{a_{1,1}} Z1 \to Z1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \overset{Z2 - a_{2,1} Z1 \to Z2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} \\ 0 & a_{2,2} - \frac{a_{1,2}a_{2,1}}{a_{1,1}} \end{pmatrix}.$$

  Diese Matrix hat genau dann Rang 2, ist also genau dann invertierbar, wenn $a_{2,2} - \frac{a_{1,2}a_{2,1}}{a_{1,1}} \neq 0$, d. h. wenn $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0$ gilt. □

Die Zahl $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$ werden wir später die *Determinante* $\det A$ von $A$ nennen (weil sie „determiniert“, ob $A$ invertierbar ist oder nicht).

Unser Ziel in diesem Kapitel ist es, Lemma 18.1 auf größere quadratische Matrizen zu verallgemeinern, also zu jeder Matrix $A \in K^{n \times n}$ eine Zahl $\det A \in K$ zu definieren, die ein Polynom in den Einträgen von $A$ ist und (neben vielen anderen schönen Eigenschaften) genau dann ungleich Null ist, wenn $A$ invertierbar ist.

## 18.A Die Konstruktion der Determinante

Leider ist eine direkte Angabe der Determinante einer quadratischen Matrix $A \in K^{n \times n}$ als polynomialer Ausdruck in den Einträgen von $A$ so wie in Lemma 18.1 für allgemeines $n$ zwar möglich (siehe Bemerkung 18.14), aber auch recht kompliziert. Wir wollen daher hier den für euch wahrscheinlich etwas ungewohnten Zugang wählen, die Determinante über ihre Eigenschaften zu definieren, d. h. als eine Funktion $A \mapsto \det A$ auf den $n \times n$-Matrizen, die eine gewisse „Wunschliste“ elementarer Eigenschaften erfüllt. Im Anschluss werden wir dann zeigen, dass unsere Wunschliste wirklich erfüllbar ist und die Determinante in der Tat auch eindeutig bestimmt.

Hier ist nun unsere Wunschliste:

**Definition 18.2** (Determinante)**.** Es seien $K$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gegeben. Eine Abbildung $\det\colon K^{n \times n} \to K$ heißt **Determinante** (von $n \times n$-Matrizen), wenn gilt:

(a) („det ist multilinear“) Die Funktion det ist *linear in jeder Zeile*, d. h. für alle $k \in \{1,\dots,n\}$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k + a_k' \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k' \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

wobei $a_1,\dots,a_k,a_k',\dots,a_n \in K^{1\times n}$ die Zeilen der jeweiligen (quadratischen) Matrizen bezeichnen. (Halten wir also alle Zeilen bis auf die $k$-te fest, so haben wir genau eine lineare Abbildung in der $k$-ten Zeile im Sinne von Definition 16.1.)

(b) („det ist alternierend“) Stimmen zwei Zeilen von $A \in K^{n\times n}$ überein, so ist $\det A = 0$.

(c) („det ist normiert“) Es gilt $\det(E_n) = 1$.

**Beispiel 18.3.** Die Funktion

$$\det\colon K^{2\times 2} \to K,\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \mapsto a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

aus Lemma 18.1 ist eine Determinante:

(a) det ist multilinear: Die Additivität in der ersten Zeile ergibt sich z. B. aus der Rechnung

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} a_{1,1}+a_{1,1}' & a_{1,2}+a_{1,2}' \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} &= (a_{1,1}+a_{1,1}')a_{2,2} - (a_{1,2}+a_{1,2}')a_{2,1} \\ &= a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} + a_{1,1}'a_{2,2} - a_{1,2}'a_{2,1} \\ &= \det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{1,1}' & a_{1,2}' \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

die anderen Linearitätseigenschaften folgen natürlich genauso.

(b) det ist alternierend: Sind die beiden Zeilen der Matrix gleich, so ist

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,1} & a_{1,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{1,2} - a_{1,2}a_{1,1} = 0.$$

(c) det ist normiert, denn natürlich ist $\det(E_2) = 1$.

**Bemerkung 18.4.**

(a) Wir werden in Folgerung 18.8 und Satz 18.12 noch sehen, dass es zu jedem Körper $K$ und jedem $n \in \mathbb{N}_{>0}$ in der Tat genau eine Determinante $\det\colon K^{n\times n} \to K$ gibt, dass Definition 18.2 die Determinante also widerspruchsfrei und eindeutig festlegt. Solange wir dies noch nicht gezeigt haben, sollten wir aber korrekterweise immer von *einer* Determinante (und nicht von *der* Determinante) sprechen.

(b) Enthält $A$ eine Nullzeile, so können wir aus dieser Zeile den Faktor 0 herausziehen und erhalten aus der Linearitätseigenschaft in dieser Zeile sofort, dass dann $\det A = 0$ sein muss.

(c) Aus Eigenschaft (b) der Definition 18.2 einer Determinante folgt, dass sich $\det A$ beim Vertauschen zweier Zeilen mit $-1$ multipliziert, also genau das Vorzeichen ändert (daher kommt auch der Name „alternierend“ für diese Eigenschaft): Für alle $k,l \in \{1,\dots,n\}$ mit $k \neq l$ ergibt sich zusammen mit der Multilinearität nämlich (wobei die angegebenen Einträge in den

Zeilen $k$ bzw. $l$ stehen)

$$\underbrace{\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_k+a_l\\ \vdots\\ a_k+a_l\\ \vdots\end{pmatrix}}_{=0} = \det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_k\\ \vdots\\ a_k+a_l\\ \vdots\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_l\\ \vdots\\ a_k+a_l\\ \vdots\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_k\\ \vdots\\ a_k\\ \vdots\end{pmatrix}}_{=0} + \det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_k\\ \vdots\\ a_l\\ \vdots\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_l\\ \vdots\\ a_k\\ \vdots\end{pmatrix} + \underbrace{\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_l\\ \vdots\\ a_l\\ \vdots\end{pmatrix}}_{=0},$$

und damit

$$\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_k\\ \vdots\\ a_l\\ \vdots\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_l\\ \vdots\\ a_k\\ \vdots\end{pmatrix}.$$

(d) Analog zu (c) wollen wir jetzt untersuchen, was mit einer Determinante passiert, wenn wir in einer Matrix $A$ für gegebenes $k \in \{1,\dots,n\}$ die $k$-te Zeile unter Beibehaltung der Reihenfolge der anderen Zeilen ganz nach oben schieben. Wir können dies wie folgt durch $k-1$ Vertauschungen zweier benachbarter Zeilen erreichen:

$$A = \begin{pmatrix}\vdots\\ a_{k-2}\\ a_{k-1}\\ a_k\\ a_{k+1}\\ \vdots\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\vdots\\ a_{k-2}\\ a_k\\ a_{k-1}\\ a_{k+1}\\ \vdots\end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix}a_k\\ a_1\\ \vdots\\ a_{k-1}\\ a_{k+1}\\ \vdots\end{pmatrix}.$$

Da sich bei jeder dieser Vertauschungen nach (c) das Vorzeichen der Determinante ändert, ändert das gesamte Verschieben der $k$-ten Zeile ganz nach oben die Determinante von $A$ also um einen Faktor $(-1)^{k-1}$.

Um die weiteren Eigenschaften von Determinanten zu untersuchen, beginnen wir zunächst mit den Elementarmatrizen.

**Lemma 18.5** (Determinanten von Elementarmatrizen)**.** *Es sei* $\det\colon K^{n\times n} \to K$ *eine Determinante. Dann gilt für alle* $A \in K^{n\times n}$ *sowie für alle* $n\times n$*-Elementarmatrizen* $F_k(\lambda)$ *und* $F_{k,l}(\lambda)$ *aus Konstruktion 15.24:*

(a) $\det(F_k(\lambda)\cdot A) = \lambda \det A$.

(b) $\det(F_{k,l}(\lambda)\cdot A) = \det A$.

*Insbesondere gilt also* $\det F_k(\lambda) = \lambda$ *und* $\det F_{k,l}(\lambda) = 1$*, und damit* $\det(FA) = \det F \cdot \det A$ *für jede Elementarmatrix* $F$ *und jede beliebige quadratische Matrix* $A$*.*

*Beweis.* Es seien $a_1, \dots, a_n \in K^{1\times n}$ die Zeilen von $A$. Nach Konstruktion 15.24 entspricht eine Multiplikation von $A$ mit einer Elementarmatrix von links genau einer elementaren Zeilenumformung. Damit erhalten wir mit den Eigenschaften (a) und (b) aus Definition 18.2

$$\det(F_k(\lambda)\cdot A) = \det\begin{pmatrix}\vdots\\ \lambda\, a_k\\ \vdots\end{pmatrix} = \lambda\,\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_k\\ \vdots\end{pmatrix} = \lambda\,\det A$$

und

$$\det(F_{k,l}(\lambda)\cdot A) = \det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_k+\lambda\, a_l\\ \vdots\\ a_l\\ \vdots\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_k\\ \vdots\\ a_l\\ \vdots\end{pmatrix} + \lambda\,\underbrace{\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_l\\ \vdots\\ a_l\\ \vdots\end{pmatrix}}_{=0} = \det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_k\\ \vdots\\ a_l\\ \vdots\end{pmatrix} = \det A,$$

was die beiden Teile des Lemmas zeigt. Die Determinanten der Elementarmatrizen erhält man daraus für $A = E_n$. □

Aus diesem einfachen Lemma folgt nun bereits die wahrscheinlich wichtigste Eigenschaft von Determinanten:

**Satz 18.6** (**Produktsatz** für Determinanten)**.** *Es sei* $\det\colon K^{n\times n} \to K$ *eine Determinante. Dann gilt für alle* $A, B \in K^{n\times n}$*:*

(a) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

(b) *$A$ ist genau dann invertierbar, wenn* $\det A \neq 0$*. In diesem Fall ist* $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

*Beweis.* Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $A$ ist invertierbar. Dann ist $A = F_1 \cdot \dots \cdot F_k$ nach Folgerung 15.36 ein Produkt von Elementarmatrizen. Durch $k$-fache Anwendung von Lemma 18.5 erhält man also

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(F_1 \cdot \dots \cdot F_k \cdot B) &&= \det F_1 \cdot \dots \cdot \det F_k \cdot \det B \\ \text{sowie}\qquad \det A &= \det(F_1 \cdot \dots \cdot F_k) &&= \det F_1 \cdot \dots \cdot \det F_k, \end{aligned}$$

und damit wie behauptet $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. Setzt man hier $B = A^{-1}$ ein, so ergibt sich insbesondere $\det A \cdot \det A^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det E_n = 1$, d. h. es gilt auch $\det A \neq 0$ und $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Fall 2: $A$ ist nicht invertierbar, also $\operatorname{rk} A < n$. Bringen wir $A$ dann mit einem Produkt $F$ von Elementarmatrizen auf Zeilenstufenform $FA$, so hat $FA$ weniger als $n$ Stufen und damit am Ende (mindestens) eine Nullzeile. Also ist $\det(FA) = 0$ nach Bemerkung 18.4 (b). Da $F$ als Produkt von Elementarmatrizen invertierbar ist, bedeutet dies nach dem bereits gezeigten Fall 1 auch $\det F \cdot \det A = 0$; wegen $\det F \neq 0$ also $\det A = 0$.

Mit $FA$ hat aber auch $FAB$ eine Nullzeile. Damit folgt genauso wie oben auch $\det(AB) = 0$, also insbesondere $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. □

**Bemerkung 18.7.** Im Gegensatz zu Produkten gibt es *keine* Formel für die Determinante $\det(A+B)$ einer Summe von zwei Matrizen – insbesondere ist im Allgemeinen $\det(A+B) \neq \det A + \det B$!

Als Folgerung aus dem Produktsatz können wir nun bereits beweisen, dass die Eigenschaften aus Definition 18.2 eine Determinante eindeutig festlegen.

**Folgerung 18.8** (Eindeutigkeit der Determinante)**.** *Zu jedem Körper $K$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt es höchstens eine Determinante* $\det\colon K^{n\times n} \to K$.

*Beweis.* Es sei $A \in K^{n\times n}$. Ist $A$ nicht invertierbar, so ist nach Satz 18.6 notwendigerweise $\det A = 0$. Andernfalls ist $A = F_1 \cdot \dots \cdot F_k$ nach Folgerung 15.36 ein Produkt von Elementarmatrizen, und damit ist nach Satz 18.6 (a)

$$\det A = \det F_1 \cdot \dots \cdot \det F_k.$$

Da die Determinante der Elementarmatrizen nach Lemma 18.5 aber durch Definition 18.2 eindeutig bestimmt ist, ist damit auch $\det A$ durch diese Definition eindeutig festgelegt. □

Auf ganz ähnliche Art wollen wir nun zeigen, dass sich eine Determinante beim Transponieren der Matrizen nicht ändert.

**Folgerung 18.9.** *Ist $A \in K^{n\times n}$ und $\det\colon K^{n\times n} \to K$ eine Determinante, so gilt $\det(A^\mathsf{T}) = \det A$.*

*Beweis.* Ist $A$ nicht invertierbar, also $\operatorname{rk} A < n$, so ist nach Bemerkung 15.40 auch $A^\mathsf{T}$ nicht invertierbar, und damit ist $\det(A^\mathsf{T}) = 0 = \det A$ nach Satz 18.6 (b).

Andernfalls ist $A = F_1 \cdot \dots \cdot F_k$ nach Folgerung 15.36 wieder ein Produkt von Elementarmatrizen. Da die zu zeigende Aussage für Elementarmatrizen aus Lemma 18.5 offensichtlich ist (es ist nämlich $(F_k(\lambda))^\mathsf{T} = F_k(\lambda)$ und $(F_{k,l}(\lambda))^\mathsf{T} = F_{l,k}(\lambda)$), folgt somit nach Lemma 15.7 (d) und Satz 18.6 (a)

$$\det(A^\mathsf{T}) = \det((F_1 \cdots F_k)^\mathsf{T}) = \det(F_k^\mathsf{T} \cdots F_1^\mathsf{T}) = \det(F_k^\mathsf{T}) \cdots \det(F_1^\mathsf{T}) = \det F_1 \cdots \det F_k = \det A. \qquad \square$$

**Bemerkung 18.10.** Folgerung 18.9 besagt anschaulich, dass alle Eigenschaften, die für die Zeilen einer Determinante gelten, analog auch für die Spalten gelten. So ist eine Determinante z. B. auch linear in jeder Spalte (vgl. Definition 18.2 (a)) und ändert ihr Vorzeichen beim Vertauschen zweier Spalten (vgl. Bemerkung 18.4 (c)).

Um sicherzustellen, dass wir mit Definition 18.2 keine in sich widersprüchliche Wunschliste aufgeschrieben haben, kommen wir nun aber endlich zum bereits angekündigten Resultat, dass eine Determinante mit den geforderten Eigenschaften auch wirklich existiert. Wir werden die Funktionen $\det\colon K^{n\times n} \to K$ rekursiv über $n$ definieren und verwenden dazu die folgende Konstruktion, um Matrizen der Größe $n$ auf solche der Größe $n-1$ zurückzuführen.

**Definition 18.11** (Streichungsmatrix)**.** Zu $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{n\times n}$ sowie $k,l \in \{1,\dots,n\}$ sei

$$A'_{k,l} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,l-1} & a_{k-1,l+1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,l-1} & a_{k+1,l+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,l-1} & a_{n,l+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$$

die Matrix, die man erhält, wenn man aus $A$ die $k$-te Zeile und $l$-te Spalte herausstreicht. Wir bezeichnen diese Matrizen als **Streichungsmatrizen** zu $A$.

**Satz 18.12** (Existenz der Determinante)**.** *Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ definieren wir $\det\colon K^{n\times n} \to K$ rekursiv über $n$ durch die folgende Vorschrift:*

- *Für $n = 1$ setzen wir $\det(a_{1,1}) := a_{1,1}$.*
- *Für $n > 1$ setzen wir*

$$\det A := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k,1} \det A'_{k,1},$$

*wobei wie üblich $a_{k,1}$ die Einträge der ersten Spalte von $A$ und $A'_{k,1}$ die zu diesen Einträgen gehörigen Streichungsmatrizen sind.*

*Dann ist* det *eine (und damit nach Folgerung 18.8 „die“) Determinante für alle $n$.*

40

Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir uns ein paar Beispiele anschauen, um die angegebene rekursive Formel besser zu verstehen.

**Beispiel 18.13** (Determinante von $2\times 2$- und $3\times 3$-Matrizen)**.**

(a) Für $n=2$ besagt die Formel aus Satz 18.12

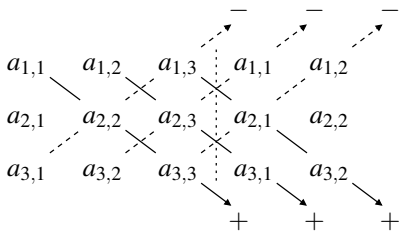
$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{pmatrix} &= (-1)^{1+1}a_{1,1}\det(a_{2,2}) + (-1)^{2+1}a_{2,1}\det(a_{1,2})\\ &= a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}\end{aligned}$$

und reproduziert damit die Formel aus Lemma 18.1.

(b) Für $n=3$ ergibt sich unter Benutzung des Ergebnisses aus (a)

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{pmatrix} &= (-1)^{1+1}a_{1,1}\det\begin{pmatrix}a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,2} & a_{3,3}\end{pmatrix} + (-1)^{2+1}a_{2,1}\det\begin{pmatrix}a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{3,2} & a_{3,3}\end{pmatrix}\\ &\quad + (-1)^{3+1}a_{3,1}\det\begin{pmatrix}a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,2} & a_{2,3}\end{pmatrix}\\ &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{1,3}a_{3,2}\\ &\quad + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{1,3}a_{2,2}.\end{aligned}$$

Am einfachsten kann man sich diese Formel nach der sogenannten **Regel von Sarrus** merken: Bilden wir die $3\times 5$-Matrix, in der wir neben der Matrix $A$ die beiden ersten Spalten noch einmal wiederholen, so ergeben sich die 6 Terme der Determinante mit ihren Vorzeichen aus dem folgenden Schema:




Beachte aber, dass diese einfache Merkregel *nur für* $n=3$ gilt – für größere $n$ ist der komplett ausmultiplizierte Ausdruck für $\det A$ deutlich komplizierter (und für konkrete numerische Berechnungen in der Tat auch nicht mehr geeignet).

**Bemerkung 18.14.** Diejenigen von euch, die aus der Parallelvorlesung „Algebraische Strukturen“ die symmetrische Gruppe $S_n$ aller Permutationen von $\{1,\dots,n\}$ kennen [G, Kapitel 2], können die Formel für die Determinante einer Matrix $A=(a_{i,j})_{i,j}\in K^{n\times n}$ auch nicht-rekursiv als

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot a_{1,\sigma(1)}\cdot\dots\cdot a_{n,\sigma(n)} \qquad (*)$$

hinschreiben. Man sieht an dieser Darstellung also, dass die Determinante aus einer Summe von $n!$ Termen besteht. Dabei ist jeder Term ein Produkt von genau $n$ Einträgen von $A$, und zwar aus jeder Zeile und jeder Spalte genau einem. Aufsummiert wird über alle Möglichkeiten, $n$ Einträge von $A$ eben gerade so auszuwählen, dass man aus jeder Zeile und Spalte einen Eintrag genommen hat. Die Vorzeichen der einzelnen Terme sind immer genau das Vorzeichen der entsprechenden Permutation.

Wir werden die Formel $(*)$ in dieser Vorlesung aber nicht benötigen und daher auch nicht beweisen, dass sie wirklich mit der rekursiven Definition aus Satz 18.12 übereinstimmt bzw. die Eigenschaften von Definition 18.2 erfüllt.

Wir kommen nun aber endlich zum Beweis des Existenzsatzes 18.12.

*Beweis von Satz 18.12.* Wir überprüfen die drei Eigenschaften aus Definition 18.2 mit Induktion über $n$. Für $n=1$ sind alle Aussagen klar. Wir können also annehmen, dass $n>1$ ist und wir die Eigenschaften von Definition 18.2 für Matrizen der Größe $n-1$ bereits gezeigt haben; wir müssen sie nun für Matrizen der Größe $n$ zeigen.

det ist multilinear: Der Ausdruck $a_{1,1} \det A'_{1,1}$ ist linear in der ersten Zeile, da $a_{1,1}$ natürlich linear in der ersten Zeile ist und $A'_{1,1}$ nicht von der ersten Zeile abhängt. Die Ausdrücke $a_{k,1} \det A'_{k,1}$ für $k > 1$ sind ebenfalls linear in der ersten Zeile, da $a_{k,1}$ nicht von der ersten Zeile abhängt und $\det A'_{k,1}$ nach Induktionsvoraussetzung linear in der ersten Zeile ist. Damit ist auch $\det A$ als Linearkombination dieser Ausdrücke linear in der ersten Zeile. Die Linearität in den anderen Zeilen folgt natürlich analog.

det ist alternierend: Wir bezeichnen die Zeilen von $A$ mit $a_1, \dots, a_n \in K^{1\times n}$. Weiterhin seien $a'_1, \dots, a'_n \in K^{1\times(n-1)}$ die Zeilen von $A$, bei denen man jeweils den ersten Eintrag herausgestrichen hat. Wir nehmen nun an, dass zwei Zeilen $a_i$ und $a_j$ von $A$ übereinstimmen, und müssen zeigen, dass $\det A = 0$ folgt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dazu $i > j$.

Beachte, dass dann auch in den Streichungsmatrizen $A'_{k,1}$ mit $k \neq i$ und $k \neq j$, bei denen wir also weder die $i$-te noch die $j$-te Zeile herausgestrichen haben, jeweils zwei Zeilen übereinstimmen. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Determinante aller dieser Streichungsmatrizen gleich 0, und damit bleibt in der rekursiven Formel für $\det A$ nur der Ausdruck

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A'_{i,1} + (-1)^{j+1} a_{j,1} \det A'_{j,1} \qquad (*)$$

übrig. Nun können wir wegen $a'_i = a'_j$

$$\text{sowohl} \quad A'_{i,1} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_{j-1} \\ a'_j \\ a'_{j+1} \\ \vdots \\ a'_{i-1} \\ a'_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{als auch} \quad A'_{j,1} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_{j-1} \\ a'_{j+1} \\ \vdots \\ a'_{i-1} \\ a'_i \\ a'_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{auf die Form} \quad A' := \begin{pmatrix} a'_i \\ a'_1 \\ \vdots \\ a'_{j-1} \\ a'_{j+1} \\ \vdots \\ a'_{i-1} \\ a'_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

bringen, indem wir die Zeile $a'_j$ bzw. $a'_i$ unter Beibehaltung der Reihenfolge der anderen Zeilen ganz nach oben schieben. Da det für Matrizen der Größe $n-1$ nach Induktionsvoraussetzung eine Determinante ist, ändern sich dadurch die Vorzeichen von $\det A'_{i,1}$ und $\det A'_{j,1}$ wie in Bemerkung 18.4 (d): Da wir in $A'_{i,1}$ die Zeile mit der Nummer $j$, in $A'_{j,1}$ jedoch die Zeile mit der Nummer $i-1$ nach oben schieben (im letzteren Fall fehlt ja die Zeile $a'_j$ oberhalb von $a'_i$), ist also

$$\det A'_{i,1} = (-1)^{j-1} \det A' \quad \text{und} \quad \det A'_{j,1} = (-1)^{i-2} \det A'$$

und damit nach $(*)$

$$\det A = (-1)^{i+j} a_{i,1} \det A' + (-1)^{i+j-1} a_{j,1} \det A' = 0$$

wegen $a_{i,1} = a_{j,1}$.

det ist normiert: In der ersten Spalte der Einheitsmatrix sind natürlich der erste Eintrag gleich 1 und alle anderen gleich 0. Weiterhin ist die Streichungsmatrix des Eintrags links oben gerade $E_{n-1}$. Also folgt sofort

$$\det E_n = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det E_{n-1} = 1.$$

Damit ist alles gezeigt. □

Insgesamt haben wir jetzt also gesehen, dass es für alle Körper $K$ und $n \in \mathbb{N}$ genau eine Determinante $\det\colon K^{n\times n} \to K$ gibt. In Zukunft werden wir daher immer von *der* Determinante quadratischer Matrizen sprechen.

## 18.B Eigenschaften der Determinante

Im letzten Abschnitt haben wir die Determinante quadratischer Matrizen definiert und auch bereits ihre ersten wichtigen Eigenschaften gesehen. Wir wollen diese Untersuchung der Determinante jetzt fortsetzen und uns dabei als Erstes um ihre praktische Berechnung kümmern. In der Tat ist hierfür die rekursive Formel aus Satz 18.12 bereits sehr nützlich. Wir können sie allerdings noch etwas erweitern, denn dort ist ja momentan die erste Spalte der Matrix ausgezeichnet – obwohl aufgrund von Definition 18.2 natürlich klar sein sollte, dass die erste Spalte der Matrix keine besondere Rolle spielt. Wir sollten eine ähnliche Rekursionsformel also auch für die anderen Spalten (und aufgrund von Folgerung 18.9 in der Tat auch für die Zeilen) erwarten können. Dies besagt der folgende Satz.

**Satz 18.15 (Laplacescher Entwicklungssatz).** *Es sei $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{n\times n}$.*

(a) *Für alle $l \in \{1,\dots,n\}$ gilt* $\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+l} \cdot a_{k,l} \cdot \det A'_{k,l}$.

(b) *Für alle $k \in \{1,\dots,n\}$ gilt* $\det A = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{k+l} \cdot a_{k,l} \cdot \det A'_{k,l}$.

*Benutzt man diese Formeln, so sagt man auch, dass man die Determinante von $A$ nach der $l$-ten Spalte bzw. $k$-ten Zeile entwickelt.*

*Beweis.*

(a) Es sei $B = (b_{i,j})_{i,j}$ die Matrix, die man aus $A$ erhält, indem man die Spalte $l$ unter Beibehaltung der Reihenfolge der anderen Spalten ganz nach links schiebt. Nach den Bemerkungen 18.4 (d) und 18.10 ist dann $\det A = (-1)^{l-1} \det B$. Andererseits ist natürlich $b_{k,1} = a_{k,l}$ und $B'_{k,1} = A'_{k,l}$ für alle $k \in \{1,\dots,n\}$. Damit folgt wie behauptet nach Satz 18.12 angewendet auf $B$

$$\det A = (-1)^{l-1} \det B = (-1)^{l-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} b_{k,1} \det B'_{k,1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+l} a_{k,l} \det A'_{k,l}.$$

(b) Dies ergibt sich mit Bemerkung 18.10 sofort aus (a). □

**Beispiel 18.16** (Berechnung von Determinanten)**.** Die Entwicklung nach Laplace ist oft die geschickteste Art, die Determinante einer Matrix $A$ konkret zu berechnen – insbesondere wenn man nach einer Spalte oder Zeile entwickeln kann, in der bereits viele Einträge gleich 0 sind, so dass die entsprechenden Terme in der Summe wegfallen. In der Praxis empfiehlt es sich daher, zunächst mit elementaren Spalten- oder Zeilenumformungen eine Spalte oder Zeile zu erzeugen, in der nur ein Eintrag ungleich Null ist, und dann nach dieser Spalte bzw. Zeile zu entwickeln. Beachte, dass die Determinante dabei nach Lemma 18.5 …

- mit $\lambda$ multipliziert wird, wenn wir eine Spalte oder Zeile mit $\lambda$ multiplizieren; und
- unverändert bleibt, wenn wir ein Vielfaches einer Spalte bzw. Zeile zu einer anderen addieren.

Hier ist ein Beispiel, bei dem wir der Reihe nach die erste von der dritten Spalte subtrahieren, nach der dritten Spalte entwickeln, und noch einmal nach der zweiten Zeile entwickeln: Es ist

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} &\overset{S3-S1\to S3}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (-1)^{3+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= -4.
\end{aligned}$$

Ein besonders einfacher Fall – der aber dennoch häufig vorkommt – sind die sogenannten Dreiecksmatrizen, bei denen oberhalb oder unterhalb der Diagonale nur Nullen stehen.

**Definition 18.17** (Dreiecksmatrizen)**.** Eine quadratische Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{n\times n}$ heißt **obere Dreiecksmatrix**, falls $a_{i,j} = 0$ für alle $i > j$ gilt, und **untere Dreiecksmatrix**, falls $a_{i,j} = 0$ für alle $i < j$ gilt. Obere bzw. untere Dreiecksmatrizen haben also die Form

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Sind zusätzlich noch alle Einträge $a_{i,i}$ auf der Diagonale gleich Null, so heißt $A$ **echte (obere bzw. untere) Dreiecksmatrix**.

**Folgerung 18.18** (Determinante von Dreiecksmatrizen)**.** *Ist $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{n\times n}$ eine (obere oder untere) Dreiecksmatrix, so ist ihre Determinante gleich dem Produkt ihrer Einträge auf der Diagonale*

$$\det A = a_{1,1} \cdot \dots \cdot a_{n,n}.$$

*Beweis.* Da untere Dreiecksmatrizen beim Transponieren in obere übergehen, reicht es nach Folgerung 18.9, die Aussage für obere Dreiecksmatrizen zu zeigen. Wir beweisen die Aussage in diesem Fall mit Induktion über $n$; der Fall $n = 1$ ist dabei trivial. Für $n > 1$ entwickeln wir $\det A$ gemäß Satz 18.15 nach der 1. Spalte: Da hier nur der erste Eintrag ungleich Null ist, ergibt sich sofort nach Induktionsvoraussetzung

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{1,1} \det A'_{1,1} = a_{1,1} \cdot (a_{2,2} \cdot \dots \cdot a_{n,n}),$$

da auch $A'_{1,1} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ eine obere Dreiecksmatrix (mit Diagonaleinträgen $a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$) ist. □

**Aufgabe 18.19.**

(a) Berechne $\det(A^5)$ und $\det(5A)$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(b) Für $a_1, \dots, a_n \in K\backslash\{0\}$ zeige man

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} = -\left(\prod_{i=1}^n a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right).$$

**Aufgabe 18.20.** Es sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix, die eine Blockgestalt der Form

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

hat, wobei $B \in K^{m\times m}$ und $C \in K^{(n-m)\times(n-m)}$ selbst quadratische Matrizen sind. Zeige, dass dann $\det A = \det B \cdot \det C$ gilt.

(Hinweis: Es hilft, zunächst die Fälle zu betrachten, in denen eine der Matrizen $B$ und $C$ nicht invertierbar oder die Einheitsmatrix ist.)

Wir wollen nun noch zwei Ergebnisse zu Determinanten beweisen, die mehr aus theoretischer als aus rechnerischer Sicht interessant sind. Das erste betrifft inverse Matrizen: Ist $A$ eine invertierbare Matrix, so haben wir in Satz 15.35 ja bereits gesehen, wie man $A^{-1}$ konkret berechnen kann. Mit Hilfe von Determinanten können wir nun auch eine explizite Formel für $A^{-1}$ angeben – die allerdings den Nachteil hat, dass sie bei konkreten Berechnungen relativ aufwendig ist, weil für jeden Eintrag von $A^{-1}$ eine eigene Determinante berechnet werden muss.

**Satz 18.21** (Explizite Formel für die inverse Matrix)**.** *Es sei* $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{n\times n}$.

(a) *Ist* $C = (c_{i,j})_{i,j} \in K^{n\times n}$ *die Matrix mit Einträgen*

$$c_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A'_{j,i}$$

*(beachte die Vertauschung von Spalten- und Zeilenindizes bei der Streichungsmatrix!), so ist* $CA = AC = (\det A) \cdot E_n$.

(b) *Ist* $A$ *invertierbar, so ist die inverse Matrix von* $A$ *gegeben durch*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C = \left( (-1)^{i+j} \frac{\det A'_{j,i}}{\det A} \right)_{i,j}$$

*mit* $C$ *wie in (a).*

*Beweis.* Für alle $i,k = 1,\dots,n$ überprüfen wir den $(i,k)$-Eintrag des Matrixprodukts $CA$: Nach Definition 15.5 ist dies

$$\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} a_{j,k} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{j,k} \det A'_{j,i} \overset{18.15}{=} \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \overset{\text{Spalte } i}{\overset{\downarrow}{a_{1,k}}} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

wobei die zweite Gleichung genau die Entwicklung nach Spalte $i$ ist, und die Matrix auf der rechten Seite aus $A$ entsteht, indem die Einträge aus Spalte $k$ auch in Spalte $i$ geschrieben werden. Die Determinante dieser Matrix ist aber 0 für $i \neq k$ (da dann zwei gleiche Spalten existieren) und $\det A$ für $i = k$ (denn dann ist diese Matrix gleich $A$). Damit ist $CA = (\det A) E_n$.

Analog zeigt man auch $AC = (\det A) E_n$ und damit Teil (a). Die Formel in (b) folgt daraus natürlich sofort mit Division durch $\det A$. □

**Beispiel 18.22.** Für eine $2 \times 2$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

hat die Matrix $C$ aus Satz 18.21 die Einträge

$$c_{1,1} = (-1)^{1+1} \det(a_{2,2}) = a_{2,2}, \qquad c_{1,2} = (-1)^{1+2} \det(a_{1,2}) = -a_{1,2},$$

und genauso $c_{2,1} = -a_{2,1}$ und $c_{2,2} = a_{1,1}$. Damit ist nach Satz 18.21 (b) im Fall einer invertierbaren Matrix also

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}.$$

Eine konkrete Anwendung von Satz 18.21 ergibt sich bei der Lösung linearer Gleichungssysteme: Sind $A \in \mathrm{GL}(n,K)$ eine invertierbare Matrix und $b \in K^n$, so wissen wir bereits, dass das Gleichungssystem $Ax = b$ für $x$ die eindeutige Lösung $x = A^{-1}b$ hat. Da wir gerade mit Hilfe von Determinanten eine explizite Formel für die inverse Matrix $A^{-1}$ gefunden haben, überrascht es nicht, dass wir auch für die Koordinaten dieses Lösungsvektors $x = A^{-1}b$ eine ähnliche explizite Formel herleiten können:

**Satz 18.23 (Cramersche Regel).** *Es seien* $A \in \mathrm{GL}(n,K)$ *und* $b \in K^n$. *Wir bezeichnen die Spalten von* $A$ *mit* $a_1,\dots,a_n \in K^n$. *Dann ist die (nach Algorithmus 15.41 (a) eindeutige) Lösung des Gleichungssystems* $Ax = b$ *der Vektor* $x \in K^n$ *mit den Komponenten*

$$x_i = \frac{\det(a_1 \,|\, \cdots \,|\, a_{i-1} \,|\, b \,|\, a_{i+1} \,|\, \cdots \,|\, a_n)}{\det A}$$

*für* $i = 1,\dots,n$.

*Beweis.* Natürlich ist $x = A^{-1}b$. Nach Satz 18.21 (b) und Definition 15.5 der Matrixmultiplikation ist die $i$-te Komponente dieses Matrixprodukts gleich

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \frac{\det A'_{j,i}}{\det A} \cdot b_j \overset{18.15}{=} \frac{1}{\det A} \det(a_1 \,|\, \cdots \,|\, a_{i-1} \,|\, b \,|\, a_{i+1} \,|\, \cdots \,|\, a_n),$$

wobei $b_j$ die $j$-te Komponente von $b$ und die zweite Gleichheit die Entwicklung nach der $i$-ten Spalte ist. □

**Beispiel 18.24.** Wir wollen mit der Cramerschen Regel das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 &=& 2 \\ x_1 - 2x_2 &=& -1 \end{array} \quad \text{lösen, also} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist sehr einfach: Es ist

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1.$$

Beachte jedoch, dass es für konkrete Gleichungssysteme mit mehr als zwei Variablen sehr rechenaufwendig ist, die Cramersche Regel zu verwenden. Man wird diese Regel daher meistens nur für theoretische Überlegungen verwenden, in denen man eine konkrete Formel für die Lösung (und nicht nur ein Lösungsverfahren) braucht. Für numerische Berechnungen ist der Gauß-Algorithmus in Satz 15.33 wesentlich effizienter.

**Aufgabe 18.25.** Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix mit ganzzahligen Einträgen.

Zeige, dass $A^{-1}$ genau dann ebenfalls nur ganzzahlige Einträge hat, wenn $\det A = \pm 1$ gilt.

41

# Grundlagen der Mathematik 2: Lineare Algebra

## 19. Endomorphismen

In Kapitel 16 hatten wir ausführlich untersucht, wie man lineare Abbildungen $f\colon V \to W$ zwischen zwei (endlich-dimensionalen) $K$-Vektorräumen $V$ und $W$ beschreiben kann. Wir haben gesehen, dass sich solche Morphismen nach Wahl von Basen von $V$ und $W$ immer durch Matrizen darstellen lassen, und dass man bei geeigneter Wahl dieser Basen auch immer erreichen kann, dass diese Matrizen eine sehr einfache Form haben (siehe Satz 17.29).

Wir wollen uns jetzt den sehr häufig vorkommenden Spezialfall der sogenannten *Endomorphismen* ansehen, bei denen der Startraum $V$ derselbe ist wie der Zielraum $W$, so dass wir einen Vektor $x \in V$ direkt mit seinem Bildvektor $f(x) \in W$ vergleichen können. Um dies auch anhand der Koordinaten von $x$ und $f(x)$ bezüglich der gewählten Basen machen zu können, werden wir bei der Untersuchung von Endomorphismen in der Regel voraussetzen, dass wir in $V$ und $W$ die gleiche Basis gewählt haben.

Schon ohne irgendeine Rechnung sollte klar sein, dass wir in diesem Fall wohl keine so einfache Abbildungsmatrix wie in Satz 17.29 erhalten können, da wir jetzt ja nur noch *eine* Basis frei wählen dürfen und damit viel weniger Möglichkeiten haben, das Resultat zu manipulieren. In der Tat wird dieses Problem einer möglichst einfachen Abbildungsmatrix durch die verringerten Wahlmöglichkeiten so kompliziert, dass wir es erst am Ende des nächsten Kapitels vollständig lösen können.

### 19.A Ähnliche Matrizen

Um den Unterschied zwischen linearen Abbildungen mit verschiedenem und gleichem Start- und Zielraum deutlich zu sehen, erinnern wir uns zunächst noch einmal kurz an unsere Resultate über Abbildungsmatrizen aus Abschnitt 16.C.

**Bemerkung 19.1** (Abbildungsmatrizen linearer Abbildungen)**.** Es seien $V$ und $W$ endlich erzeugte Vektorräume der Dimensionen $n$ bzw. $m$ mit gewählten Basen $B = (x_1, \dots, x_n)$ und $C = (y_1, \dots, y_m)$. Weiterhin sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann wissen wir bereits:

(a) Wir können $f$ durch die Abbildungsmatrix

$$A_f^{B,C} = (\Phi_C(f(x_1)) \,|\, \cdots \,|\, \Phi_C(f(x_n))) \quad \in K^{m\times n}$$

beschreiben (siehe Definition 16.26), wobei $\Phi_C\colon W \to K^m$ die Koordinatenabbildung aus Konstruktion 16.18 ist. Die Spalten dieser Matrix sind also genau die Koordinatenvektoren bzgl. $C$ der Bilder der Basisvektoren von $B$. Diese Zuordnung einer Matrix $A_f^{B,C}$ zu einem Morphismus $f$ liefert einen Isomorphismus zwischen dem Raum $\mathrm{Hom}(V,W)$ aller derartigen Morphismen und dem Raum $K^{m\times n}$ aller Matrizen der passenden Größe.

(b) Sind $B'$ und $C'$ weitere Basen von $V$ bzw. $W$, so ändert sich die zugehörige Abbildungsmatrix nach Satz 16.42 (a) gemäß

$$A_f^{B',C'} = A^{C,C'} \cdot A_f^{B,C} \cdot A^{B',B},$$

wobei $A^{C,C'} \in \mathrm{GL}(m,K)$ und $A^{B',B} \in \mathrm{GL}(n,K)$ die Basiswechselmatrizen aus Definition 16.38 sind, es ist also z. B. $A^{C,C'} = (\Phi_{C'}(y_1) \,|\, \cdots \,|\, \Phi_{C'}(y_m))$.

(c) Umgekehrt sind invertierbare Matrizen auch immer Basiswechselmatrizen. Zwei Matrizen $A, A' \in K^{m\times n}$ beschreiben damit genau dann dieselbe lineare Abbildung (nur bezüglich evtl. verschiedener Basen), wenn es invertierbare Matrizen $S$ und $T$ gibt mit $A' = SAT$ (siehe Satz

16.42). Wir haben $A$ und $A'$ in diesem Fall *äquivalent* zueinander genannt (siehe Definition 16.44).

(d) Nach Satz 17.29 kann man die Basen $B$ und $C$ stets so wählen, dass die Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ von $f$ die besonders einfache „Normalform" (bezüglich der Äquivalenz von Matrizen)

$$A_f^{B,C} = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

mit $r = \operatorname{rk} f$ besitzt. In der Sprechweise von (c) bedeutet dies einfach, dass jede Matrix äquivalent zu einer Matrix in einer solchen Normalform ist.

Wie schon angekündigt wollen wir nun untersuchen, was sich an diesen Eigenschaften ändert, wenn Start- und Zielraum der betrachteten Morphismen übereinstimmen und wir in beiden Räumen auch die gleiche Basis wählen.

**Definition 19.2** (Endomorphismen)**.** Es sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Ein Morphismus $f\colon V \to V$ von $V$ in sich heißt **Endomorphismus** von $V$. Der Vektorraum aller Endomorphismen von $V$ wird mit $\operatorname{End}(V) = \operatorname{Hom}(V,V)$ bezeichnet.

**Bemerkung 19.3** (Abbildungsmatrizen von Endomorphismen)**.** Wir betrachten einen endlichdimensionalen Vektorraum $V$ mit einer Basis $B = (x_1,\dots,x_n)$. Die Eigenschaften aus Bemerkung 19.1 ändern sich dann für einen Endomorphismus $f\colon V \to V$ wie folgt:

(a) Die *Abbildungsmatrix* von $f$ wie in Bemerkung 19.1 (a) mit Start- und Zielbasis $B$ bezeichnen wir kurz mit

$$A_f^B := A_f^{B,B} = (\Phi_B(f(x_1)) \mid \cdots \mid \Phi_B(f(x_n))) \quad \in K^{n\times n},$$

so dass die Zuordnung $f \mapsto A_f^B$ nun also einen Isomorphismus von $\operatorname{End}(V)$ in den Raum $K^{n\times n}$ der quadratischen $n\times n$-Matrizen liefert.

(b) Die Transformationsformel aus Bemerkung 19.1 (b) wird dementsprechend zu

$$A_f^{B'} = A^{B,B'} \cdot A_f^B \cdot A^{B',B}$$

für eine zweite Basis $B'$ von $V$. Weil nach Lemma 16.41 (a) aber $A^{B,B'} = (A^{B',B})^{-1}$ gilt, können wir dies schreiben als

$$A_f^{B'} = T^{-1} A_f^B T \quad \text{mit} \quad T = A^{B',B}.$$

(c) Da invertierbare Matrizen immer Basiswechselmatrizen sind, beschreiben zwei quadratische Matrizen $A, A' \in K^{n\times n}$ genau dann denselben Endomorphismus (nur bezüglich evtl. einer anderen Basis), wenn es eine invertierbare Matrix $T$ gibt mit $A' = T^{-1}AT$. Wir definieren daher:

**Definition 19.4** (Ähnliche Matrizen)**.** Zwei quadratische Matrizen $A, A' \in K^{n\times n}$ derselben Größe heißen **ähnlich** zueinander, wenn es eine invertierbare Matrix $T \in \operatorname{GL}(n,K)$ gibt, so dass $A' = T^{-1}AT$.

Nach Bemerkung 19.3 (c) sind $A$ und $A'$ also genau dann ähnlich zueinander, wenn sie denselben Endomorphismus bezüglich einer evtl. anderen Basis beschreiben.

**Bemerkung 19.5.**

(a) Wie im Fall der Äquivalenz von Matrizen (siehe Bemerkung 16.45 (a)) prüft man auch hier leicht nach, dass die Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation ist (siehe Definition 2.31).

(b) Zwei ähnliche Matrizen sind offensichtlich auch immer äquivalent zueinander. Beachte, dass die Wahl der Begriffe hier etwas ungeschickt ist, denn im normalen Sprachgebrauch klingt „Äquivalenz" ja wie eine stärkere Bedingung als „Ähnlichkeit" – in Wirklichkeit ist es aber genau umgekehrt.

Die Übertragung von Teil (d) der Bemerkung 19.1, also die Frage nach einer „Normalform von Matrizen bezüglich Ähnlichkeit“, führt auf die sogenannte Jordansche Normalform, die wir im nächsten Kapitel ausführlich untersuchen werden. In diesem Abschnitt wollen wir uns zunächst einmal damit begnügen, ein paar Eigenschaften quadratischer Matrizen anzugeben, die bei ähnlichen Matrizen gleich sind. Neben dem Rang (der bei ähnlichen Matrizen aufgrund von Folgerung 16.46 natürlich übereinstimmt) sind dies die uns schon bekannte Determinante sowie die sogenannte Spur, die wir jetzt kurz einführen und untersuchen wollen.

**Definition 19.6** (Spur einer Matrix)**.** Ist $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix, so heißt die Summe ihrer Einträge auf der Diagonale von links oben nach rechts unten

$$\operatorname{Spur} A := a_{1,1} + \cdots + a_{n,n} \quad \in K$$

die **Spur** von $A$.

**Lemma 19.7.** *Für alle $A, B \in K^{n\times n}$ gilt* $\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA)$.

*Beweis.* Es seien $A = (a_{i,j})_{i,j}$ und $B = (b_{i,j})_{i,j}$. Dann gilt nach Definition 15.5 des Matrixprodukts

$$\operatorname{Spur}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i} \quad \text{und} \quad \operatorname{Spur}(BA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} a_{j,i}.$$

Dies ist aber derselbe Ausdruck (unter Vertauschung der Bezeichnung der Summationsvariablen $i \leftrightarrow j$). □

**Lemma 19.8** (Invarianz von Determinante und Spur unter Ähnlichkeit)**.** *Sind $A, A' \in K^{n\times n}$ zwei zueinander ähnliche Matrizen, so gilt*

(a) $\det A' = \det A$;

(b) $\operatorname{Spur} A' = \operatorname{Spur} A$.

*Beweis.* Es sei $T \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit $A' = T^{-1}AT$.

(a) Mit Satz 18.6 folgt

$$\det A' = \det(T^{-1}AT) = (\det T)^{-1} \cdot \det A \cdot \det T = \det A.$$

(b) Es gilt

$$\operatorname{Spur} A' = \operatorname{Spur}(T^{-1}A \cdot T) \overset{19.7}{=} \operatorname{Spur}(T \cdot T^{-1}A) = \operatorname{Spur}(EA) = \operatorname{Spur} A.$$ □

**Beispiel 19.9.** Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt $\det A = 4 \cdot (-2) - (-1) \cdot 5 = -3$ und $\operatorname{Spur} A = 4 - 2 = 2$. Betrachten wir nun die invertierbare Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{so berechnet man leicht} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A' := T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist in Übereinstimmung mit Lemma 19.8 auch hier $\det A' = -3$ und $\operatorname{Spur} A' = 2$. Diese Invarianz von Determinante und Spur bedeutet auch bereits, dass $A$ sicher nicht zu einer Matrix in einer Normalform wie in Bemerkung 19.1 (d) ähnlich sein kann, da alle diese Matrizen ja Determinante 0 oder 1 haben.

Die Invarianz der Determinante und Spur einer Matrix hat auch noch eine weitere wichtige Konsequenz: Genau wie beim Rang bedeutet sie, dass wir diese Konzepte nicht nur für Matrizen, sondern auch für Endomorphismen definieren können.

**Konstruktion 19.10** (Determinante und Spur von Endomorphismen)**.** Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich erzeugten Vektorraums $V$. Dann definieren wir die **Determinante** und **Spur** von $f$ als

$$\det f := \det A_f^B \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Spur} f := \operatorname{Spur} A_f^B$$

für eine beliebige Basis $B$ von $V$. Beachte, dass dies wohldefiniert ist, weil eine andere Basiswahl nach Bemerkung 19.3 (b) zu einer ähnlichen Abbildungsmatrix und somit nach Lemma 19.8 zur gleichen Determinante und Spur führen würde.

## 19.B Eigenwerte

Wir wollen nun ein weiteres sehr wichtiges Konzept einführen, das für quadratische Matrizen genauso wie für Endomorphismen definiert werden kann und auf der Idee basiert, dass wir bei gleichem Start- und Zielraum einen Vektor in der Startmenge mit seinem Bildvektor vergleichen können.

**Definition 19.11** (Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume)**.**

(a) Es sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Eine Zahl $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** von $A$, wenn es einen Vektor $x \in K^n \backslash \{0\}$ gibt mit $Ax = \lambda x$. In diesem Fall heißt $x$ ein zum Eigenwert $\lambda$ gehöriger **Eigenvektor**. Die Menge

$$\operatorname{Eig}(A,\lambda) := \{x \in K^n : Ax = \lambda x\}$$

wird der **Eigenraum** von $A$ zum Eigenwert $\lambda$ genannt.

(b) Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums $V$. In diesem Fall heißt $\lambda \in K$ ein **Eigenwert** und $x \in V\backslash\{0\}$ ein zugehöriger **Eigenvektor** von $f$, wenn $f(x) = \lambda x$. Auch hier ist der **Eigenraum** von $f$ zu $\lambda$ die Menge

$$\operatorname{Eig}(f,\lambda) := \{x \in V : f(x) = \lambda x\}.$$

**Bemerkung 19.12.**

(a) Der Eigenraum (einer Matrix oder Endomorphismus) ist also einfach die Menge aller Eigenvektoren – mit Ausnahme des Nullvektors, der nach Definition 19.11 *nie* ein Eigenvektor ist, aber in *jedem* Eigenraum enthalten ist. Ein Vorteil dieser Konvention ist zum Beispiel, dass der Eigenraum $\operatorname{Eig}(A,\lambda)$ einer Matrix $A$ stets ein Untervektorraum von $K^n$ ist, denn er lässt sich wegen

$$\operatorname{Eig}(A,\lambda) = \{x \in K^n : Ax = \lambda x\} = \{x \in K^n : (\lambda E - A)x = 0\} = \operatorname{Ker}(\lambda E - A)$$

als Kern einer Matrix schreiben, wobei $E$ wie üblich die Einheitsmatrix (der Größe $n \times n$) bezeichnet. Diese alternative Beschreibung $\operatorname{Eig}(A,\lambda) = \operatorname{Ker}(\lambda E - A)$ werden wir im Folgenden oft benutzen. Natürlich können wir auch genauso gut $\operatorname{Eig}(A,\lambda) = \operatorname{Ker}(A - \lambda E)$ schreiben, da eine Matrix und ihr Negatives stets denselben Kern haben. Ein wichtiger Spezialfall hiervon ist der des Eigenwerts 0: Hier ist $\operatorname{Eig}(A,0) = \operatorname{Ker} A$ einfach der Kern der gegebenen Matrix.

(b) Analog zu (a) ist $\operatorname{Eig}(f,\lambda) = \operatorname{Ker}(\lambda \operatorname{id}_V - f) \leq V$ für einen Endomorphismus $f\colon V \to V$.

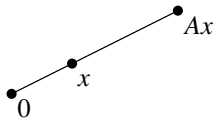
(c) Ist $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum, so hängen die Eigenwerte und Eigenvektoren eines Endomorphismus $f\colon V \to V$ wie erwartet mit denen der Abbildungsmatrix $A_f^B$ von $f$ bezüglich einer Basis $B$ von $V$ zusammen: Nach Satz 16.26 ist $\Phi_B(f(x)) = A_f^B \cdot \Phi_B(x)$ für alle $x \in V$, und damit

$$\begin{aligned} f(x) = \lambda x &\Leftrightarrow \Phi_B(f(x)) = \lambda \Phi_B(x) \\ &\Leftrightarrow A_f^B \cdot \Phi_B(x) = \lambda \Phi_B(x). \end{aligned}$$

Also ist $x \in V$ genau dann ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda$ von $f$, wenn der zugehörige Koordinatenvektor $\Phi_B(x)$ ein Eigenvektor zum selben Eigenwert $\lambda$ der Abbildungsmatrix $A_f^B$ ist. Insbesondere haben $f$ und $A_f^B$ damit die gleichen Eigenwerte.

42

**Beispiel 19.13** (Geometrische Deutung von Eigenvektoren)**.** Nach Definition ist ein Vektor $x \neq 0$ genau dann ein Eigenvektor einer quadratischen Matrix $A$ zum Eigenwert $\lambda$, wenn $x$ durch die zu $A$ gehörige lineare Abbildung wie im Bild rechts nur um einen Faktor $\lambda$ gestreckt wird. Besonders einfach zu sehen ist dies im Fall von Drehungen in der Ebene: Für einen gegebenen Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ beschreibt die Abbildung




$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} x, \tag{$*$}$$

also in Polarkoordinaten $f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\alpha)}$, nach Satz 9.27 gerade die Drehung der komplexen Zahlenebene um den Ursprung um den Winkel $\alpha$. Identifizieren wir $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$, indem wir eine komplexe Zahl $x \in \mathbb{C}$ gemäß $x = x_1 + \mathrm{i}x_2$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ in Real- und Imaginärteil aufteilen, so können wir $f$ auch schreiben als

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ x_1 + \mathrm{i}x_2 \mapsto (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)(x_1 + \mathrm{i}x_2) = (\cos\alpha \cdot x_1 - \sin\alpha \cdot x_2) + \mathrm{i}(\sin\alpha \cdot x_1 + \cos\alpha \cdot x_2),$$

bzw. in Vektorschreibweise als die lineare Abbildung $f = f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zur sogenannten *Drehmatrix*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Für eine solche Drehung sehen wir nun auch ohne Rechnung:

(a) Für $\alpha = 0$ ist $A = E$, also $x \mapsto f(x) = Ax = x$ die Identität. Damit ist 1 der einzige Eigenwert von $f$ bzw. $A$, und $\mathrm{Eig}(f, 1) = \mathrm{Eig}(A, 1) = \mathbb{R}^2$.

(b) Für $\alpha = \pi$ ist $A = -E$, die Abbildung $x \mapsto f(x) = Ax = -x$ spiegelt alle Vektoren am Ursprung. Also ist in diesem Fall $-1$ der einzige Eigenwert von $f$ bzw. $A$, und $\mathrm{Eig}(f, -1) = \mathrm{Eig}(A, -1) = \mathbb{R}^2$.

(c) Für alle anderen Drehwinkel wird kein Vektor $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ auf ein Vielfaches von sich abgebildet. Die Abbildung $f$ bzw. die Matrix $A$ hat dann also keine Eigenvektoren und damit auch keine Eigenwerte.

Beachte aber, dass diese Ergebnisse nur gelten, wenn man $f$ über dem Grundkörper $\mathbb{R}$ betrachtet und dementsprechend nach *reellen* Eigenwerten sucht. Fasst man $f$ dagegen als lineare Abbildung über $\mathbb{C}$ auf, zeigt die Formel $(*)$ natürlich direkt, dass $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ ein (komplexer) Eigenwert ist mit $\mathrm{Eig}(f, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}) = \mathbb{C}$.

**Beispiel 19.14** (Eigenvektoren in Funktionenräumen)**.** Ein wichtiges Beispiel von (unendlich-dimensionalen) Vektorräumen, die wir bisher noch nicht untersucht haben, erhalten wir, wenn wir die lineare Algebra mit der Analysis kombinieren und Räume stetiger bzw. differenzierbarer Funktionen betrachten. So ist z. B. für eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ (ohne isolierte Punkte) und $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die in Definition 11.7 bereits eingeführte Menge $C^n(D)$ aller $n$-mal stetig differenzierbaren Funktionen von $D$ nach $\mathbb{R}$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(D, \mathbb{R})$, da mit $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ auch $f + g$ und $\lambda f$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ wieder $n$-mal stetig differenzierbar sind.

Betrachten wir nun z. B. die Ableitungsabbildung

$$f\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}),\ \varphi \mapsto \varphi'$$

(die nach den Rechenregeln für Ableitungen aus Satz 10.8 linear ist), so können wir auch für diesen Endomorphismus nach Eigenwerten und Eigenvektoren suchen. In der Tat sehen wir hier auch schnell, dass jede reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $f$ ist, denn für die Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ gilt ja $\varphi'(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x} = \lambda\varphi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und damit $f(\varphi) = \lambda\varphi$.

Wir wollen nun aber wieder zum endlich-dimensionalen Fall zurückkehren und als Erstes untersuchen, wie man im Allgemeinen von einer gegebenen Matrix die Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen kann. Dazu beginnt man mit den Eigenwerten:

**Satz 19.15** (Berechnung von Eigenwerten)**.** *Es sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Eine Zahl $\lambda \in K$ ist genau dann ein Eigenwert von $A$, wenn* $\det(\lambda E - A) = 0$.

*Beweis.* Für $\lambda \in K$ gilt

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ Eigenwert von } A &\Leftrightarrow \text{es gibt ein } x \in K^n \backslash \{0\} \text{ mit } (\lambda E - A)x = 0 \\
&\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker}(\lambda E - A) > 0 \\
&\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im}(\lambda E - A) < n && \text{(Satz 15.33 (a))} \\
&\Leftrightarrow \lambda E - A \text{ nicht invertierbar} && \text{(Definition 15.17)} \\
&\Leftrightarrow \det(\lambda E - A) = 0. && \text{(Satz 18.6 (b))}
\end{aligned}$$

□

**Beispiel 19.16.** Die Eigenwerte der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 19.9 sind nach Satz 19.15 die Lösungen der Gleichung

$$0 = \det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 1 \\ -5 & \lambda + 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2) + 5 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3),$$

also $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$.

Die Eigenräume bzw. Eigenvektoren ergeben sich nun für jeden dieser Eigenwerte $\lambda$ als Lösung des linearen Gleichungssystems $(\lambda E - A)x = 0$, also indem man in die oben bereits berechnete Matrix $\lambda E - A$ den entsprechenden Eigenwert einsetzt und mit dem Gauß-Verfahren wie in Satz 15.33 den Kern dieser Matrix bestimmt. So erhalten wir z. B.

$$\operatorname{Eig}(A, -1) = \operatorname{Ker}(-1E - A) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Lin} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Genauso ergibt sich

$$\operatorname{Eig}(A, 3) = \operatorname{Ker}(3E - A)x = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = \operatorname{Lin} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenvektoren sind jeweils die Vektoren dieser Eigenräume mit Ausnahme des Nullvektors.

Beachte, dass wir hier bei der Rechnung eine gute Kontrolle haben: Wenn wir mit Satz 19.15 einen Eigenwert $\lambda$ berechnet haben und nach Einsetzen dieses Wertes in das lineare Gleichungssystem $(\lambda E - A)x = 0$ als Lösung aber nur den Nullvektor, also keinen Eigenvektor herausbekommen, dann müssen wir irgendwo einen Rechenfehler gemacht haben.

Im Beispiel dieser reellen $2 \times 2$-Matrix $A$ haben wir für den Ausdruck $\det(\lambda E - A)$ eine normierte quadratische Polynomfunktion (siehe Definition 3.18) herausbekommen. Wir wollen nun sehen, dass dies ein allgemeines Resultat ist und wir für eine $n \times n$-Matrix die Nullstellen einer Polynomfunktion vom Grad $n$ berechnen müssen. Damit wir diesen Nullstellen dann auch Vielfachheiten zuordnen können, sollten wir jedoch zunächst voraussetzen, dass der Grundkörper $K$ unendlich viele Elemente hat und wir damit Polynomfunktionen mit Polynomen gleichsetzen können, d. h. einen Koeffizientenvergleich zur Verfügung haben (siehe Lemma 3.22, Notation 3.23 und Satz 3.25). Wir vereinbaren also:

| Im Folgenden (in Kapitel 19 und 20) sei $K$ stets ein Körper mit unendlich vielen Elementen. |
|---|

**Satz und Definition 19.17** (Charakteristisches Polynom)**.** *Für eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist*

$$\chi_A(t) := \det(tE - A)$$

*ein normiertes Polynom vom Grad n. Man nennt es das* ***charakteristische Polynom*** *von A.*

*Die Eigenwerte von A sind nach Satz 19.15 also genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A$.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst mit Induktion über $k = 1, \ldots, n$, dass die Determinante jeder $k \times k$-Teilmatrix $B(t) = (b_{i,j}(t))_{i,j}$ von $tE - A$, die durch Auswahl von $k$ Zeilen und Spalten entsteht, ein Polynom vom Grad höchstens $k$ ist.

$k = 1$: In diesem Fall ist die Behauptung offensichtlich, da alle Einträge von $tE - A$ Polynome vom Grad höchstens 1 sind.

$k \to k+1$: Die Matrix $B(t)$ habe nun die Größe $(k+1) \times (k+1)$. Nach der Laplace-Entwicklung aus Satz 18.15 gilt

$$\det B(t) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} b_{i,1}(t) \det B'_{i,1}(t),$$

wobei $B'_{i,1}(t)$ die $k \times k$-Streichungsmatrix aus Definition 18.11 bezeichnet, bei der aus $B(t)$ die Zeile $i$ und Spalte 1 herausgestrichen wurde. Da hier $b_{i,1}(t)$ als Eintrag von $tE - A$ ein Polynom vom Grad höchstens 1 ist und $\det B'_{i,1}(t)$ nach Induktionsvoraussetzung maximal Grad $k$ hat, ist $\det B(t)$ wie behauptet ein Polynom vom Grad höchstens $k+1$.

Für $k = n$ erhalten wir also, dass $\chi_A(t) = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \cdots + c_1 t + c_0$ (mit $c_0, \ldots, c_n \in K$) ein Polynom vom Grad höchstens $n$ ist. Um hierbei noch den Koeffizienten $c_n$ zu bestimmen, betrachten wir zunächst für $t \neq 0$ den Ausdruck

$$t^n \chi_A\left(\frac{1}{t}\right) = t^n (c_n t^{-n} + c_{n-1} t^{-n+1} + \cdots + c_1 t^{-1} + c_0) = c_n + c_{n-1} t + \cdots + c_1 t^{n-1} + c_0 t^n. \quad (1)$$

Nach Definition des charakteristischen Polynoms können wir ihn auch berechnen durch

$$t^n \chi_A\left(\frac{1}{t}\right) = t^n \det\left(\frac{1}{t} E - A\right) \overset{(*)}{=} \det(E - tA), \quad (2)$$

wobei sich $(*)$ aus der Multilinearität der Determinante gemäß Definition 18.2 (a) ergibt: Multipliziert man jede Zeile der $n \times n$-Matrix $\frac{1}{t} E - A$ mit $t$, um daraus $E - tA$ zu erhalten, so multipliziert sich die Determinante dadurch mit $t^n$.

Die Ausdrücke (1) und (2) stimmen also für alle $t \neq 0$ überein. Da es sich hierbei um ein Polynom handelt, müssen sie damit aber auch für $t = 0$ übereinstimmen; Einsetzen von $t = 0$ liefert damit wie behauptet

$$c_n = \det(E - 0 \cdot A) = \det E = 1. \qquad \square$$

Wir wollen den Eigenwerten einer quadratischen Matrix jetzt Vielfachheiten zuordnen. Hierfür gibt es zwei grundlegend verschiedene Möglichkeiten.

**Definition 19.18** (Vielfachheiten von Eigenwerten)**.** Es seien $A \in K^{n \times n}$ eine quadratische Matrix und $\lambda \in K$.

(a) Die Vielfachheit von $\lambda$ als Nullstelle im charakteristischen Polynom $\chi_A$ (siehe Satz 3.25) heißt die **algebraische** oder **arithmetische Vielfachheit** (oder auch **Multiplizität**) $\mu_a(A, \lambda) \in \mathbb{N}$ von $\lambda$ in $A$.

(b) Die Dimension des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$ heißt die **geometrische Vielfachheit** (oder auch **Multiplizität**) $\mu_g(A, \lambda) \in \mathbb{N}$ von $\lambda$ in $A$.

**Bemerkung 19.19.** Für alle $A \in K^{n \times n}$ und $\lambda \in K$ gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} \mu_a(A, \lambda) > 0 &\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \quad \text{(Satz 19.15)} \\ &\Leftrightarrow \mu_g(A, \lambda) > 0. \end{aligned}$$

Man kann also sowohl an der algebraischen als auch an der geometrischen Vielfachheit von $\lambda$ erkennen, ob $\lambda$ ein Eigenwert von $A$ ist. Wir werden in Beispiel 19.37 (b) aber noch sehen, dass die beiden Vielfachheiten nicht übereinstimmen müssen. Dieses Phänomen und seine Konsequenzen werden wir ausführlich im nächsten Abschnitt sowie in Kapitel 20 untersuchen.

**Beispiel 19.20.** Beide Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

aus Beispiel 19.16 haben algebraische Vielfachheit 1 (da sie einfache Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(t) = (t-3)^1(t+1)^1$ sind) und geometrische Vielfachheit 1 (da wir ihre Eigenräume dort als eindimensional erkannt haben).

Wir wollen nun zeigen, dass das charakteristische Polynom und die Vielfachheiten von Eigenwerten invariant unter Ähnlichkeit von Matrizen sind, und sich diese Konzepte daher analog zu Konstruktion 19.10 auch für Endomorphismen einführen lassen.

**Lemma 19.21** (Invarianz von $\chi$, $\mu_a$ und $\mu_g$ unter Ähnlichkeit)**.** *Sind $A, A' \in K^{n\times n}$ zwei ähnliche Matrizen, so gilt:*

(a) $\chi_{A'} = \chi_A$;

(b) $\mu_a(A', \lambda) = \mu_a(A, \lambda)$ *für alle* $\lambda \in K$;

(c) $\mu_g(A', \lambda) = \mu_g(A, \lambda)$ *für alle* $\lambda \in K$.

*Beweis.* Es sei $T \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit $A' = T^{-1}AT$.

(a) Nach dem Produktsatz 18.6 für Determinanten gilt für alle $t \in K$

$$\chi_{A'}(t) = \det(tE - T^{-1}AT) = \det(T^{-1}(tE - A)T) = \frac{1}{\det T} \cdot \det(tE - A) \cdot \det T = \chi_A(t).$$

(b) Da sich die algebraische Vielfachheit aus dem charakteristischen Polynom ergibt, folgt dies unmittelbar aus (a).

(c) Für alle $x \in K^n$ gilt

$$x \in \mathrm{Eig}(A', \lambda) \;\Leftrightarrow\; T^{-1}ATx = \lambda x \;\Leftrightarrow\; ATx = \lambda Tx \;\Leftrightarrow\; Tx \in \mathrm{Eig}(A, \lambda).$$

Die Abbildung $\mathrm{Eig}(A', \lambda) \to \mathrm{Eig}(A, \lambda),\ x \mapsto Tx$ ist also ein Isomorphismus (mit Umkehrabbildung $x \mapsto T^{-1}x$). Da isomorphe Vektorräume nach Lemma 16.17 (c) die gleiche Dimension haben, folgt also wie behauptet $\mu_g(A', \lambda) = \mu_g(A, \lambda)$. □

**Konstruktion 19.22** ($\chi$, $\mu_a$ und $\mu_g$ für Endomorphismen)**.** Für einen Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums $V$ und $\lambda \in K$ definieren wir

das **charakteristische Polynom** als $\chi_f := \chi_{A_f^B}$,

die **algebraische** oder **arithmetische Vielfachheit** von $\lambda$ als $\mu_a(f, \lambda) := \mu_a(A_f^B, \lambda)$,

und die **geometrische Vielfachheit** von $\lambda$ als $\mu_g(f, \lambda) := \mu_g(A_f^B, \lambda)$

für eine beliebige Basis $B$ von $V$. Da verschiedene Basiswahlen zu ähnlichen Abbildungsmatrizen führen, ist dies nach Lemma 19.21 wohldefiniert. Weil ein $\lambda \in K$ nach Bemerkung 19.12 (c) genau dann ein Eigenwert von $f$ ist, wenn $\lambda$ ein Eigenwert von $A_f^B$ ist, folgt aus Bemerkung 19.19 außerdem

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } f \Leftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \mu_a(f, \lambda) > 0 \Leftrightarrow \mu_g(f, \lambda) > 0,$$

und der zugehörige Eigenraum $\mathrm{Eig}(f, \lambda) = \mathrm{Ker}(\lambda\,\mathrm{id}_V - f)$ kann wie in Bemerkung 16.29 berechnet werden.

Auch die weiteren Konzepte und Ergebnisse in diesem und dem folgenden Kapitel werden auf ähnliche Art jeweils eine Version für quadratische Matrizen und eine für Endomorphismen haben, die letztlich äquivalent zueinander sind. Um Schreibarbeit zu sparen, werden wir in vielen Fällen jedoch jeweils nur die Matrixversion angeben.

**Bemerkung 19.23** (Charakteristisches Polynom für Hörer der „Algebraischen Strukturen“)**.** Falls ihr die Vorlesung „Algebraische Strukturen“ bereits gehört habt und damit den dort eingeführten Polynomring $K[t]$ kennt [G, Kapitel 9], könnt ihr das charakteristische Polynom $\chi_A$ einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ in der Tat auch ohne unsere oben gemachte Voraussetzung $|K| = \infty$ als Polynom (und nicht nur als Polynomfunktion) definieren und damit auch in diesem Fall Eigenwerten algebraische Vielfachheiten zuordnen. Dazu müsst ihr $tE - A$ als Matrix mit Einträgen in $K[t]$, also als Element von $K[t]^{n\times n}$ auffassen und die Determinante auch über diesem Polynomring als Abbildung

$\det\colon K[t]^{n\times n} \to K[t]$ konstruieren (was problemlos möglich ist, da hierfür keine Divisionen benötigt werden). Damit wird dann $\chi_A(t) = \det(tE - A)$ wie gewünscht ein Element des Polynomrings $K[t]$.

Verwendet man diese Konstruktion des charakteristischen Polynoms und damit auch der algebraischen Vielfachheiten von Eigenwerten, so sind alle Resultate in diesem und dem nächsten Kapitel ohne irgendwelche Änderungen auch ohne unsere Voraussetzung $|K| = \infty$, also für beliebige Grundkörper gültig.

**Aufgabe 19.24.** Zeige für jede quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$:

(a) Ist $A$ invertierbar und $\lambda$ ein Eigenwert von $A$, so ist $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von $A^{-1}$, und es gilt $\mu_{\mathrm{g}}(A^{-1}, \frac{1}{\lambda}) = \mu_{\mathrm{g}}(A,\lambda)$ und $\mu_{\mathrm{a}}(A^{-1}, \frac{1}{\lambda}) = \mu_{\mathrm{a}}(A,\lambda)$.

(b) Ist jeder Vektor in $K^n\backslash\{0\}$ ein Eigenvektor von $A$, so ist $A$ ein Vielfaches der Einheitsmatrix.

**Aufgabe 19.25.** Es seien $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums $V$ und $U$ ein Unterraum mit $f(U) \subset U$. Nach Aufgabe 17.24 (b) gibt es dann zugehörige lineare Abbildungen $g\colon U \to U$, $x \mapsto f(x)$ und $h\colon V/U \to V/U$, $\bar{x} \mapsto \overline{f(x)}$. Man zeige:

(a) Ergänzen wir eine Basis $B' = (x_1,\dots,x_k)$ von $U$ zu einer Basis $B = (x_1,\dots,x_n)$ von $V$, so dass $B'' = (\overline{x_{k+1}},\dots,\overline{x_n})$ nach Bemerkung 17.21 also eine Basis von $V/U$ ist, so ist die Abbildungsmatrix von $f$ bezüglich $B$ von der Form

$$A_f^B = \left(\begin{array}{c|c} A_g^{B'} & * \\ \hline 0 & A_h^{B''} \end{array}\right).$$

(b) Es gilt $\chi_f = \chi_g \cdot \chi_h$.

**Aufgabe 19.26.** Es seien $A, B \in K^{n\times n}$. Zeige, dass die Matrizen $AB$ und $BA$ das gleiche charakteristische Polynom haben.

(Hinweis: Zeige die Aussage zunächst, wenn eine der Matrizen invertierbar ist, dann wenn eine der Matrizen von der Form

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist, und schließlich im allgemeinen Fall.)

## 19.C Diagonalisierbarkeit

Nach den Vorarbeiten im letzten Abschnitt wollen wir uns nun wieder unserem ursprünglichen Problem widmen, zu einer gegebenen Matrix eine möglichst einfache ähnliche Matrix bzw. zu einem gegebenen Endomorphismus eine möglichst einfache Abbildungsmatrix zu finden. Das folgende einfache aber zentrale Lemma zeigt dabei deutlich, warum diese Frage unmittelbar mit Eigenwerten und Eigenvektoren zusammenhängt. Da es so wichtig ist, formulieren wir es sowohl in der Sprache der ähnlichen Matrizen als auch in der Sprache der Endomorphismen, obwohl diese beiden Versionen eigentlich dieselbe Aussage darstellen.

**Lemma 19.27** (Abbildungsmatrizen und Eigenvektoren)**.**

(a) *Es seien $A \in K^{n\times n}$, $T \in \mathrm{GL}(n,K)$, sowie $A' = T^{-1}AT$, so dass $A$ und $A'$ also ähnlich zueinander sind. Ferner seien $k \in \{1,\dots,n\}$ und $\lambda \in K$.*

*Dann ist die $k$-te Spalte von $A'$ genau dann gleich $\lambda e_k$ (hat also in der $k$-ten Zeile den Eintrag $\lambda$ und sonst nur Nullen), wenn die $k$-te Spalte der Transformationsmatrix $T$ ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $\lambda$ ist.*

(b) *Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen $K$-Vektorraums $V$ mit Basis $B = (x_1,\dots,x_n)$. Ferner seien wieder $k \in \{1,\dots,n\}$ und $\lambda \in K$.*

*Dann ist die $k$-te Spalte der Abbildungsmatrix $A_f^B$ genau dann gleich $\lambda e_k$, wenn der $k$-te Basisvektor $x_k$ ein Eigenvektor von $f$ zum Eigenwert $\lambda$ ist.*

*Beweis.*

(a) Die $k$-te Spalte von $A'$ ist gleich $A'e_k = T^{-1}ATe_k$. Diese ist also genau dann gleich $\lambda e_k$, wenn

$$T^{-1}ATe_k = \lambda e_k \overset{T\cdot}{\iff} A(Te_k) = \lambda(Te_k)$$

gilt, also wenn die $k$-te Spalte $Te_k$ von $T$ ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $\lambda$ ist.

(b) Nach Bemerkung 19.1 (a) ist die $k$-te Spalte von $A_f^B$ gleich $\Phi_B(f(x_k))$. Da $\Phi_B$ ein Isomorphismus ist, ist dieser Ausdruck genau dann gleich $\lambda e_k = \Phi_B(\lambda x_k)$, wenn $f(x_k) = \lambda x_k$ gilt, also $x_k$ ein Eigenvektor von $f$ zum Eigenwert $\lambda$ ist. □

**Beispiel 19.28.** Es sei noch einmal

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

die Matrix aus Beispiel 19.16. Wir hatten dort bereits gesehen, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von $A$ zu den Eigenwerten $-1$ bzw. 3 sind. Offensichtlich sind diese beiden Vektoren linear unabhängig. Schreiben wir sie also als Spalten in eine Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

so ist diese Matrix invertierbar, und Lemma 19.27 (a) sagt uns ohne weitere Rechnung, dass die beiden Spalten der transformierten Matrix $T^{-1}AT$ genau $-1\,e_1$ und $3\,e_2$ sind, d. h. dass

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

gilt. Natürlich könnte man dies nun durch explizite Berechnung der inversen Matrix $T^{-1}$ und des Matrixprodukts $T^{-1}AT$ auch direkt überprüfen.

Da in diesem Beispiel in jeder Spalte von $T$ ein Eigenvektor steht, haben wir also gemäß Lemma 19.27 (a) eine transformierte Matrix erhalten, deren $k$-te Spalte für alle $k$ ein Vielfaches von $e_k$ ist, die also nur auf der Diagonale Einträge ungleich 0 hat. Dieses Prinzip wollen wir nun allgemein festhalten.

**Definition 19.29** (Diagonalmatrizen und Diagonalisierbarkeit)**.**

(a) Eine quadratische Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{n\times n}$ heißt **Diagonalmatrix**, wenn $a_{i,j} = 0$ für alle $i \neq j$ gilt, also wenn $A$ höchstens auf der Diagonale Einträge ungleich Null hat. Um Platz zu sparen, schreiben wir eine solche Diagonalmatrix oft als $\operatorname{diag}(a_{1,1},\dots,a_{n,n})$.

(b) Eine quadratische Matrix heißt **diagonalisierbar**, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines endlich erzeugten Vektorraums $V$ heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis $B$ von $V$ gibt, so dass die zugehörige Abbildungsmatrix $A_f^B$ eine Diagonalmatrix ist.

43

**Folgerung 19.30** (Diagonalisierbarkeit = Basis aus Eigenvektoren)**.** *Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis $(x_1,\dots,x_n)$ von $K^n$ aus Eigenvektoren von $A$ gibt.*

*Sind in diesem Fall $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte von $x_1,\dots,x_n$, so gilt*

$$T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

*mit $T := (x_1 \mid \cdots \mid x_n) \in \mathrm{GL}(n,K)$.*

*Beweis.* Beachte, dass die Matrix $T$ nach Definition 15.17 genau dann invertierbar ist, wenn sie Rang $n$ hat, also wenn ihre Spalten linear unabhängig sind und damit eine Basis von $K^n$ bilden. Da die Matrix $T^{-1}AT$ genau dann eine Diagonalmatrix ist, wenn ihre $k$-te Spalte für alle $k = 1,\dots,n$ ein Vielfaches von $e_k$ ist, ergibt sich die Aussage der Folgerung damit unmittelbar aus Lemma 19.27 (a), angewendet auf jede Spalte von $T$. □

**Bemerkung 19.31.** Natürlich erhalten wir auch hier wieder eine analoge Aussage für Endomorphismen mit Lemma 19.27 (b): Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis $B = (x_1, \ldots, x_n)$ aus Eigenvektoren von $V$ gibt, und in diesem Fall ist dann $A_f^B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die zu $x_1, \ldots, x_n$ gehörigen Eigenwerte sind.

**Beispiel 19.32.**

(a) Die Matrix aus Beispiel 19.28 ist diagonalisierbar.

(b) Eine allgemeine Drehmatrix wie in Beispiel 19.13 (c) ist dagegen nicht diagonalisierbar, da sie keine Eigenvektoren (und damit insbesondere keine Basis aus Eigenvektoren) besitzt.

Als Erstes wollen wir nun zeigen, dass für diagonalisierbare Matrizen eine Diagonalmatrix mit beliebigen Einträgen auf der Diagonale wirklich die einfachste mögliche ähnliche Matrix ist, also dass keine zwei solchen Diagonalmatrizen mehr ähnlich zueinander sein können. Wir können eine solche Diagonalform in diesem Fall also als Normalform bezüglich Ähnlichkeit auffassen.

**Lemma 19.33.** *Zwei Diagonalmatrizen sind genau dann ähnlich zueinander, wenn ihre Diagonaleinträge bis auf die Reihenfolge übereinstimmen.*

*Beweis.* Wir betrachten zwei Diagonalmatrizen $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ und $B = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

„⇒“: Es sei $A$ ähnlich zu $B$. Beachte, dass

$$\chi_A(t) = \det \operatorname{diag}(t - \lambda_1, \ldots, t - \lambda_n) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$$

und analog $\chi_B(t) = (t - \mu_1) \cdots (t - \mu_n)$. Nach Lemma 19.21 (a) gilt nun aber $\chi_A = \chi_B$, und wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung von Polynomen in Faktoren aus Satz 3.25 bedeutet dies gerade, dass die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ bis auf die Reihenfolge mit $\mu_1, \ldots, \mu_n$ übereinstimmen.

„⇐“: Es seien nun $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ bis auf die Reihenfolge gleich $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Wegen der Diagonalform von $A$ sind die Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n$ offensichtlich Eigenvektoren von $A$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Es seien nun $x_1, \ldots, x_n$ diese Einheitsvektoren so durchnummeriert, dass $Ax_i = \mu_i x_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Mit $T = (x_1 \mid \cdots \mid x_n)$ ist dann $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) = B$ nach Lemma 19.27 (a), d. h. $A$ und $B$ sind ähnlich zueinander. □

**Folgerung 19.34.** *Zwei diagonalisierbare Matrizen sind genau dann ähnlich zueinander, wenn ihre charakteristischen Polynome übereinstimmen.*

*Beweis.* Es seien $A, B \in K^{n \times n}$ diagonalisierbar, mit $A$ ähnlich zu $A' = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ und $B$ ähnlich zu $B' = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

„⇒“: Sind $A$ und $B$ ähnlich, so gilt $\chi_A = \chi_B$ nach Lemma 19.21 (a).

„⇐“: Es sei nun $\chi_A = \chi_B$, nach Lemma 19.21 (a) also auch

$$(t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n) = \chi_{A'}(t) = \chi_A(t) = \chi_B(t) = \chi_{B'}(t) = (t - \mu_1) \cdots (t - \mu_n).$$

Also stimmen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$ nach Satz 3.25 bis auf die Reihenfolge überein. Damit ist $A'$ nach Lemma 19.33 ähnlich zu $B'$, und folglich auch $A$ zu $B$. □

Im Rest dieses Kapitels wollen wir nun noch einfache Kriterien für die Diagonalisierbarkeit einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ herleiten. Nach Folgerung 19.30 müssen wir ja herausfinden, ob es eine Basis von $K^n$ aus Eigenvektoren von $A$ gibt. Um eine solche Basis zu finden, werden wir offensichtlich zunächst einmal aus jedem Eigenraum $\operatorname{Eig}(A, \lambda)$ maximal viele linear unabhängige Vektoren wählen, also $\mu_g(A, \lambda)$ Stück. Wir müssen uns nun fragen:

(A) Wie viele Vektoren bekommen wir auf diese Art insgesamt? (Wir bräuchten $n$, um eine Basis von $K^n$ erhalten zu können.)

(B) Sind *alle diese Vektoren zusammen* wirklich linear unabhängig? (Wir wissen zunächst nur, dass die ausgewählten Vektoren innerhalb eines Eigenraums linear unabhängig sind.)

Wir werden im Folgenden sehen, dass (A) wirklich eine Bedingung an die Matrix $A$ stellt (siehe Folgerung 19.36), während (B) für jede Matrix erfüllt ist (siehe Folgerung 19.39).

Um die Bedingung (A) genauer zu untersuchen, benötigen wir zunächst einmal einen wichtigen Zusammenhang zwischen der geometrischen und algebraischen Vielfachheit eines Eigenwerts.

**Satz 19.35.** *Für jede Matrix $A \in K^{n\times n}$ und alle $\lambda \in K$ gilt $\mu_g(A,\lambda) \leq \mu_a(A,\lambda)$.*

*Beweis.* Es sei $k = \mu_g(A,\lambda)$. Wir wählen eine Basis $(x_1,\dots,x_k)$ von $\operatorname{Eig}(A,\lambda)$, ergänzen diese zu einer Basis $(x_1,\dots,x_n)$ von $K^n$, und schreiben diese Vektoren als Spalten in eine Matrix $T = (x_1 \,|\, \cdots \,|\, x_n)$.

Nach Lemma 19.27 (a) ist die $i$-te Spalte von $A' := T^{-1}AT$ dann gleich $\lambda e_i$ für alle $i = 1,\dots,k$, d. h. es ist

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \lambda E_k & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

für eine Matrix $B \in K^{(n-k)\times(n-k)}$. Damit folgt nach Lemma 19.21 (a) und Aufgabe 18.20

$$\chi_A(t) = \chi_{A'}(t) = \det\left(\begin{array}{c|c} (t-\lambda)E_k & * \\ \hline 0 & tE-B \end{array}\right) = (t-\lambda)^k \chi_B(t),$$

d. h. die Vielfachheit $\mu_a(A,\lambda)$ von $\lambda$ als Nullstelle in $\chi_A$ ist mindestens gleich $k = \mu_g(A,\lambda)$. □

Hieraus ergeben sich nun die folgenden notwendigen Kriterien für Diagonalisierbarkeit (von denen wir in der Tat in Folgerung 19.40 noch sehen werden, dass sie sogar äquivalent zur Diagonalisierbarkeit sind).

**Folgerung 19.36** (Notwendige Kriterien für Diagonalisierbarkeit)**.** *Ist eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ diagonalisierbar, so muss gelten:*

(a) *Das charakteristische Polynom $\chi_A$ zerfällt in Linearfaktoren.*

(b) *Für alle Eigenwerte $\lambda$ von $A$ gilt $\mu_g(A,\lambda) = \mu_a(A,\lambda)$.*

*Beweis.* Nach Satz 3.25 können wir das charakteristische Polynom von $A$ schreiben als

$$\chi_A(t) = g(t)\cdot(t-\lambda_1)^{\mu_a(A,\lambda_1)}\cdots(t-\lambda_k)^{\mu_a(A,\lambda_k)}, \tag{1}$$

wobei $g$ ein Polynom ohne Nullstellen ist und $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von $A$ sind. Da $\chi_A$ nach Satz 19.17 Grad $n$ hat, folgt daraus insbesondere

$$\mu_a(A,\lambda_1) + \cdots + \mu_a(A,\lambda_k) \leq n. \tag{2}$$

Um nun gemäß Folgerung 19.30 eine Basis von $K^n$ aus Eigenvektoren von $A$ zu finden, können wir aus jedem Eigenraum $\operatorname{Eig}(A,\lambda_i)$ für $i = 1,\dots,k$ maximal $\mu_g(A,\lambda_i) = \dim\operatorname{Eig}(A,\lambda_i)$ Vektoren wählen. Die Anzahl der so insgesamt gefundenen Vektoren ist also

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_g(A,\lambda_i) \overset{19.35}{\leq} \sum_{i=1}^{k} \mu_a(A,\lambda_i) \overset{(2)}{\leq} n.$$

Da wir für eine Basis von $K^n$ aber $n$ Vektoren benötigen, muss hier im Fall einer diagonalisierbaren Matrix an beiden Stellen die Gleichheit gelten. An der ersten Stelle ergibt dies genau die Bedingung $\mu_g(A,\lambda_i) = \mu_a(A,\lambda_i)$ für alle $i$; an der zweiten erhalten wir, dass das Polynom $g$ in (1) Grad 0 haben und $\chi_A$ damit in Linearfaktoren zerfallen muss. □

**Beispiel 19.37.**

(a) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

hat das charakteristische Polynom

$$\chi_A(t) = \det\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} = t^2 + 1,$$

das über $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren zerfällt. Also ist $A$ nach Folgerung 19.36 (a) nicht diagonalisierbar. In der Tat ist $A$ auch genau die Drehmatrix um den Winkel $\frac{\pi}{2}$, von der wir in Beispiel 19.32 (b) bereits gesehen haben, dass sie nicht diagonalisierbar ist.

(b) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

hat das charakteristische Polynom

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} t & -1 \\ 0 & t \end{pmatrix} = t^2$$

mit doppelter Nullstelle 0. Also ist 0 ein Eigenwert von $A$ mit $\mu_a(A,0) = 2$. Der zugehörige Eigenraum

$$\mathrm{Eig}(A,0) = \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Lin}(e_1)$$

ist aber nur eindimensional. Es ist also $\mu_g(A,0) = 1 < \mu_a(A,0)$, und damit ist $A$ nach Folgerung 19.36 (b) nicht diagonalisierbar.

Beachte, dass dieses Beispiel auch zeigt, dass Folgerung 19.34 für beliebige Matrizen falsch ist: Auch die Nullmatrix hat das charakteristische Polynom $\chi_0(t) = \det(tE) = t^2$, aber $A$ ist sicher nicht zur Nullmatrix ähnlich, da es kein $T \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ geben kann mit $T^{-1} \cdot 0 \cdot T = A$.

Wenn die Bedingungen aus Folgerung 19.36 erfüllt sind, haben wir jetzt gesehen, dass wir insgesamt wirklich $n$ Vektoren erhalten, wenn wir Basen aller Eigenräume einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ berechnen. Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass diese Vektoren wirklich auch zusammen genommen linear unabhängig sind, damit sie dann eine Basis von $K^n$ bilden.

**Satz 19.38** (Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren)**.** *Es seien $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix und $x_1,\dots,x_k$ Eigenvektoren von $A$ zu verschiedenen Eigenwerten. Dann sind $x_1,\dots,x_k$ linear unabhängig.*

*Beweis.* Wir beweisen den Satz mit Induktion über $k$. Für $k = 1$ ist die Aussage klar, denn ein Eigenvektor ist nach Definition immer ungleich dem Nullvektor und damit linear unabhängig.

Für den Induktionsschritt $k \to k+1$ nehmen wir nun an, dass wir die Aussage des Satzes für $k$ Vektoren schon gezeigt haben. Es seien nun $x_1,\dots,x_{k+1}$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1,\dots,\lambda_{k+1}$ von $A$. Angenommen, wir haben eine Linearkombination des Nullvektors

$$\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_{k+1} x_{k+1} = 0 \qquad (*)$$

für gewisse $\mu_1,\dots,\mu_{k+1} \in K$. Multiplizieren wir diese Gleichung von links mit der Matrix $A$, so erhalten wir wegen $Ax_i = \lambda_i x_i$ für alle $i$

$$\mu_1\lambda_1 x_1 + \cdots + \mu_{k+1}\lambda_{k+1} x_{k+1} = 0.$$

Multiplizieren wir dieselbe Gleichung stattdessen mit dem Skalar $\lambda_{k+1}$, so ergibt sich hingegen

$$\mu_1\lambda_{k+1} x_1 + \cdots + \mu_{k+1}\lambda_{k+1} x_{k+1} = 0.$$

Wir subtrahieren nun die letzten beiden Gleichungen voneinander und erhalten so

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})x_1 + \cdots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})x_k = 0.$$

Dies ist eine Linearkombination des Nullvektors von $k$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten. Nach Induktionsvoraussetzung müssen also alle Vorfaktoren Null sein, d. h. es ist

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = \cdots = \mu_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0.$$

Da aber alle Eigenwerte $\lambda_1,\dots,\lambda_{k+1}$ verschieden sind, folgt daraus $\mu_1 = \cdots = \mu_k = 0$, und damit eingesetzt in $(*)$ natürlich auch $\mu_{k+1} = 0$. Also sind $x_1,\dots,x_{k+1}$ linear unabhängig. □

**Folgerung 19.39** (Die Summe von Eigenräumen ist direkt)**.** *Es seien $A \in K^{n\times n}$ und $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ verschiedene Eigenwerte von $A$. Dann ist die Summe*

$$\operatorname{Eig}(A,\lambda_1)+\dots+\operatorname{Eig}(A,\lambda_k)$$

*direkt (siehe Definition 17.2).*

*Beweis.* Dies ist letztlich nur eine Umformulierung von Satz 19.38. Haben wir nämlich zwei Darstellungen eines Vektors in der gegebenen Summe

$$x_1+\dots+x_k = y_1+\dots+y_k$$

mit $x_i, y_i \in \operatorname{Eig}(A,\lambda_i)$ für alle $i = 1,\dots,k$, so bedeutet dies ja

$$\underbrace{x_1-y_1}_{\in\operatorname{Eig}(A,\lambda_1)}+\dots+\underbrace{x_k-y_k}_{\in\operatorname{Eig}(A,\lambda_k)} = 0.$$

Nun ist der Eigenraum $\operatorname{Eig}(A,\lambda_i)$ für alle $i = 1,\dots,k$ nach Definition 19.11 (b) aber gerade der Nullvektor zusammen mit allen Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_i$. Wäre in der obigen Gleichung also einer der Vektoren $x_i - y_i$ nicht gleich dem Nullvektor, so wäre er ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_i$, und wir hätten somit eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors aus Eigenvektoren von $A$ zu verschiedenen Eigenwerten – im Widerspruch zu Satz 19.38. Also gilt $x_i = y_i$ für alle $i = 1,\dots,k$, d. h. die Summe der Eigenräume ist direkt. □

Wir können nun unsere Ergebnisse zur Diagonalisierbarkeit zusammenfassen:

**Folgerung 19.40** (Diagonalisierbarkeit)**.** *Für eine quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$ sind äquivalent:*

(a) *$A$ ist diagonalisierbar.*

(b) *Das charakteristische Polynom $\chi_A$ zerfällt in Linearfaktoren, und es gilt $\mu_g(A,\lambda) = \mu_a(A,\lambda)$ für alle Eigenwerte $\lambda$ von $A$.*

(c) *Sind $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von $A$, so ist $\operatorname{Eig}(A,\lambda_1)\oplus\dots\oplus\operatorname{Eig}(A,\lambda_k) = K^n$.*

*Bestimmt man in diesem Fall eine Basis jedes Eigenraums und nimmt alle diese Vektoren zusammen, so erhält man eine Basis von $K^n$. Schreibt man diese Vektoren als Spalten in eine Matrix $T$, so ist $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix mit den zugehörigen Eigenwerten auf der Diagonale.*

*Beweis.*

„(a) ⇒ (b)“: Dies ist genau Folgerung 19.36.

„(b) ⇒ (c)“: Nach Folgerung 19.39 ist die Summe der Eigenräume direkt. Also folgt aus der Voraussetzung mit Lemma 17.3

$$\dim(\operatorname{Eig}(A,\lambda_1)\oplus\dots\oplus\operatorname{Eig}(A,\lambda_k)) = \sum_{i=1}^{k}\dim\operatorname{Eig}(A,\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k}\mu_g(A,\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k}\mu_a(A,\lambda_i) = n,$$

und damit $\operatorname{Eig}(A,\lambda_1)\oplus\dots\oplus\operatorname{Eig}(A,\lambda_k) = K^n$.

„(c) ⇒ (a)“: Ist $\operatorname{Eig}(A,\lambda_1)\oplus\dots\oplus\operatorname{Eig}(A,\lambda_k) = K^n$, so erhalten wir nach Aufgabe 17.7 eine Basis von $K^n$, indem wir Basen der einzelnen Eigenräume zusammen nehmen. Da diese Basis dann natürlich aus Eigenvektoren zu den zugehörigen Eigenwerten besteht, folgt die zu zeigende Aussage damit aus Folgerung 19.30. □

**Bemerkung 19.41.**

(a) Ist ein Eigenwert $\lambda$ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_A$ einer quadratischen Matrix $A$, ist also $\mu_a(A,\lambda) = 1$, so folgt aus Satz 19.35 für diesen Eigenwert auch unmittelbar $\mu_g(A,\lambda) = 1$. Im Kriterium (b) von Folgerung 19.40 muss man die Bedingung $\mu_g(A,\lambda) = \mu_a(A,\lambda)$ für diesen Eigenwert also nicht mehr überprüfen. Zerfällt $\chi_A$ also z. B. in paarweise verschiedene Linearfaktoren, so ist $A$ damit stets diagonalisierbar.

Im Fall des Körpers $K = \mathbb{C}$ zerfällt außerdem *jedes* Polynom nach dem Fundamentalsatz der Algebra (siehe Satz 6.11) in Linearfaktoren. Hat ein solches Polynom „zufällig gewählte Koeffizienten“, so können wir erwarten, dass diese Linearfaktoren auch alle verschieden sind.

Ohne dass wir dies hier zu einer mathematisch exakten Aussage machen wollen, können wir anschaulich also sagen, dass eine „zufällig gewählte komplexe Matrix“ diagonalisierbar ist.

(b) Wie bei unseren vorherigen Ergebnissen in diesem Kapitel gibt es natürlich auch zu Folgerung 19.40 eine analoge Version für Endomorphismen, deren Formulierung (und Beweis) offensichtlich sein sollte.

**Beispiel 19.42.** Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Das charakteristische Polynom von $A$ berechnet sich als Determinante einer unteren Dreiecksmatrix nach Folgerung 18.18 zu

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 0 \\ -1 & 1 & t \end{pmatrix} = (t-1)^2 t.$$

Es zerfällt also in Linearfaktoren und hat als Nullstellen die beiden Eigenwerte 1 (mit $\mu_a(A,1) = 2$) und 0 (mit $\mu_a(A,0) = 1$). Um herauszufinden, ob $A$ diagonalisierbar ist, müssen wir nach Folgerung 19.40 und Bemerkung 19.41 also nur noch überprüfen, ob $\mu_g(A,1) = 2$ gilt. Dazu berechnen wir den Eigenraum

$$\mathrm{Eig}(A,1) = \mathrm{Ker}(E-A) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Lin}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Da dieser Raum zweidimensional ist, ist $\mu_g(A,1) = 2 = \mu_a(A,1)$, und $A$ ist nach Folgerung 19.40 diagonalisierbar.

Um eine Matrix $T$ zu bestimmen, so dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist, müssen wir auch vom anderen Eigenraum $\mathrm{Eig}(A,0)$ eine Basis bestimmen: Man sieht hier sofort, dass der dritte Einheitsvektor ein Element von $\mathrm{Eig}(A,0) = \mathrm{Ker}\, A$ und somit eine Basis dieses eindimensionalen Eigenraums ist. Wir brauchen nach Folgerung 19.40 also nur noch die drei gefundenen Vektoren als Spalten in die Matrix $T$ zu schreiben, und erhalten somit

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(was man natürlich durch direktes Nachrechnen auch überprüfen könnte).

**Aufgabe 19.43.** Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A$ und $B$ mit ihren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

(b) Welche dieser Matrizen ist / sind diagonalisierbar? Im Fall der Diagonalisierbarkeit bestimme man jeweils eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$, so dass $T^{-1}AT$ bzw. $T^{-1}BT$ eine Diagonalmatrix ist.

(c) Sind $A$ und $B$ ähnlich zueinander?

(d) Wie kann man mit Hilfe von (a) auf einfache Art eine allgemeine Formel für die Potenzen $A^n$ für $n \in \mathbb{N}$ bestimmen?

**Aufgabe 19.44.** Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ A \mapsto A^{\mathsf{T}}.$$

Ist $f$ diagonalisierbar? Falls ja, bestimme man eine Basis $B$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass die zugehörige Abbildungsmatrix $A_f^B$ von $f$ eine Diagonalmatrix ist, und gebe diese Abbildungsmatrix an.

**Aufgabe 19.45.**

(a) Es seien $V = C^0(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ und $f\colon V \to V$ die lineare Abbildung mit $f(\varphi)(x) = \varphi(x+1)$. Bestimme alle Eigenwerte von $f$.

(b) Es seien $V = \mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$ und $f\colon V \to V$ wieder die lineare Abbildung mit $f(\varphi)(x) = \varphi(x+1)$. Bestimme alle Eigenwerte von $f$.

**Aufgabe 19.46.**

(a) Ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, deren Einträge alle gleich 1 sind, diagonalisierbar? Falls ja, zu welcher Diagonalmatrix ist $A$ ähnlich?

(b) Es seien $V$ ein $K$-Vektorraum mit Basis $(x_1,\dots,x_n)$ und $f\colon V \to V$ der Endomorphismus mit

$$f(x_i) = x_{i+1} \quad \text{für } i = 1,\dots,n-1 \quad \text{und} \quad f(x_n) = x_1,$$

der also die Basisvektoren zyklisch permutiert.

Untersuche $f$ in den Fällen $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$ in Abhängigkeit von $n$ auf Diagonalisierbarkeit, und gib ggfs. an, welche Diagonalmatrix bei geeigneter Basiswahl die Abbildungsmatrix von $f$ sein kann.

**Aufgabe 19.47.** Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle quadratische Matrix.

(a) Man zeige: $A$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn $A^\mathsf{T}$ diagonalisierbar ist.

(b) Es sei $\chi_A(t) = t^3 - 4t^2 + 3t$. Berechne $\chi_{A^2}$.

**Aufgabe 19.48.** Zu einem Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines endlich erzeugten $\mathbb{R}$-Vektorraums gebe es $x, y \in V\setminus\{0\}$ mit $f(x) = y$ und $f(y) = -x$.

Zeige, dass $f$ dann nicht diagonalisierbar ist.

**Aufgabe 19.49.** Es seien $f,g\colon V \to V$ zwei diagonalisierbare Endomorphismen eines endlichdimensionalen $K$-Vektorraums $V$, so dass $f \circ g = g \circ f$. Wir bezeichnen die (verschiedenen) Eigenwerte von $f$ und $g$ mit $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ bzw. $\mu_1,\dots,\mu_l$. Man zeige:

(a) $g(\mathrm{Eig}(f,\lambda_i)) \subset \mathrm{Eig}(f,\lambda_i)$ für alle $i = 1,\dots,k$;

(b) $\mathrm{Eig}(g,\mu_j) = (\mathrm{Eig}(f,\lambda_1) \cap \mathrm{Eig}(g,\mu_j)) \oplus \dots \oplus (\mathrm{Eig}(f,\lambda_k) \cap \mathrm{Eig}(g,\mu_j))$ für alle $j = 1,\dots,l$;

(c) es gibt eine Basis $B$ von $V$, so dass sowohl $A_f^B$ als auch $A_g^B$ eine Diagonalmatrix ist (d. h. $f$ und $g$ sind mit der gleichen Basis diagonalisierbar).

44

# 20. Die Jordansche Normalform

Im letzten Kapitel haben wir bereits ausführlich untersucht, wie man zu einer gegebenen quadratischen Matrix $A \in K^{n\times n}$ eine möglichst einfache ähnliche Matrix finden kann (bzw. wie man zu einem Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums $V$ eine Basis $B$ von $V$ finden kann, so dass die zugehörige Abbildungsmatrix $A_f^B$ möglichst einfach wird). Wir haben dabei in Folgerung 19.40 gesehen, dass $A$ genau unter den Bedingungen

(a) $\chi_A$ zerfällt in Linearfaktoren, und

(b) $\mu_g(A,\lambda) = \mu_a(A,\lambda)$ für alle Eigenwerte $\lambda$

diagonalisierbar, also zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist, und dass eine solche Diagonalform in diesem Fall auch das bestmögliche Ergebnis ist (siehe Lemma 19.33). Wir wollen uns in diesem Kapitel nun anschauen, was wir erreichen können, wenn eine der beiden obigen Bedingungen nicht erfüllt ist (und $A$ nach Folgerung 19.40 damit nicht diagonalisierbar ist).

Die Bedingung (a), dass das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, ist dabei eher harmlos. Ist dies nämlich z. B. bei einer reellen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nicht der Fall, so können wir $A$ einfach als *komplexe* Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ auffassen. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (siehe Satz 6.11) zerfällt $\chi_A$ dann zumindest über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren, und somit können wir wieder eine Diagonalform erreichen (wenn auch mit komplexen Eigenwerten und Eigenvektoren). So war z. B. die Matrix $A$ aus Beispiel 19.37 (a) mit charakteristischem Polynom $\chi_A(t) = t^2+1$ zwar über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar, über $\mathbb{C}$ ist aber $\chi_A(t) = (t+\mathrm{i})(t-\mathrm{i})$ und $A$ damit diagonalisierbar nach Bemerkung 19.41 (a).

Wie in der Vorlesung „Einführung in die Algebra“ des zweiten Studienjahres gezeigt wird, lässt sich dieser Trick nicht nur für reelle Matrizen, sondern über jedem Grundkörper $K$ anwenden: Man kann stets zu einem größeren Körper übergehen, in dem das charakteristische Polynom dann in Linearfaktoren zerfällt. Das Problem eines nicht zerfallenden charakteristischen Polynoms ist also recht einfach zu beheben, und daher wollen wir hier auch nicht mehr weiter darauf eingehen. Wir werden in diesem Kapitel in der Regel also Matrizen betrachten, deren charakteristisches Polynom zwar in Linearfaktoren zerfällt, für die aber i. A. nicht die Bedingung (b) oben gilt, und wollen wiederum nach einer möglichst einfachen ähnlichen Matrix suchen. Nach Satz 19.35 bedeutet dies dann $\mu_g(A,\lambda) < \mu_a(A,\lambda)$ für einen Eigenwert $\lambda$ von $A$.

## 20.A Haupträume

Es sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Nach Lemma 19.27 (a) ist $A$ genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis von $K^n$ aus Eigenvektoren von $A$ gibt – diese können wir dann als Spalten in eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(n,K)$ schreiben, und erhalten für $T^{-1}AT$ eine Diagonalform.

Ist nun $\mu_g(A,\lambda) < \mu_a(A,\lambda)$ für mindestens einen Eigenwert $\lambda$ von $A$, so haben wir im Beweis von Folgerung 19.36 gezeigt, dass wir nicht genug linear unabhängige Eigenvektoren für eine solche Basis finden. Unsere Strategie wird es in diesem Fall daher sein, den Begriff der Eigenvektoren etwas zu verallgemeinern, so dass einerseits von diesen verallgemeinerten Eigenvektoren stets genügend viele existieren, um aus ihnen eine Basis von $K^n$ zusammenstellen und in eine invertierbare Matrix $T$ schreiben zu können, und andererseits die transformierte Matrix $T^{-1}AT$ auch im Fall einer Basis aus derartigen verallgemeinerten Eigenvektoren noch recht einfach ist. Die Idee hierfür ist, statt Eigenvektoren, also Vektoren $x \neq 0$ mit $(\lambda E - A)x = 0$, nun solche zu betrachten, für die zumindest $(\lambda E - A)^r x = 0$ für irgendein $r \in \mathbb{N}$ gilt.

**Konstruktion 20.1** (Haupträume)**.** Es seien $A \in K^{n\times n}$ und $\lambda \in K$.

(a) Für $r \in \mathbb{N}$ heißt

$$H_r(A,\lambda) := \operatorname{Ker}((\lambda E - A)^r) \quad \leq K^n$$

der **verallgemeinerte Eigenraum** der Stufe $r$ von $A$ zu $\lambda$.

Offensichtlich ist $H_0(A,\lambda) = \operatorname{Ker} E = \{0\}$ und $H_1(A,\lambda) = \operatorname{Eig}(A,\lambda)$.

(b) Die verallgemeinerten Eigenräume bilden eine aufsteigende Kette

$$\{0\} = H_0(A,\lambda) \leq H_1(A,\lambda) \leq H_2(A,\lambda) \leq \cdots$$

von Unterräumen von $K^n$: Ist nämlich $x \in H_r(A,\lambda)$ für ein $r \in \mathbb{N}$, also $(\lambda E - A)^r x = 0$, so ist natürlich auch $(\lambda E - A)^{r+1} x = (\lambda E - A)(\lambda E - A)^r x = 0$ und damit $x \in H_{r+1}(A,\lambda)$. Die Dimensionen der verallgemeinerten Eigenräume sind also monoton wachsend, können aber natürlich nicht größer als die Dimension $n$ des umgebenden Raumes werden. Es muss also ein $r \in \mathbb{N}$ geben mit

$$H_r(A,\lambda) = H_{r+1}(A,\lambda) = H_{r+2}(A,\lambda) = \cdots \quad =: H(A,\lambda).$$

Dieser Unterraum $H(A,\lambda)$, den wir uns also als „Grenzwert der verallgemeinerten Eigenräume $H_r(A,\lambda)$ für $r \to \infty$“ vorstellen können, heißt der **Hauptraum** von $A$ zu $\lambda$.

(c) Für $r \in \mathbb{N}_{>0}$ nennt man die Vektoren $x \in H_r(A,\lambda) \backslash H_{r-1}(A,\lambda)$, für die also $(\lambda E - A)^r x = 0$ und $(\lambda E - A)^{r-1} x \neq 0$ gilt, **Hauptvektoren** oder **verallgemeinerte Eigenvektoren** der Stufe $r$ von $A$ zum Eigenwert $\lambda$.

Der Hauptraum besteht also aus dem Nullvektor zusammen mit den Hauptvektoren aller Stufen. Die gewöhnlichen Eigenvektoren aus Definition 19.11 (a) sind gerade die Hauptvektoren der Stufe 1, nämlich die Elemente von $H_1(A,\lambda) \backslash H_0(A,\lambda) = \operatorname{Eig}(A,\lambda) \backslash \{0\}$.

**Bemerkung 20.2** (Haupträume von Endomorphismen)**.** Natürlich gibt es zu Konstruktion 20.1 auch wieder eine entsprechende Version für Endomorphismen $f\colon V \to V$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums $V$: Analog zu Bemerkung 19.12 (b) sind die verallgemeinerten Eigenräume in diesem Fall $H_r(f,\lambda) = \operatorname{Ker}((\lambda \operatorname{id}_V - f)^r)$, wobei die Potenz hier für die $r$-fache Verkettung von $\lambda \operatorname{id}_V - f$ mit sich selbst steht.

**Bemerkung 20.3.** Sind $A \in K^{n \times n}$, $\lambda \in K$ und $r \in \mathbb{N}$ mit $H_r(A,\lambda) = H_{r+1}(A,\lambda)$, so dass also in der aufsteigenden Kette der verallgemeinerten Eigenräume in Konstruktion 20.1 (b) an irgendeiner Stelle die Gleichheit gilt, so gilt auch an der folgenden Stelle $H_{r+1}(A,\lambda) = H_{r+2}(A,\lambda)$ die Gleichheit, denn für alle $x \in H_{r+2}(A,\lambda)$ folgt dann

$$\begin{aligned} & (\lambda E - A)^{r+1} (\lambda E - A) x = 0 \\ \Rightarrow\ & (\lambda E - A) x \in H_{r+1}(A,\lambda) = H_r(A,\lambda) \\ \Rightarrow\ & (\lambda E - A)^r (\lambda E - A) x = 0, \end{aligned}$$

und damit auch $x \in H_{r+1}(A,\lambda)$. Daraus erhalten wir sofort:

(a) Aus der Gleichheit $H_r(A,\lambda) = H_{r+1}(A,\lambda)$ an einer Stelle $r \in \mathbb{N}$ folgt induktiv bereits

$$H_r(A,\lambda) = H_{r+1}(A,\lambda) = H_{r+2}(A,\lambda) = \cdots,$$

und damit $H(A,\lambda) = H_r(A,\lambda)$.

(b) Speziell für $r = 0$ bedeutet (a): Ist $\lambda \in K$ kein Eigenwert von $A$, gibt es also keine Eigenvektoren zu $\lambda$ und ist damit $H_1(A,\lambda) = \operatorname{Eig}(A,\lambda) = \{0\} = H_0(A,\lambda)$, so folgt auch $H(A,\lambda) = \{0\}$, d. h. dann gibt es auch keine verallgemeinerten Eigenvektoren zu $\lambda$. Anders formuliert verallgemeinern wir also nur den Begriff der Eigen*vektoren*, aber nicht den der Eigen*werte*.

(c) Da alle verallgemeinerten Eigenräume von $A$ in $K^n$ liegen und somit höchstens Dimension $n$ haben, kann in der aufsteigenden Kette dieser Räume höchstens $n$-mal die strikte Inklusion gelten. Zusammen mit (a) bedeutet dies, dass in jedem Fall $H(A,\lambda) = H_n(A,\lambda)$ gilt, also spätestens nach $n$ Schritten in der Kette der Hauptraum erreicht sein muss.

**Beispiel 20.4.** Die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hat nach Folgerung 18.18 das charakteristische Polynom $\chi_A(t) = t^2(t-2)$. Wir wollen zum Eigenwert $\lambda = 0$ den Hauptraum $H(A,0)$ bestimmen. Dazu berechnen wir der Reihe nach die verallgemeinerten Eigenräume $H_r(A,0)$:

$$H_1(A,0) = \operatorname{Ker}(0E-A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{Lin}(e_1),$$

$$H_2(A,0) = \operatorname{Ker}(0E-A)^2 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{Lin}(e_1,e_2),$$

$$H_3(A,0) = \operatorname{Ker}(0E-A)^3 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \operatorname{Lin}(e_1,e_2).$$

Damit ist der gesuchte Hauptraum gleich $H(A,0) = \operatorname{Lin}(e_1,e_2)$: Dies folgt sowohl aus Bemerkung 20.3 (a) (da $H_2(A,0)$ und $H_3(A,0)$ übereinstimmen) als auch aus Bemerkung 20.3 (c) (da für $3\times 3$-Matrizen spätestens an der dritten Stelle der Hauptraum erreicht sein muss).

Wir sehen an diesem Beispiel also bereits, dass es mehr Hauptvektoren als Eigenvektoren geben kann, denn $\operatorname{Eig}(A,0) = H_1(A,0)$ ist hier ja ein echter Unterraum von $H(A,0) = H_2(A,0)$. In unserem Beispiel führt dies dazu, dass die Standardbasis eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Hauptvektoren von $A$ ist (die ersten beiden Einheitsvektoren sind ja Hauptvektoren zum Eigenwert 0, der dritte ist offensichtlich ein Eigenvektor zum Eigenwert 2), wohingegen wir wegen $\mu_g(A,0) = \mu_g(A,2) = 1$ keine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von $A$ finden können und $A$ damit nicht diagonalisierbar ist.

Wir wollen nun zeigen, dass wir in der Tat zu jeder Matrix $A \in K^{n\times n}$ mit zerfallendem charakteristischen Polynom eine Basis aus Hauptvektoren finden können. Analog zu Abschnitt 19.C sind dies gerade die beiden Aussagen:

(A) Wir finden in jedem Hauptraum genügend viele linear unabhängige Vektoren, d. h. es ist $\dim H(A,\lambda) = \mu_a(A,\lambda)$ für alle Eigenwerte $\lambda$.

(B) Alle diese Vektoren zusammen genommen sind linear unabhängig, d. h. die Summe der Haupträume ist direkt.

Für den Beweis dieser Aussagen in den nächsten beiden Sätzen benötigen wir zuerst zwei kleine Bemerkungen.

**Bemerkung 20.5.** Es sei $A \in K^{n\times n}$.

(a) (Kommutativität von Matrixprodukten aus $A$ und $E$) Natürlich sind Matrixprodukte im Allgemeinen nicht kommutativ, d. h. in der Regel ist $AB \neq BA$ für eine weitere Matrix $B \in K^{n\times n}$. Jedoch gilt hier offensichtlich die Gleichheit, falls $B = A$ oder $B = E$ ist. Dementsprechend sind auch Produkte von Matrizen kommutativ, die durch Addition, Skalarmultiplikation und Matrixmultiplikation aus $A$ und $E$ zusammengesetzt sind, wie z. B.

$$(\lambda E - A)\cdot A = A\cdot(\lambda E - A)$$

(in der Tat sind beide Seiten gleich $\lambda A - A^2$). Wir werden diese Kommutativität im Folgenden oft benutzen, ohne jedes Mal wieder darauf hinzuweisen.

(b) (Invarianz der Haupträume) Die Abbildung $x \mapsto Ax$ lässt sich auf jeden verallgemeinerten Eigenraum $H_r(A,\lambda)$ (und damit auch auf $H(A,\lambda)$) zu einem Endomorphismus

$$H_r(A,\lambda) \to H_r(A,\lambda),\ x \mapsto Ax$$

einschränken: Ist nämlich $x \in H_r(A,\lambda)$, also $(\lambda E - A)^r x = 0$, so gilt nach (a) auch

$$(\lambda E - A)^r Ax = A(\lambda E - A)^r x = 0$$

und damit $Ax \in H_r(A,\lambda)$. Man sagt dafür auch, dass die verallgemeinerten Eigenräume und der Hauptraum *A-invariant* sind.

**Satz 20.6** (Hauptraumdimension)**.** *Es seien $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix mit zerfallendem charakteristischen Polynom und $\lambda \in K$. Dann gilt:*

(a) *Für alle $\mu \in K$ mit $\mu \neq \lambda$ ist $H(A,\lambda) \cap H(A,\mu) = \{0\}$.*

(b) $\dim H(A,\lambda) = \mu_a(A,\lambda)$.

*Beweis.* Nach Bemerkung 20.5 (b) können wir die Abbildung $f\colon K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$ auf einen Endomorphismus des Hauptraums $H(A,\lambda)$ einschränken. Es gibt nach Aufgabe 17.24 (b) also lineare Abbildungen

$$g\colon H(A,\lambda) \to H(A,\lambda),\ x \mapsto Ax \quad \text{und} \quad h\colon K^n/H(A,\lambda) \to K^n/H(A,\lambda),\ \overline{x} \mapsto \overline{Ax}.$$

Für die Eigenwerte dieser beiden Abbildungen gilt:

(1) Kein $\mu \neq \lambda$ ist ein Eigenwert von $g$: Ist $x \in H(A,\lambda)$ mit $Ax = \mu x$, so wissen wir einerseits $(\lambda E - A)^n x = 0$ nach Bemerkung 20.3 (c) und andererseits $(\lambda E - A)x = (\lambda - \mu)x$. Damit folgt

$$0 = (\lambda E - A)^n x = (\lambda - \mu)^n x,$$

was wegen $\mu \neq \lambda$ nur für $x = 0$ möglich ist. Also hat $g$ keine Eigenvektoren zu $\mu$, und damit nach Bemerkung 20.3 (b) auch keine verallgemeinerten Eigenvektoren zu $\mu$. Mit anderen Worten ist $H(A,\lambda) \cap H(A,\mu) = H(g,\mu) = \{0\}$, was (a) zeigt.

(2) Umgekehrt ist $\lambda$ kein Eigenwert von $h$: Ist $\overline{x} \in K^n/H(A,\lambda)$ mit $\overline{Ax} = \lambda\overline{x}$, so folgt

$$\begin{aligned}
& \overline{(\lambda E - A)x} = \overline{0} \\
\Rightarrow\ & (\lambda E - A)x \in H(A,\lambda) = H_n(A,\lambda) \quad \text{(Bemerkung 20.3 (c))} \\
\Rightarrow\ & (\lambda E - A)^n(\lambda E - A)x = 0 \\
\Rightarrow\ & x \in H_{n+1}(A,\lambda) = H(A,\lambda),
\end{aligned}$$

und damit $\overline{x} = \overline{0}$. Also besitzt $h$ keine Eigenvektoren zu $\lambda$.

Nach Aufgabe 19.25 ist nun $\chi_A = \chi_f = \chi_g \cdot \chi_h$, und dieses Polynom zerfällt nach Voraussetzung in Linearfaktoren. Aus $\chi_g$ können nach (1) aber ausschließlich Linearfaktoren $t - \lambda$ kommen, aus $\chi_h$ dagegen nach (2) kein Linearfaktor $t - \lambda$. Die algebraische Vielfachheit $\mu_a(A,\lambda)$, also die Anzahl der Linearfaktoren $t - \lambda$ in $\chi_A$, ist damit genau gleich dem Grad von $\chi_g$, also der Dimension $\dim H(A,\lambda)$ des Startraums von $g$. Damit ist auch (b) gezeigt. □

**Satz 20.7 (Hauptraumzerlegung).** *Es sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von $A$, so gilt*

$$H(A,\lambda_1) \oplus \dots \oplus H(A,\lambda_k) = K^n.$$

*Beweis.* Wir zeigen mit Induktion über $l = 1, \dots, k$, dass die Summe $H(A,\lambda_1) + \dots + H(A,\lambda_l)$ direkt ist. Für den Induktionsanfang $l = 1$ ist dabei nichts zu zeigen. Für den Induktionsschritt $l \to l+1$ seien

$$x_1 + \dots + x_{l+1} = y_1 + \dots + y_{l+1} \tag{1}$$

zwei Darstellungen desselben Vektors in $K^n$ mit $x_i, y_i \in H(A,\lambda_i)$ für alle $i = 1, \dots, l+1$. Multiplizieren wir diese Gleichung von links mit $(\lambda_{l+1}E - A)^n$, so fallen $x_{l+1}$ und $y_{l+1}$ nach Bemerkung 20.3 (c) weg, und wir erhalten

$$(\lambda_{l+1}E - A)^n(x_1 - y_1) + \dots + (\lambda_{l+1}E - A)^n(x_l - y_l) = 0. \tag{2}$$

Nun ist aber $(\lambda_{l+1}E-A)^n(x_i-y_i) \in H_n(A,\lambda_i) = H(A,\lambda_i)$ für alle $i=1,\dots,l$, denn nach Bemerkung 20.5 (a) ist

$$(\lambda_i E-A)^n(\lambda_{l+1}E-A)^n(x_i-y_i) = (\lambda_{l+1}E-A)^n \underbrace{(\lambda_i E-A)^n(x_i-y_i)}_{=0} = 0.$$

Da die Summe $H(A,\lambda_1)+\dots+H(A,\lambda_l)$ nach Induktionsvoraussetzung direkt ist, ergibt sich aus (2) also

$$(\lambda_{l+1}E-A)^n(x_i-y_i) = 0 \quad \text{für alle } i=1,\dots,l.$$

Damit ist $x_i-y_i \in H(A,\lambda_i)\cap H(A,\lambda_{l+1})$, mit Satz 20.6 (a) also $x_i-y_i=0$ und somit $x_i=y_i$ für $i=1,\dots,l$. Einsetzen in (1) zeigt dann auch $x_{l+1}=y_{l+1}$, und damit ist die Summe der Haupträume direkt.

Da $\chi_A$ in Linearfaktoren zerfällt, ist nun aber auch

$$\dim(H(A,\lambda_1)\oplus\dots\oplus H(A,\lambda_k)) \overset{17.3}{=} \sum_{i=1}^{k} \dim H(A,\lambda_i) \overset{20.6\,(b)}{=} \sum_{i=1}^{k} \mu_a(A,\lambda_i) = n,$$

und damit $H(A,\lambda_1)\oplus\dots\oplus H(A,\lambda_k) = K^n$. □

**Bemerkung 20.8.** Wollen wir den Hauptraum $H(A,\lambda)$ einer Matrix $A\in K^{n\times n}$ zu einem Eigenwert $\lambda$ bestimmen, indem wir nacheinander die verallgemeinerten Eigenräume $H_r(A,\lambda)$ mit $r\in\mathbb{N}$ berechnen, so folgt aus Satz 20.6 (b) insbesondere, dass wir mit der Berechnung dieser Räume aufhören können, sobald einer von ihnen die Dimension $\mu_a(A,\lambda)$ hat – und nicht erst wie in Beispiel 20.4, wenn zwei von ihnen gleich sind oder $r=n$ gilt. In der Tat hätten wir in diesem Beispiel damit $H_3(A,0)$ nicht mehr berechnen müssen, da dort bereits $\dim H_2(A,0)=\mu_a(A,0)=2$ war und somit $H(A,0)=H_2(A,0)$ gelten musste.

45

## 20.B Jordandiagramme

Wir wollen nun endlich unser Problem lösen, zu einer quadratischen Matrix mit zerfallendem charakteristischen Polynom eine möglichst einfache ähnliche Matrix zu finden. Dazu haben wir im letzten Abschnitt gesehen, dass sich diese Frage auf die Untersuchung der einzelnen Haupträume reduzieren lässt. Wir fassen unser Ergebnis hier noch einmal in der jetzt benötigten Form zusammen.

**Bemerkung 20.9** (Hauptraumzerlegung)**.** Es sei $A\in K^{n\times n}$ eine Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Sind $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von $A$, so haben wir in Satz 20.7 gesehen, dass

$$H(A,\lambda_1)\oplus\dots\oplus H(A,\lambda_k) = K^n.$$

Wählen wir also Basen $B_1,\dots,B_k$ dieser Haupträume, so erhalten wir nach Aufgabe 17.7 mit allen diesen Vektoren zusammen genommen eine Basis $B$ von $K^n$. Damit können wir diese Vektoren in die Spalten einer invertierbaren Matrix $T$ schreiben.

Wegen der Invarianz der Haupträume gemäß Bemerkung 20.5 (b) können wir nun die Abbildung $f\colon K^n\to K^n$, $x\mapsto Ax$ auf die Haupträume einschränken zu

$$f_i\colon H(A,\lambda_i)\to H(A,\lambda_i),\ x\mapsto Ax$$

für $i=1,\dots,k$. Die Matrix $A_f^B$ (die nach Bemerkung 19.3 (b) gleich $T^{-1}AT$ ist) kann nach Satz 16.26 in den zu $B_i$ gehörigen Spalten also auch nur in den entsprechenden Zeilen Einträge ungleich 0 haben, und ist dort gleich der Abbildungsmatrix $A_{f_i}^{B_i}$. Wir erhalten für diese Matrix damit

$$A_f^B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \boxed{A_{f_1}^{B_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_{f_k}^{B_k}} \end{pmatrix}$$

Man sagt, dass $A_f^B$ eine *Blockdiagonalmatrix* mit den Blöcken $A_{f_1}^{B_1},\dots,A_{f_k}^{B_k}$ ist.

Um unsere Suche nach einer möglichst einfachen zu $A$ ähnlichen Matrix zu beenden, müssen wir jetzt also nur noch die Basen $B_i$ der einzelnen Haupträume $H(A,\lambda_i)$ für $i = 1,\dots,k$ so wählen, dass die Abbildungsmatrizen $A_{f_i}^{B_i}$ der auf die Haupträume eingeschränkten Abbildung möglichst einfach werden. Hierfür ist das folgende Konzept der Jordandiagramme sehr nützlich, da es die etwas komplizierte Berechnung von $B_i$ auf grafische Art gut veranschaulicht.

**Definition 20.10** (Jordandiagramme)**.** Es sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Wir wählen einen festen Eigenwert $\lambda$ von $A$ und setzen zur Abkürzung der Schreibweise $H_r := H_r(A,\lambda)$ für alle $r \in \mathbb{N}$.

Ein **Jordandiagramm** von $A$ zum Eigenwert $\lambda$ ist dann wie im Bild unten dargestellt ein in linksbündigen Zeilen angeordnetes Diagramm von endlich vielen Kästchen, mit von oben nach unten (nicht notwendig streng) monoton fallenden Zeilenlängen, und zusammen mit einem Vektor in $K^n$ in jedem dieser Kästchen, so dass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(a) (*Zeilenbedingung*) Für alle $r > 0$ bilden die Vektoren der ersten $r$ Zeilen eine Basis von $H_r$. Insbesondere bilden also die Vektoren in allen Kästchen zusammen eine Basis des Hauptraums $H(A,\lambda)$.

(b) (*Spaltenbedingung*) Steht ein Vektor $y$ in einer Spalte des Diagramms unmittelbar über dem Vektor $x$, so ist $y = (A-\lambda E)x$ (im Diagramm unten ist also z. B. $x_2 = (A-\lambda E)x_3$).

**Bemerkung 20.11** (Alternative Zeilenbedingung)**.** Oft ist es nützlich, die Zeilenbedingung aus Definition 20.10 (a) äquivalent umzuformulieren zu:

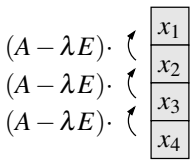
> *(Alternative Zeilenbedingung)* Für alle $r > 0$ liegen die Vektoren der Zeile $r$ in $H_r$, und ihre Klassen bilden eine Basis von $H_r/H_{r-1}$.

Diese alternative Bedingung ist nämlich nach Bemerkung 17.21 äquivalent dazu, dass die Vektoren der Zeile $r$ eine Basis von $H_{r-1}$ zu einer Basis von $H_r$ ergänzen – und dies ist ja gerade die ursprüngliche Zeilenbedingung.

Insbesondere heißt dies auch, dass alle Vektoren einer Zeile $r$ in $H_r \backslash H_{r-1}$ liegen, also Hauptvektoren der Stufe $r$ sind.

Wir werden in Satz 20.13 noch beweisen, dass Jordandiagramme immer existieren und auch einfach berechenbar sind. Zuerst wollen wir aber sehen, warum gerade eine Basiswahl wie in den Kästchen eines Jordandiagramms zu einer besonders einfachen Abbildungsmatrix führt.

**Konstruktion 20.12** (Abbildungsmatrizen aus Jordandiagrammen)**.** Wir betrachten zunächst eine Spalte der Länge $m$ in einem Jordandiagramm zu einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ zum Eigenwert $\lambda$; die Vektoren von oben nach unten gelesen seien $x_1,\dots,x_m$ (im Bild rechts ist eine solche Situation für den Fall $m = 4$ dargestellt).




Wegen $x_1 \in H_1$ ist dann $Ax_1 = \lambda x_1$, während für alle $i = 2,\dots,m$ nach der Spaltenbedingung (b) aus Definition 20.10

$$(A-\lambda E)x_i = x_{i-1}, \quad \text{also} \quad Ax_i = \lambda x_i + x_{i-1}$$

gilt. Der Unterraum $U = \mathrm{Lin}(x_1,\dots,x_m)$ ist damit im Sinne von Bemerkung 20.5 (b) $A$-invariant, d. h. die Abbildung $K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$ lässt sich zu einer Abbildung $U \to U$, $x \mapsto Ax$ einschränken, und die Abbildungsmatrix dieser eingeschränkten Abbildung ist bezüglich der Basis $(x_1,\dots,x_m)$ von

$U$ nach Satz 16.26 gleich

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in K^{m\times m}.$$

Wir nennen diese $m \times m$-Matrix $J_m(\lambda)$, bei der alle Einträge auf der Diagonale gleich $\lambda$, die unmittelbar darüber gleich 1, und alle anderen gleich 0 sind, einen **Jordanblock** (oder manchmal auch ein **Jordankästchen**) der Größe $m$ zum Eigenwert $\lambda$.

Wir gehen nun zum gesamten Jordandiagramm zu $\lambda$ über, nehmen also alle Spalten zusammen. Wählen wir als Basis von $H(A,\lambda)$ die Vektoren im Diagramm, spaltenweise von oben nach unten gelesen, so erhalten wir für die Abbildungsmatrix zu $x \mapsto Ax$ auf $H(A,\lambda)$ analog zu Bemerkung 20.9 eine Blockdiagonalform mit Jordanblöcken wie oben beschrieben, also

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1}(\lambda)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{m_l}(\lambda)} \end{pmatrix},$$

wobei jeder Jordanblock einer Spalte im Jordandiagramm entspricht und die Größen $m_1,\dots,m_l$ der Jordanblöcke genau die Längen dieser Spalten (in der gewählten Reihenfolge) sind. Dies ist die einfache Form der Abbildungsmatrix, nach der wir gesucht haben.

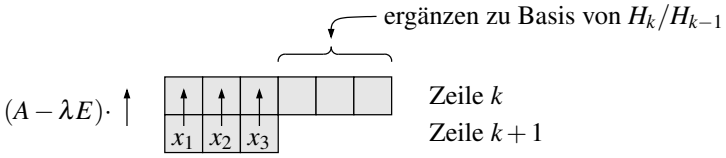
Wir haben nun also gesehen, dass man mit Hilfe von Jordandiagrammen Hauptraumbasen bestimmen kann, die letztlich zu sehr einfachen Abbildungsmatrizen führen. Im nächsten Satz wollen wir daher zeigen, dass solche Jordandiagramme auch wirklich existieren. Der Beweis des Satzes gibt gleichzeitig auch ein einfaches konstruktives Verfahren zur Berechnung eines solchen Diagramms.

**Satz 20.13** (Existenz und Berechnung von Jordandiagrammen)**.** *Es seien $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, und $\lambda$ ein Eigenwert von $A$. Dann gibt es ein Jordandiagramm von $A$ zum Eigenwert $\lambda$.*

*Beweis.* Wie oben setzen wir wieder $H_k := H_k(A,\lambda)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es sei $r \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit $H_r(A,\lambda) = H(A,\lambda)$, also die benötigte Anzahl Zeilen im Jordandiagramm. Wir konstruieren das gesuchte Diagramm nun nach folgendem Verfahren zeilenweise von unten nach oben:

(a) In die letzte Zeile $r$ schreiben wir beliebige Vektoren in $H_r$, deren Klassen wie in Bemerkung 20.11 eine Basis von $H_r/H_{r-1}$ bilden – z. B. indem wir wie in Bemerkung 17.21 eine Basis von $H_{r-1}$ zu einer Basis von $H_r$ ergänzen und die hinzugenommenen Vektoren in die letzte Zeile des Diagramms schreiben. (Die dafür bestimmte Basis von $H_{r-1}$ wird dabei im Folgenden nicht mehr benötigt.)

(b) Um für $k = r-1,\dots,1$ die Zeile $k$ aus Zeile $k+1$ zu konstruieren, schreiben wir wie im Bild unten dargestellt zunächst unmittelbar über die Vektoren $x_1,\dots,x_m$ der Zeile $k+1$ die Vektoren $(A-\lambda E)x_1,\dots,(A-\lambda E)x_m$ in Zeile $k$, und ergänzen diese Vektoren dann so, dass die Klassen der Vektoren in Zeile $k$ insgesamt eine Basis von $H_k/H_{k-1}$ bilden.




Nach Konstruktion sind im ausgefüllten Diagramm dann überall die alternative Zeilenbedingung aus Bemerkung 20.11 und die Spaltenbedingung aus Definition 20.10 (b) erfüllt. Außerdem müssen die Zeilenlängen dann natürlich von oben nach unten monoton fallend sein. Um sicherzustellen, dass Schritt (b) immer funktioniert (wenn das Diagramm unterhalb dieser Zeile schon korrekt ausgefüllt ist), müssen wir aber noch zwei Dinge überprüfen:

- Die Vektoren $(A-\lambda E)x_i$ liegen wirklich in $H_k$ für alle $i=1,\dots,m$: Da $x_i$ in Zeile $k+1$ steht, ist $x_i \in H_{k+1}$, also $(\lambda E - A)^{k+1}x_i = 0$ bzw. $(A-\lambda E)^{k+1}x_i = 0$. Dies bedeutet aber auch $(A-\lambda E)^k(A-\lambda E)x_i = 0$, und damit $(A-\lambda E)x_i \in H_k$.
- Die Klassen der Vektoren $(A-\lambda E)x_1,\dots,(A-\lambda E)x_m$ sind linear unabhängig in $H_k/H_{k-1}$, so dass wir sie zu einer Basis dieses Raumes ergänzen können: Für $\mu_1,\dots,\mu_m \in K$ gilt

$$\begin{aligned}
&\mu_1\overline{(A-\lambda E)x_1}+\dots+\mu_m\overline{(A-\lambda E)x_m} = \overline{0} \quad \in H_k/H_{k-1}\\
\Rightarrow\ &\mu_1(A-\lambda E)x_1+\dots+\mu_m(A-\lambda E)x_m \in H_{k-1} && \text{(Bemerkung 17.16)}\\
\Rightarrow\ &(A-\lambda E)^{k-1}(A-\lambda E)(\mu_1x_1+\dots+\mu_mx_m)=0 && \text{(Definition von } H_{k-1})\\
\Rightarrow\ &\mu_1x_1+\dots+\mu_mx_m \in H_k && \text{(Definition von } H_k)\\
\Rightarrow\ &\mu_1\overline{x_1}+\dots+\mu_m\overline{x_m}=\overline{0} \quad \in H_{k+1}/H_k && \text{(Bemerkung 17.16)}\\
\Rightarrow\ &\mu_1=\dots=\mu_m=0,
\end{aligned}$$

  da die Vektoren $\overline{x_1},\dots,\overline{x_m}$ eine Basis von $H_{k+1}/H_k$ bilden und damit in diesem Quotientenraum linear unabhängig sind. □

Ein konkretes Beispiel für dieses Verfahren werden wir in Beispiel 20.17 noch angeben. Zunächst aber wollen wir unsere Ergebnisse zusammenfassen und damit das Hauptergebnis dieses Kapitels zeigen.

**Folgerung 20.14** (Jordansche Normalform)**.** *Es sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Dann ist $A$ ähnlich zu einer Blockdiagonalmatrix der Form*

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{m_k}(\lambda_k)} \end{pmatrix},$$

*wobei die $J_{m_1}(\lambda_1),\dots,J_{m_k}(\lambda_k)$ Jordanblöcke wie in Konstruktion 20.12 für gewisse $m_1,\dots,m_k \in \mathbb{N}_{>0}$ und nicht notwendig verschiedene Eigenwerte $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ von $A$ sind, d. h. für $i=1,\dots,k$ ist*

$$J_{m_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in K^{m_i\times m_i}.$$

*Man nennt eine solche Matrix $J$ die **Jordanform** oder **Jordansche Normalform** von $A$ (wir werden in Aufgabe 20.21 noch sehen, dass sie bis auf die Reihenfolge der Blöcke eindeutig bestimmt ist).*

*Ist $T=(x_1\,|\,\cdots\,|\,x_n) \in \mathrm{GL}(n,K)$ eine Matrix mit $J=T^{-1}AT$, so dass $J$ also die Abbildungsmatrix von $K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$ bezüglich der Basis $B=(x_1,\dots,x_n)$ ist, so heißt $B$ eine **Jordanbasis** von $A$.*

*Beweis.* Auch der Beweis dieser Folgerung ist konstruktiv: Man bestimme zunächst mit Hilfe des charakteristischen Polynoms $\chi_A$ die Eigenwerte von $A$, und dann zu jedem dieser Eigenwerte ein Jordandiagramm mit dem Verfahren aus Satz 20.13. Aus jedem Diagramm erhalten wir eine Basis des entsprechenden Hauptraums, und so nach der Hauptraumzerlegung aus Satz 20.7 insgesamt eine Basis von $K^n$. Dies ist dann eine Jordanbasis: Lesen wir die Basisvektoren in den Diagrammen spaltenweise von oben nach unten und schreiben sie in die Matrix $T$, so ist $T^{-1}AT$ nach Bemerkung 20.9 eine Blockdiagonalmatrix mit einem Block für jeden Eigenwert $\lambda$, wobei nach Konstruktion 20.12 jeder dieser Blöcke selbst wieder eine Blockdiagonalform aus Jordanblöcken zu $\lambda$ ist. □

**Bemerkung 20.15** (Bestimmung der Jordanform ohne Jordanbasis)**.** Möchte man zu einer Matrix $A$ (mit in Linearfaktoren zerfallendem charakteristischen Polynom) nur die Jordanform, aber keine Jordanbasis bestimmen, so ist das Verfahren hierfür sehr viel einfacher. Weil wir genau einen Jordanblock der Größe $m$ zum Eigenwert $\lambda$ für jede Spalte der Länge $m$ im Jordandiagramm zu $\lambda$ bekommen, benötigen wir zur Bestimmung der Jordanform nämlich nur die äußere Form der Jordandiagramme, aber nicht die in ihnen stehenden Vektoren. Da die äußere Form eines solchen

Diagramms zum Eigenwert $\lambda$ nach Bemerkung 20.11 aber wiederum dadurch eindeutig bestimmt ist, dass Zeile $r$ für alle $r$ die Länge $\dim H_r(A,\lambda) - \dim H_{r-1}(A,\lambda)$ hat, genügt also die Information der Dimensionen aller Räume $H_r(A,\lambda)$, um die Jordanform zu bestimmen.

In vielen Fällen reicht sogar noch viel weniger Information zur Bestimmung der Jordanform aus. So haben z. B. die algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts eine direkte Interpretation in den Jordandiagrammen und damit auch in der Jordanform:

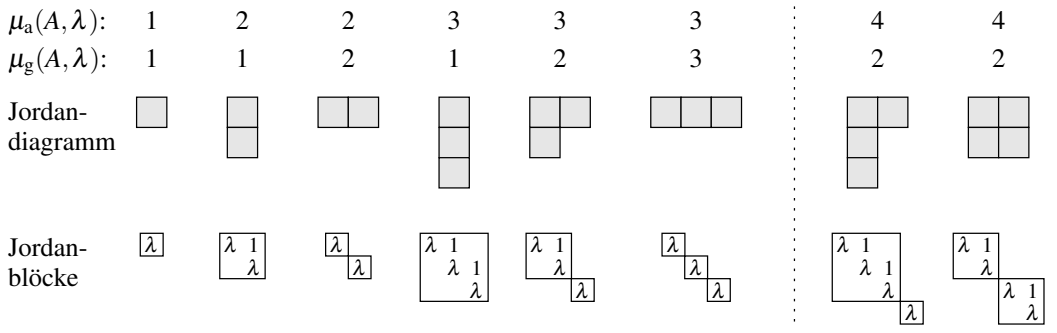
(a) Die algebraische Vielfachheit $\mu_a(A,\lambda)$ ist nach Satz 20.6 (b) die Dimension von $H(A,\lambda)$, also gleich der Anzahl der Kästchen im Jordandiagramm zu $\lambda$. Natürlich ist dies dann gleichzeitig auch die Summe der Längen aller Spalten in diesem Diagramm, und damit gleich der Summe der Größen aller Jordanblöcke in der Jordanform von $A$.

(b) Die geometrische Vielfachheit $\mu_g(A,\lambda) = \dim \mathrm{Eig}(A,\lambda) = \dim H_1(A,\lambda)$ ist nach der Zeilenbedingung aus Definition 20.10 (a) genau die Länge der ersten Zeile des Jordandiagramms zu $\lambda$. Da die Zeilenlängen in einem Jordandiagramm von oben nach unten monoton fallend sind, ist dies dasselbe wie die Anzahl der Spalten im Jordandiagramm, und damit wie die Anzahl der Jordanblöcke zum Eigenwert $\lambda$ in der Jordanform von $A$.

Wir halten also fest:

$$\begin{aligned}\mu_a(A,\lambda) &= \text{Anzahl der Kästchen im Jordandiagramm zum Eigenwert } \lambda\\ &= \text{Summe der Größen der Jordanblöcke zum Eigenwert } \lambda \text{ in der Jordanform}\\ \mu_g(A,\lambda) &= \text{Anzahl der Spalten im Jordandiagramm zum Eigenwert } \lambda\\ &= \text{Anzahl der Jordanblöcke zum Eigenwert } \lambda \text{ in der Jordanform}\end{aligned}$$

Im Fall $\mu_a(A,\lambda) \leq 3$ reichen diese beiden Zahlen in der Tat bereits aus, um das Jordandiagramm und damit auch die von diesem Eigenwert kommenden Jordanblöcke in der Jordanform eindeutig zu bestimmen: Im Bild unten links sind alle möglichen Jordandiagramme mit höchstens 3 Kästchen (und die sich daraus ergebenden Jordanblöcke) angegeben, und diese unterscheiden sich alle in der Anzahl ihrer Kästchen oder Spalten, also durch die algebraische oder geometrische Vielfachheit des Eigenwerts. Erst im Fall $\mu_a(A,\lambda) = 4$ gibt es zum ersten Mal zwei Jordandiagramme, die sich durch diese beiden Zahlen nicht unterscheiden lassen, nämlich die beiden Diagramme unten rechts mit 4 Kästchen und 2 Spalten – und dementsprechend auch zwei verschiedene mögliche Jordanformen. Möchte man zwischen diesen beiden Fällen unterscheiden, muss man auch noch $\dim H_2(A,\lambda)$ berechnen: Diese Zahl ist nach Definition 20.10 ja gleich der Anzahl der Kästchen in den ersten beiden Zeilen des Jordandiagramms, in den beiden Fällen im Bild unten rechts also 3 bzw. 4.




**Bemerkung 20.16.**

(a) Natürlich gibt es einen zu Folgerung 20.14 analogen Satz auch wieder für Endomorphismen $f\colon V \to V$ eines endlich erzeugten Vektorraums $V$: Zerfällt $\chi_f$ in Linearfaktoren, so gibt es eine Jordanbasis $B$ von $V$ für $f$ – also eine Basis, so dass die zugehörige Abbildungsmatrix $A_f^B$ in Jordanform ist.

(b) Beachte, dass der Fall von diagonalisierbaren Matrizen, also Folgerung 19.40, im Satz über die Jordansche Normalform enthalten ist: Ist $A$ eine quadratische Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, so ergibt sich aus Folgerung 20.14 und Bemerkung 20.15

$$\begin{aligned} A \text{ diagonalisierbar} &\Leftrightarrow \text{alle Jordanblöcke haben die Größe 1} \\ &\Leftrightarrow \text{alle Spalten der Jordandiagramme haben die Länge 1} \\ &\Leftrightarrow \text{alle Jordandiagramme haben genauso viele Spalten wie Kästchen} \\ &\Leftrightarrow \mu_g(A,\lambda) = \mu_a(A,\lambda) \text{ für alle Eigenwerte } \lambda, \end{aligned}$$

und damit Folgerung 19.40.

46

**Beispiel 20.17.** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Das charakteristische Polynom von $A$ berechnet sich wohl am einfachsten durch Laplace-Entwicklung gemäß Satz 18.15, zunächst nach der letzten Spalte und dann nach der letzten Zeile:

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= \det \begin{pmatrix} t & -1 & -1 & 0 \\ 4 & t-4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & t-3 \end{pmatrix} = (t-3) \cdot \det \begin{pmatrix} t & -1 & -1 \\ 4 & t-4 & -2 \\ 0 & 0 & t-2 \end{pmatrix} \\ &= (t-2)(t-3) \cdot \det \begin{pmatrix} t & -1 \\ 4 & t-4 \end{pmatrix} = (t-2)(t-3)(t^2-4t+4) = (t-2)^3(t-3). \end{aligned}$$

Da $\chi_A$ in Linearfaktoren zerfällt, besitzt $A$ nach Folgerung 20.14 also eine Jordanform.

Wollen wir diese berechnen, müssen wir die Jordandiagramme zu den beiden Eigenwerten $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$ bestimmen. Für $\lambda_2 = 3$ ist dies einfach: Aus $\mu_a(A,3) = 1$ folgt natürlich bereits, dass das zugehörige Jordandiagramm aus nur einem Kästchen besteht und die Jordanform von $A$ daher genau einen Jordanblock der Größe 1 zum Eigenwert 3 hat. Für den Eigenwert $\lambda_1 = 2$ hingegen ist $\mu_a(A,2) = 3$, und daher gibt es für das Jordandiagramm noch die drei im Bild von Bemerkung 20.15 aufgelisteten Möglichkeiten, die drei Kästchen im Jordandiagramm anzuordnen. Um zu entscheiden, welcher dieser Fälle hier vorliegt, berechnen wir die geometrische Vielfachheit $\mu_g(A,2)$: Mit dem Gauß-Algorithmus ergibt sich

$$H_1(A,2) = \operatorname{Ker}(2E-A) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Lin} \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=: x_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: x_2} \right), \qquad (*)$$

und damit $\mu_g(A,2) = 2$. Das Jordandiagramm zum Eigenwert 2 hat gemäß Bemerkung 20.15 also 3 Kästchen und 2 Spalten und muss damit wie im Bild am Ende dieses Beispiels in der ersten Spalte zwei und in der zweiten Spalte ein Kästchen haben. Zum Eigenwert 2 gibt es also zwei Jordanblöcke, deren Größen gerade diese Spaltenlängen 2 bzw. 1 sind. Die Jordanform von $A$ ist damit

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Wollen wir auch noch eine Jordanbasis bestimmen, müssen wir die beiden Jordandiagramme zu den Eigenwerten 2 und 3 noch mit Vektoren füllen. Für den Eigenwert $\lambda_2 = 3$ ist dies wieder einfach: Da der vierte Einheitsvektor offensichtlich ein Eigenvektor zu diesem Eigenwert ist, können wir ihn wie im Bild unten in das eine Kästchen des Jordandiagramms schreiben. Um auch das Jordandiagramm

für $\lambda_1 = 2$ zu füllen, verwenden wir das Verfahren aus Satz 20.13 und beginnen also in der zweiten Zeile des Diagramms, wofür wir eine Basis für den eindimensionalen Raum $H_2(A,2)/H_1(A,2)$ brauchen. Wir müssen also erst einmal den verallgemeinerten Eigenraum $H_2(A,2)$ bestimmen. Dies können wir durch explizite Berechnung von $H_2(A,2) = \mathrm{Ker}(2E-A)^2$ mit dem Gauß-Algorithmus machen und erhalten

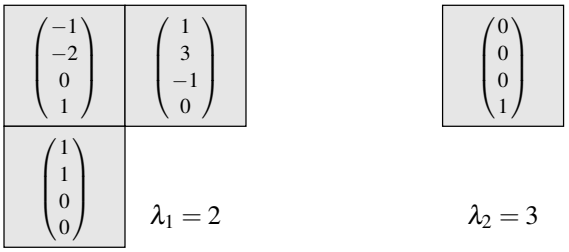
$$H_2(A,2) = \mathrm{Ker}(2E-A)^2 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Lin}\left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=: y_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: y_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: y_3} \right)$$

Offensichtlich ist $y_3$ ein Vektor, der eine Basis von $H_1(A,2)$ zu einer von $H_2(A,2)$ ergänzt. Wir schreiben ihn also in das untere Kästchen des Jordandiagramms. Direkt darüber gehört nun nach dem Verfahren aus Satz 20.13 der Vektor

$$(A-2E)\cdot y_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass dieser Vektor nach $(*)$ tatsächlich in $H_1(A,2)$ liegt (dies ist eine gute Kontrolle der Rechnung – wir hätten irgendwo einen Rechenfehler gemacht, wenn dies nicht so wäre). Für das rechte Kästchen des Jordandiagramms müssen wir ihn noch zu einer Basis von $H_1(A,2)$ ergänzen, nach $(*)$ z. B. mit $x_2$.

Insgesamt haben wir also die folgenden Jordandiagramme erhalten:




Für eine Jordanbasis müssen wir die Vektoren in diesen Kästchen nun nur noch spaltenweise von oben nach unten lesen bzw. sie in dieser Reihenfolge als Spalten in die Transformationsmatrix $T$ schreiben. Dabei müssen wir die Spalten der Diagramme in der gleichen Reihenfolge durchgehen, in der wir oben die Jordanblöcke in $J$ angeordnet haben:

$$T := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt dann $T^{-1}AT = J$ nach Folgerung 20.14 (was wir durch direkte Berechnung von $T^{-1}$ und $T^{-1}AT$ natürlich auch explizit überprüfen könnten).

**Aufgabe 20.18.** Berechne die Jordanschen Normalformen der reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix $A$ bestimme man dabei zusätzlich eine Jordanbasis; für die Matrix $B$ hingegen versuche man, mit möglichst wenig Rechenaufwand lediglich die Jordanform zu ermitteln.

**Aufgabe 20.19.** Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ sei $V = \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad höchstens $n$. Berechne die Jordansche Normalform der linearen Abbildung $f\colon V \to V$ mit $f(\varphi)(x) = \varphi(x+1)$.

**Aufgabe 20.20** (Anwendung der Jordanform auf Systeme von Differentialgleichungen)**.** In dieser Aufgabe wollen wir ein vermutlich recht unerwartetes Beispiel für die Anwendung der Jordanform aus dem Bereich der Analysis geben. Das Ziel soll es sein, reelle differenzierbare Funktionen $f_1, f_2, f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu bestimmen, so dass $f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = 1$ und

$$\begin{aligned} f_1' &= f_2 + 2f_3 \\ f_2' &= f_1 + f_2 + 3f_3 \\ f_3' &= -f_1 - f_3 \end{aligned}$$

(an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$) gilt, wobei $f_i'$ wie üblich die Ableitung von $f_i$ bezeichnet.

Derartige Systeme von sogenannten *Differentialgleichungen*, die also in jedem Punkt die Änderung von Funktionen durch die Funktionswerte selbst ausdrücken, kommen in der Praxis überall vor. Ausgehend von einem Anfangswert (hier bei $x = 0$) kann man mit ihnen die gesamten Funktionen $f_i$ rekonstruieren.

Zur Lösung schreibe man die gegebenen Gleichungen in Matrixform $f' = A \cdot f$ mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und bringe $A$ in Jordanform, d. h. bestimme eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$, so dass $T^{-1}AT = J$ eine Jordanmatrix ist. Wenn ihr die Gleichungen dann umschreibt in Gleichungen für $g = T^{-1}f$ (also $f = Tg$), sollte sich dieses neue Differentialgleichungssystem für $g$ (mit den passenden Werten bei $x = 0$) leicht lösen lassen.

**Aufgabe 20.21** (Eindeutigkeit der Jordanform)**.** Wir wollen nun die bereits in Folgerung 20.14 behauptete Eindeutigkeit der Jordanform (bis auf die Reihenfolge der Jordanblöcke) beweisen. Man zeige dazu:

(a) Sind $A$ und $B$ zwei ähnliche Matrizen, so gilt $\dim H_r(A,\lambda) = \dim H_r(B,\lambda)$ für alle $r \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in K$.

(b) Ist $A$ eine Matrix in Jordanscher Normalform, $\lambda$ ein Eigenwert von $A$ und $k \in \mathbb{N}_{>0}$, so ist die Anzahl der Jordanblöcke der Größe $r$ zum Eigenwert $\lambda$ in $A$ genau

$$2\dim H_r(A,\lambda) - \dim H_{r-1}(A,\lambda) - \dim H_{r+1}(A,\lambda).$$

(c) Zwei Matrizen in Jordanscher Normalform sind genau dann ähnlich zueinander, wenn sie aus den gleichen Jordanblöcken, nur evtl. in anderer Reihenfolge bestehen.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir schließlich noch ein paar Aufgaben betrachten, in denen man die Nützlichkeit der einfachen Matrixdarstellung der Jordanform in theoretischen Problemen sieht. Ihnen allen ist gemeinsam, dass man die zu zeigende Aussage für Jordanblöcke bzw. Matrizen in Jordanform recht einfach sehen und sie dann mit Hilfe einer Ähnlichkeitstransformation problemlos auf beliebige Matrizen (mit zerfallendem charakteristischen Polynom) übertragen kann – während ein direkter Beweis für beliebige Matrizen deutlich schwieriger wäre.

**Aufgabe 20.22.** Beweise, dass jede quadratische komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ zu ihrer transponierten Matrix $A^\mathsf{T}$ ähnlich ist.

**Aufgabe 20.23.** Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeige, dass $\dim\{B \in \mathbb{C}^{n\times n} : AB = BA\} \geq n$.

**Aufgabe 20.24.** Eine quadratische Matrix $N \in K^{n\times n}$ heißt *nilpotent*, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $N^k = 0$.

(a) Zeige, dass sich jede komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ als Summe $A = D + N$ schreiben lässt, wobei $D$ diagonalisierbar und $N$ nilpotent ist, sowie $DN = ND$ gilt.

(b) Berechne mit Hilfe von (a) für alle $n \in \mathbb{N}$ die Potenzen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ durch eine direkte Rechnung (also ohne erst durch Ausprobieren eine Formel zu raten und sie danach durch Induktion zu beweisen).

(c) Wir definieren eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$a_0 = a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Bestimme eine explizite Formel für alle $a_n$.

(Hinweis: Die Rekursionsgleichung ist offensichtlich äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.)

## 20.C Minimalpolynome

Als eine interessante Anwendung der Jordanschen Normalform wollen wir in diesem Abschnitt Polynomausdrücke in Matrizen betrachten. Hier sind zunächst einmal zwei Beispiele dafür.

**Beispiel 20.25.**

(a) Wenn wir im Polynom $p(t) = (t-\lambda)^k$ „für $t$ eine quadratische Matrix $A$ einsetzen“, erhalten wir $(A-\lambda E)^k$. Diese Matrix haben wir in diesem Kapitel bereits oft betrachtet, denn ihr Kern ist ja gerade der verallgemeinerte Eigenraum $H_k(A,\lambda)$.

(b) Es sei $A$ eine quadratische Matrix mit $A^2 = A$, also eine „Nullstelle des Polynoms $t^2 - t$“. Wir können uns fragen, was wir dann über $A$ aussagen können, also ob wir die quadratische Gleichung $t^2 - t = 0$ „im Matrizenraum lösen“ können. In der Tat werden wir die allgemeine Matrixlösung dieser Gleichung in Beispiel 20.36 angeben können. Wir können hier aber schon einmal am Beispiel der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sehen, dass wir (im Gegensatz zur Lösung der Gleichung $t^2 - t = t(t-1) = 0$ in $K$) hier nicht nur die „offensichtlichen“ Lösungen $A = 0$ und $A = E$ erhalten werden.

Als Erstes sollten wir aber das Einsetzen einer Matrix in ein Polynom exakt definieren.

**Definition 20.26** (Polynomausdrücke in Matrizen)**.** Es seien $p(t) = c_k t^k + \cdots + c_1 t + c_0$ ein Polynom mit Koeffizienten in $K$ und $A \in K^{n\times n}$. Dann setzen wir

$$p(A) := c_k A^k + \cdots + c_1 A + c_0 E \quad \in K^{n\times n}.$$

Im Rest dieses Abschnitts wollen wir der Einfachheit halber annehmen, dass unser Grundkörper $K$ gleich $\mathbb{C}$ ist, so dass jedes Polynom $p \neq 0$ nach dem Fundamentalsatz 6.11 der Algebra in Linearfaktoren zerfällt und somit als $p(t) = c(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_k)$ für $c, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ mit $c \neq 0$ geschrieben werden kann. Einsetzen einer Matrix ergibt dann $p(A) = c(A-\lambda_1 E)\cdots(A-\lambda_k E)$. Da wir jede reelle Matrix auch als komplexe auffassen können, ist diese Beschränkung auf $\mathbb{C}$ für uns kein wesentliches Problem. Wie schon in der Einleitung zu diesem Kapitel erwähnt, kann man in der Tat sogar zu jedem Körper einen größeren finden, in dem Polynome immer in Linearfaktoren zerfallen. Mit einer solchen Aussage würden sich die Ergebnisse, die wir jetzt zeigen werden, dann auch auf beliebige Körper übertragen lassen.

Statt des in Beispiel 20.25 (b) erwähnten Problems, zu einem gegebenen komplexen Polynom $p$ alle quadratischen Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $p(A) = 0$ zu finden, wollen wir diese Frage nun zunächst umdrehen und zu einer gegebenen Matrix $A$ alle Polynome $p$ mit $p(A) = 0$ bestimmen. Es wird

sich dabei herausstellen, dass es unter diesen Polynomen ein *eindeutiges* normiertes Polynom mit minimalem Grad gibt, das wir dann das Minimalpolynom von $A$ nennen werden.

Für die konkrete Berechnung, ob $p(A) = 0$ gilt, ist es natürlich nützlich, wenn die Matrix $A$ eine möglichst einfache Form hat. Daher werden wir diese Frage zunächst für Jordanblöcke untersuchen (wo sie einfach zu beantworten ist), dann für Matrizen in Jordanform, und schließlich mit Hilfe von Ähnlichkeitstransformationen für beliebige Matrizen.

**Lemma 20.27.** *Es seien $p \neq 0$ ein komplexes Polynom und $A = J_m(\lambda) \in \mathbb{C}^{m\times m}$ ein Jordanblock wie in Konstruktion 20.12.*

*Dann gilt $p(A) = 0$ genau dann, wenn $\lambda$ in $p$ eine Nullstelle der Vielfachheit mindestens $m$ ist.*

*Beweis.* Wir können $p$ als $p(t) = c(t-\lambda_1)^{a_1}\cdots(t-\lambda_k)^{a_k}$ mit $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $a_1,\dots,a_k \in \mathbb{N}$ und verschiedenen $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ faktorisieren, so dass also

$$p(A) = c\,(A-\lambda_1 E)^{a_1}\cdots(A-\lambda_k E)^{a_k}. \tag{1}$$

Ein einzelner Faktor in $p(A)$ hat dabei die Form

$$A-\lambda_i E = \begin{pmatrix} \lambda-\lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda-\lambda_i \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Für alle $i$ mit $\lambda_i \neq \lambda$ hat diese Matrix Determinante $(\lambda-\lambda_i)^m \neq 0$ und ist damit invertierbar. In (1) kann also höchstens dann $p(A) = 0$ gelten, wenn $\lambda_i = \lambda$ für ein $i$ gilt; und in diesem Fall ist $p(A) = 0$ äquivalent zu $(A-\lambda_i E)^{a_i} = 0$. Die Matrix $A-\lambda_i E$ hat dann die Form (2) mit Nullen auf der Diagonale, und bildet damit die Einheitsvektoren gemäß

$$e_m \mapsto e_{m-1} \mapsto \cdots \mapsto e_2 \mapsto e_1 \mapsto 0$$

ab. Die $a_i$-fache Anwendung $(A-\lambda_i E)^{a_i}$ dieser Abbildung ist damit also genau dann gleich 0, d. h. bildet alle Einheitsvektoren auf 0 ab, wenn wie behauptet die Vielfachheit $a_i$ der Nullstelle $\lambda$ in $p$ mindestens $m$ ist. □

**Bemerkung 20.28.** Es seien $p$ ein komplexes Polynom und $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(a) ($p(A)$ für Blockdiagonalmatrizen) Ist $A$ in Blockdiagonalform mit quadratischen Blöcken $A_1,\dots,A_k$, so gilt aufgrund der Blockmultiplikation aus Bemerkung 15.8

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad A^i = \begin{pmatrix} A_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k^i \end{pmatrix} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N},$$

und damit auch für den Ausdruck $p(A)$, der ja eine Linearkombination solcher Potenzen ist,

$$p(A) = \begin{pmatrix} p(A_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p(A_k) \end{pmatrix}.$$

Also ist $p(A) = 0$ genau dann, wenn $p(A_j) = 0$ für alle $j = 1,\dots,k$.

(b) ($p(A)$ für ähnliche Matrizen) Ist $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ und damit $A' := T^{-1}AT$ ähnlich zu $A$, so gilt $p(A') = 0$ genau dann, wenn $p(A) = 0$: Es ist nämlich

$$(A')^i = \underbrace{(T^{-1}AT)(T^{-1}AT)\cdots(T^{-1}AT)}_{i\text{-mal}} = T^{-1}A^iT$$

für alle $i \in \mathbb{N}$, da sich die Matrixprodukte $TT^{-1}$ hier in der Mitte herauskürzen, und damit für $p(t) = c_n t^n + \cdots c_1 t + c_0$

$$p(A') = T^{-1}\,(c_nA^n + \cdots c_1A + c_0E)\,T = T^{-1}\,p(A)\,T,$$

was wegen der Invertierbarkeit von $T$ genau dann gleich 0 ist, wenn $p(A) = 0$ gilt.

**Folgerung und Definition 20.29** (Minimalpolynom)**.** *Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ferner sei $a_i$ für $i = 1, \dots, k$ die maximale Größe eines Jordanblocks zum Eigenwert $\lambda_i$ in der Jordanform von $A$.*

(a) *Es gibt ein eindeutiges normiertes Polynom $p_A$ minimalen Grades mit $p_A(A) = 0$, nämlich*

$$p_A(t) = (t-\lambda_1)^{a_1} \cdots (t-\lambda_k)^{a_k}.$$

*Man nennt $p_A$ das* ***Minimalpolynom*** *von $A$.*

(b) *Für ein beliebiges Polynom $p$ gilt*

$$p(A) = 0 \;\Leftrightarrow\; \text{es gibt ein Polynom } q \text{ mit } p = q \cdot p_A$$

*(man sagt dafür auch, dass $p$ ein Vielfaches von $p_A$ bzw. $p_A$ ein Teiler von $p$ ist).*

*Beweis.* Nach Folgerung 20.14 und Bemerkung 20.28 (b) können wir annehmen, dass $A$ eine Matrix in Jordanform ist. Ist $p \neq 0$ dann ein beliebiges komplexes Polynom, so ist nach Bemerkung 20.28 (a) genau dann $p(A) = 0$, wenn $p$ ausgewertet an jedem Jordanblock von $A$ gleich 0 ist, was wiederum nach Lemma 20.27 genau dann der Fall ist, wenn die Nullstellenordnung von allen $\lambda_i$ in $p$ mindestens so groß ist wie jeder Jordanblock zu $\lambda_i$, also mindestens so groß wie $a_i$. Die Polynome $p$ mit $p(A) = 0$ sind also genau diejenigen der Form

$$p(t) = q \cdot (t-\lambda_1)^{a_1} \cdots (t-\lambda_k)^{a_k}$$

für ein Polynom $q$. Dies zeigt bereits beide Teile der Folgerung. □

**Bemerkung 20.30.**

(a) Aus Bemerkung 20.28 (b) folgt unmittelbar, dass ähnliche Matrizen dasselbe Minimalpolynom haben.

(b) Nach Folgerung 20.29 (a) sind die Nullstellen des Minimalpolynoms $p_A$ genau alle Eigenwerte von $A$.

(c) Da jeder Jordanblock der Größe $m$ einer Spalte der Länge $m$ im Jordandiagramm entspricht, ist die maximale Größe eines solchen Blocks genau die Anzahl der Zeilen im Jordandiagramm. Zusammen mit Bemerkung 20.15 können wir also für jeden Eigenwert einer komplexen Matrix als Merkregel für die Jordandiagramme festhalten:

| |
|---|
| Anzahl der Kästchen im Jordandiagramm = algebraische Vielfachheit |
| Anzahl der Spalten im Jordandiagramm = geometrische Vielfachheit |
| Anzahl der Zeilen im Jordandiagramm = Vielfachheit im Minimalpolynom |

(d) Für alle, die schon die Vorlesung „Algebraische Strukturen“ gehört haben, kann man Folgerung 20.29 auch so formulieren: Man sieht leicht, dass die Menge aller Polynome $p$ mit $p(A) = 0$ ein Ideal im Polynomring $\mathbb{C}[t]$ ist. Da $\mathbb{C}[t]$ ein Hauptidealring ist [G, Beispiel 10.23], kann dieses Ideal von einem Element erzeugt werden – und dieser Erzeuger ist bis auf Multiplikation mit Konstanten in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ eindeutig. Das damit eindeutig bestimmte normierte Polynom, das dieses Ideal erzeugt, ist genau das Minimalpolynom von $A$.

**Beispiel 20.31.** Beachte, dass Folgerung 20.29 das Minimalpolynom einer Matrix $A$ auf zwei ganz unterschiedliche Arten beschreibt: als normiertes Polynom kleinsten Grades, das beim Einsetzen von $A$ Null ergibt, und als Polynom, dessen Nullstellenordnung bei jedem $\lambda$ die maximale Größe eines Jordanblocks zum Eigenwert $\lambda$ in der Jordanform von $A$ ist. Um die Nützlichkeit beider Beschreibungen zu sehen, betrachten wir noch einmal die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Für die Matrix $A$ haben wir in Beispiel 20.25 (a) bereits gesehen, dass $p(A) = 0$ für $p(t) = t^2 - t = t(t-1)$. Nach Folgerung 20.29 (b) muss dieses Polynom ein Vielfaches des Minimalpolynoms $p_A$ sein. Für $p_A$ kommen also nur die Polynome $t(t-1)$, $t$ und $t-1$ in Frage. Da die letzten beiden Polynome beim Einsetzen von $A$ aber offensichtlich nicht 0 ergeben (es ist $A \neq 0$ und $A - E \neq 0$), ist $p_A(t) = t^2 - t$.

In diesem Fall konnten wir das Minimalpolynom also einfach berechnen, ohne irgendetwas über die Eigenwerte oder die Jordanform von $A$ zu wissen.

(b) Von der Matrix $B$ haben wir in Beispiel 20.17 schon die Jordanform berechnet; sie bestand aus zwei Jordanblöcken zum Eigenwert 2 mit den Größen 1 und 2 sowie einem Jordanblock zum Eigenwert 3 der Größe 1. Mit Folgerung 20.29 (a) können wir daraus also sofort ablesen, dass $p_B(t) = (t-2)^2(t-3)$.

Hier konnten wir durch die Kenntnis der Jordanform also das Minimalpolynom bestimmen, ohne irgendwelche Polynomausdrücke in Matrizen berechnen zu müssen.

Aus unserer Charakterisierung des Minimalpolynoms ergeben sich zwei unmittelbare interessante Folgerungen.

**Folgerung 20.32 (Satz von Cayley-Hamilton).** *Für jede quadratische Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt $\chi_A(A) = 0$.*

*Beweis.* Das charakteristische Polynom von $A$ hat die Form

$$\chi_A(t) = (t-\lambda_1)^{\mu_a(A,\lambda_1)} \cdots (t-\lambda_k)^{\mu_a(A,\lambda_k)},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von $A$ sind. Für alle $i$ ist aber nun $\mu_a(A,\lambda_i)$ nach Bemerkung 20.30 (c) die Anzahl der Kästchen im Jordandiagramm zu $\lambda_i$, und damit sicher mindestens so groß wie die Anzahl der Zeilen darin, also wie die Vielfachheit von $\lambda_i$ im Minimalpolynom $p_A$. Wie in Folgerung 20.29 ist $\chi_A$ also ein Vielfaches des Minimalpolynoms $p_A$, und damit ist $\chi_A(A) = 0$. □

**Folgerung 20.33** (Diagonalisierbarkeit und Minimalpolynom)**.** *Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn ihr Minimalpolynom $p_A$ nur einfache Nullstellen hat.*

*Beweis.* Nach Bemerkung 20.16 (b) ist $A$ genau dann diagonalisierbar, wenn alle Jordandiagramme von $A$ nur Spalten der Länge 1 haben, also genau eine Zeile besitzen. Nach Bemerkung 20.30 (c) ist dies äquivalent dazu, dass alle Eigenwerte einfache Nullstellen von $p_A$ sind. □

**Bemerkung 20.34** (Minimalpolynome reeller Matrizen sind reell)**.** Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle Matrix, deren charakteristisches Polynom über $\mathbb{R}$ nicht notwendig in Linearfaktoren zerfällt. In der Konstruktion des Minimalpolynoms in Folgerung 20.29 treten dann evtl. komplexe Eigenwerte von $A$ auf, so dass nicht mehr klar ist, ob $p_A$ ein reelles Polynom ist. In der Tat ist dies aber immer der Fall: Ist $p_A(t) = t^k + c_{k-1}t^{k-1} + \cdots + c_1 t + c_0$ (mit zunächst evtl. komplexen Koeffizienten), so gilt für das komplex konjugierte Polynom $\overline{p_A}(t) = t^k + \overline{c_{k-1}}t^{k-1} + \cdots + \overline{c_1}t + \overline{c_0}$ wegen $\overline{A} = A$

$$\overline{p_A}(A) = A^k + \overline{c_{k-1}}A^{k-1} + \cdots + \overline{c_1}A + \overline{c_0}E = \overline{A^k + c_{k-1}A^{k-1} + \cdots + c_1A + c_0E} = \overline{p_A(A)} = 0.$$

Da dieses Polynom $\overline{p_A}$ außerdem normiert ist und den gleichen Grad hat wie $p_A$, muss es nach der Eindeutigkeitsaussage in Folgerung 20.29 (a) bereits das Minimalpolynom sein. Also ist $\overline{p_A} = p_A$, d. h. $p_A$ ist ein reelles Polynom.

**Bemerkung 20.35** (Minimalpolynome für Endomorphismen)**.** Natürlich lassen sich auch die Konzepte und Ergebnisse dieses Abschnitts wieder auf die übliche Art auf Endomorphismen $f\colon V \to V$ eines endlich-dimensionalen komplexen Vektorraums $V$ übertragen: Für ein gegebenes komplexes Polynom $p(t) = c_k t^k + \cdots + c_1 t + c_0$ setzt man

$$p(f) := c_k f^k + \cdots + c_1 f + c_0 \,\mathrm{id}_V \quad \in \mathrm{End}(V),$$

wobei $f^i$ für $i = 1, \dots, k$ für die $i$-fache Verkettung von $f$ mit sich selbst steht. Auch hier erhält man dann ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom $p_f$ minimalen Grades mit $p_f(f) = 0$, das

*Minimalpolynom* von $f$. Es hat die gleiche Charakterisierung durch die Jordanform wie in Folgerung 20.29, und auch der Satz von Cayley-Hamilton aus Folgerung 20.32 und die Charakterisierung der Diagonalisierbarkeit aus Folgerung 20.33 gelten ganz analog.

47

**Beispiel 20.36** (Quadratische Matrizen mit $A^2 = A$)**.** Wir können nun unser Beispiel 20.25 (b) vom Anfang dieses Abschnitts noch einmal aufgreifen und die Frage klären, welche Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Gleichung $A^2 = A$ erfüllen.

Wie in Beispiel 20.31 (a) sehen wir auch hier zunächst, dass genau dann $A^2 = A$ gilt, wenn das Minimalpolynom $p_A$ ein Teiler von $t^2 - t = t\,(t-1)$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $p_A$ nur einfache Nullstellen hat und alle Nullstellen in der Menge $\{0,1\}$ liegen, nach Bemerkung 20.30 (b) und Folgerung 20.33 also, wenn die Matrix $A$ diagonalisierbar ist und ihre Eigenwerte eine Teilmenge von $\{0,1\}$ sind. Anders formuliert bedeutet dies genau, dass es ein $r \in \{0,\dots,n\}$ und eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ gibt mit

$$T^{-1}AT = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad \text{also} \quad A = T\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)T^{-1}.$$

Matrizen dieser Form sind daher die allgemeine Lösung der Matrixgleichung $A^2 = A$ über $\mathbb{C}$. Beachte, dass dies die „offensichtlichen“ Lösungen $A = 0$ und $A = E$ enthält (für $r = 0$ bzw. $r = n$), aber dass es auch noch viele weitere Lösungen gibt.

**Aufgabe 20.37.** Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{6\times 6}$,so dass gilt:

(a) $A$ hat Rang 6 und erfüllt $A^4 + 3A^2 = 3A^3 + A$, und einer der Eigenräume von $A$ ist zweidimensional.

(b) $\mathrm{Ker}\,B = \mathrm{Im}\,B$.

Bestimme das Minimalpolynom und die Jordansche Normalform dieser beiden Matrizen.

**Aufgabe 20.38.** Untersuche, ob es eine komplexe $4\times 4$-Matrix $A$ bzw. $B$ gibt mit

$$\text{(a) } A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{(b) } B^5 + 5B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

(Es ist nicht notwendig, im Fall der Existenz eine solche Matrix anzugeben.)

**Aufgabe 20.39.** Es sei $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$. Zeige, dass es ein Polynom $p$ mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ gibt, so dass $A^{-1} = p(A)$.

**Aufgabe 20.40.** Man zeige: Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ eine invertierbare Matrix, so dass $A^m$ für ein $m \in \mathbb{N}_{>0}$ diagonalisierbar ist, so ist auch $A$ diagonalisierbar.

# 21. Euklidische und unitäre Räume

Wir wollen uns nun mit einem ganz anderen Thema beschäftigen, nämlich wie man Längen von Vektoren und Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen (und überhaupt erst einmal definieren) kann. Zur Motivation betrachten wir dazu zunächst einmal den sehr einfachen Fall des Vektorraums $\mathbb{R}^2$, in dem sich diese beiden Fragen mit Hilfe von Elementargeometrie und Schulmathematik leicht beantworten lassen.

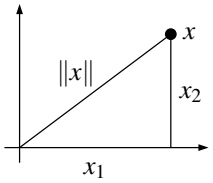
**Beispiel 21.1** (Längen und Winkel in $\mathbb{R}^2$)**.** Wie ihr sicher aus der Schule wisst, ist das wesentliche Hilfsmittel für die Längen- und Winkelmessung in $\mathbb{R}^2$ das sogenannte *Skalarprodukt*

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 \in \mathbb{R} \qquad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

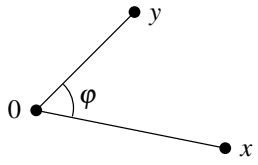
So ergibt sich z. B. wie im Bild unten links dargestellt aus dem Satz des Pythagoras, dass die Länge eines Vektors $x \in \mathbb{R}^2$ durch den Ausdruck

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

gegeben ist, den wir im Folgenden kurz als $\|x\|$ schreiben werden.




$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$




$\frac{y}{\|y\|} = e^{i\varphi} \cdot \frac{x}{\|x\|}$

Wollen wir den Winkel $\varphi$ zwischen zwei Vektoren $x,y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ wie im Bild oben rechts berechnen, betrachten wir dazu am besten zunächst einmal die Vektoren $\frac{x}{\|x\|}$ und $\frac{y}{\|y\|}$, die in die gleiche Richtung wie $x$ bzw. $y$ zeigen, aber die Länge 1 haben. Fassen wir dann $x = x_1 + ix_2$ und $y = y_1 + iy_2$ als Elemente der komplexen Ebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ auf, so folgt aus den Bemerkungen 6.5 und 9.11, dass

$$\frac{y}{\|y\|} = e^{i\varphi} \cdot \frac{x}{\|x\|}$$

ist, da sich die Winkel bei der komplexen Multiplikation addieren und $e^{i\varphi}$ eine Zahl mit Winkel $\varphi$ und Betrag 1 ist. Einfache Umformungen in $\mathbb{C}$ ergeben nun wegen $\|x\|^2 = \bar{x}x$

$$e^{i\varphi} = \frac{y}{x} \cdot \frac{\|x\|}{\|y\|} = \frac{\bar{x}y}{\bar{x}x} \cdot \frac{\|x\|}{\|y\|} = \frac{\bar{x}y}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Wegen $\bar{x}y = (x_1 - ix_2)(y_1 + iy_2) = x_1y_1 + x_2y_2 + i(x_1y_2 - x_2y_1)$ besagt der Realteil dieser Gleichung

$$\cos\varphi = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\|x\| \cdot \|y\|},$$

woraus wir mit der obigen Definition des Skalarprodukts folgern, dass

$$\varphi = \arccos \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

ist (beachte hierbei, dass der Arkuskosinus nur Werte zwischen 0 und $\pi$ zurückliefert und aufgrund der Symmetrien der Kosinusfunktion damit den *unorientierten* Winkel zwischen $x$ und $y$ ergibt).

Sowohl Längen als auch Winkel lassen sich damit durch das Skalarprodukt ausdrücken. Wenn wir diese beiden Konzepte auch in anderen Vektorräumen definieren wollen, sollten wir den Begriff des Skalarprodukts also auf beliebige Vektorräume verallgemeinern.

Das Problem dabei ist jedoch, dass die Formel $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$ (oder eine entsprechend verallgemeinerte Version für höhere Dimensionen) explizit die Koordinaten der beiden Vektoren $x$ und $y$ benutzt. In einem allgemeinen Vektorraum gäbe es solche Koordinaten aber erst nach Wahl einer Basis – und die Formel würde natürlich auch unterschiedliche Ergebnisse liefern, wenn man die Koordinaten bezüglich verschiedener Basen nehmen würde. Wir schließen daraus, dass es in einem allgemeinen Vektorraum *kein natürlich definiertes* Skalarprodukt gibt, sondern dass ein Skalarprodukt eine *Zusatzstruktur* darstellt, die man zusätzlich zum Vektorraum erst einmal festlegen muss, bevor man mit konkreten Rechnungen anfangen kann.

Wir müssen diese Zusatzstruktur also zunächst erst einmal genauer definieren, d. h. konkret angeben, welche Eigenschaften ein Skalarprodukt haben soll. Klar ist, dass wir zwei Elementen eines $K$-Vektorraums $V$ ein Element des zugrunde liegenden Körpers $K$ zuordnen wollen, also formal eine Abbildung von $V \times V$ nach $K$ betrachten müssen. Mit solchen Abbildungen wollen wir uns nun zunächst beschäftigen.

## 21.A Bilinearformen

Die erste wichtige Eigenschaft eines Skalarprodukts ist, dass es linear in beiden Vektoren ist. Derartige Abbildungen bezeichnet man als Bilinearformen.

**Definition 21.2** (Bilinearformen)**.** Eine **Bilinearform** auf einem $K$-Vektorraum $V$ ist eine Abbildung $b\colon V \times V \to K,\ (x,y) \mapsto b(x,y)$, die in beiden Komponenten eine lineare Abbildung ist, d. h. für die für alle $x_1,x_2,x,y_1,y_2,y \in V$ und $\lambda \in K$ die Eigenschaften

$$\begin{aligned} b(x_1+x_2,y) &= b(x_1,y)+b(x_2,y),\\ b(\lambda x,y) &= \lambda\, b(x,y),\\ b(x,y_1+y_2) &= b(x,y_1)+b(x,y_2),\\ b(x,\lambda y) &= \lambda\, b(x,y) \end{aligned}$$

gelten. Wie man leicht nachprüft, ist die Menge aller Bilinearformen auf $V$ ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(V \times V, K)$ (siehe Beispiel 13.3 (c)) und damit ein $K$-Vektorraum. Wir bezeichnen ihn mit $\mathrm{BLF}(V)$.

**Beispiel 21.3.**

(a) Die Abbildung

$$b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) \mapsto x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$$

ist offensichtlich eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$: Hält man $y_1$ und $y_2$ fest, so ist der gegebene Ausdruck eine lineare Abbildung in $x_1$ und $x_2$, und umgekehrt. Hingegen ist

$$b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) \mapsto x_1y_1 + x_1 + y_1$$

keine Bilinearform: Da lineare Abbildungen nach Bemerkung 16.2 stets 0 auf 0 abbilden, kann $b$ wegen

$$b\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = 1$$

bei festgehaltener zweiter Komponente $y$ nicht linear im ersten Argument $x$ sein.

(b) Da die Determinante nach Bemerkung 18.10 linear in jeder Spalte ist, ist die Abbildung

$$b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \det(x\,|\,y)$$

eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$.

(c) Ist $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix, so ist

$$b_A \colon K^n \times K^n \to K,\ b(x,y) = x^\mathsf{T} A\, y \qquad (*)$$

nach den Rechenregeln für Matrizen aus Lemma 15.7 eine Bilinearform auf $K^n$ – beachte, dass das Ergebnis hierbei als Produkt dreier Matrizen der Größen $1\times n$, $n\times n$ und $n\times 1$ eine $1\times 1$-Matrix, also ein Element von $K$ ist. Ist $A = (a_{i,j})_{i,j}$ und sind $x_1,\dots,x_n$ und $y_1,\dots,y_n$ die Koordinaten von $x$ und $y$, so ist eine alternative Schreibweise für $(*)$ nach Definition 15.5

$$b(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^n x_i a_{i,j} y_j.$$

Wir wollen nun sehen, dass man in der Tat sogar jede mögliche Bilinearform auf $K^n$ auf diese Art aus einer eindeutig bestimmten Matrix erhalten kann. Dies besagt der folgende Satz, der völlig analog zu Satz 16.23 und Folgerung 16.24 (a) über den Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen ist, und der damit letztlich besagt, dass Bilinearformen auf $K^n$ und $n\times n$-Matrizen über $K$ „im Prinzip dasselbe“ sind.

**Satz und Definition 21.4** (Bilinearformen auf $K^n$ und Matrizen)**.** *Es sei $n \in \mathbb{N}$.*

(a) *Zu jeder Bilinearform $b\colon K^n \times K^n \to K$ gibt es genau eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ mit $b = b_A$ wie in Beispiel 21.3 (c), also mit*

$$b(x,y) = x^\mathsf{T} A\, y \quad \text{für alle } x,y \in K^n,$$

*nämlich $A = (b(e_i,e_j))_{i,j}$. Man nennt sie die **Gramsche Matrix** von $b$ und bezeichnet sie mit $A_b$.*

(b) *Die Abbildung $K^{n\times n} \to \mathrm{BLF}(K^n)$, $A \mapsto b_A$ ist ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung $\mathrm{BLF}(K^n) \to K^{n\times n}$, $b \mapsto A_b$.*

*Beweis.*

(a) Zunächst einmal legt die Bedingung $b = b_A$ die Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j}$ eindeutig fest: Da wir den Eintrag in Zeile $i$ und Spalte $j$ von $A$ als das Matrixprodukt $e_i^\mathsf{T} A\, e_j$ schreiben können, ist notwendigerweise

$$a_{i,j} = e_i^\mathsf{T} A\, e_j = b(e_i,e_j),$$

und damit $A = A_b$. Da $b$ bilinear ist, folgt aus dieser Gleichung aber auch für alle Vektoren $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ und $y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$

$$b(x,y) = b\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i b(e_i,e_j) y_j = x^\mathsf{T} A\, y,$$

und damit $b = b_A$.

(b) Die Abbildung $K^{n\times n} \to \mathrm{BLF}(K^n)$, $A \mapsto b_A$ ist linear, denn für alle $A,B \in K^{n\times n}$, $\lambda \in K$ und $x,y \in K^n$ gilt

$$b_{A+B}(x,y) = x^\mathsf{T}(A+B)\, y = x^\mathsf{T} A\, y + x^\mathsf{T} B\, y = b_A(x,y) + b_B(x,y)$$
$$\text{und} \qquad b_{\lambda A}(x,y) = x^\mathsf{T}(\lambda A)\, y = \lambda\, x^\mathsf{T} A\, y = \lambda\, b_A(x,y),$$

und damit $b_{A+B} = b_A + b_B$ und $b_{\lambda A} = \lambda b_A$. Da sie nach (a) auch bijektiv ist, ist sie damit ein Isomorphismus. Nach Definition der Gramschen Matrix ist ihre Umkehrabbildung genau $\mathrm{BLF}(K^n) \to K^{n\times n}$, $b \mapsto A_b$. □

**Beispiel 21.5.**

(a) Zur Bilinearform

$$b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 \qquad (*)$$

aus Beispiel 21.3 (a) ist die zugehörige Gramsche Matrix

$$A_b = \begin{pmatrix} b(e_1,e_1) & b(e_1,e_2) \\ b(e_2,e_1) & b(e_2,e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Eine alternative Beschreibung von $A_b = (a_{i,j})_{i,j}$ ist offensichtlich, dass $a_{i,j}$ in einer Darstellung der Form $(*)$ von $b(x,y)$ genau der Koeffizient von $x_i y_j$ ist.

Umgekehrt können wir nun nach Satz 21.4 aus dieser Matrix auch die ursprüngliche Bilinearform durch die Formel

$$b(x,y) = (x_1 \;\; x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$$

zurückgewinnen.

(b) Die Einheitsmatrix $E \in K^{n\times n}$ entspricht in der Korrespondenz aus Satz 21.4 genau der Bilinearform

$$b_E \colon K^n \times K^n \to K,\ (x,y) \mapsto x^\mathsf{T} y = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n,$$

die wir in Beispiel 21.1 im Fall $K = \mathbb{R}$ und $n = 2$ schon beim gewöhnlichen Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ gesehen haben.

Genau wie bei linearen Abbildungen in Satz 16.26 und Folgerung 16.27 (a) können wir unsere Korrespondenz zwischen Bilinearformen und Matrizen nun unmittelbar von $K^n$ auf beliebige endlich-dimensionale Vektorräume erweitern, indem wir dort eine Basis wählen und mit den Koordinatenvektoren bezüglich dieser Basis arbeiten.

**Folgerung 21.6** (Bilinearformen auf $V$ und Matrizen)**.** *Es seien $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum sowie $B = (x_1,\dots,x_n)$ eine Basis von $V$ mit zugehöriger Koordinatenabbildung $\Phi_B \colon V \to K^n$ (siehe Konstruktion 16.18). Dann ist die Abbildung*

$$K^{n\times n} \to \mathrm{BLF}(V),\ A \mapsto b_A^B \qquad \text{mit } b_A^B(x,y) := \Phi_B(x)^\mathsf{T} A\, \Phi_B(y)$$

*wieder ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung*

$$\mathrm{BLF}(V) \to K^{n\times n},\ b \mapsto A_b^B \qquad \text{mit } A_b^B := (b(x_i,x_j))_{i,j}.$$

*Wie oben nennt man $A_b^B$ die **Gramsche Matrix** von $b$ bezüglich der Basis $B$.*

*Beweis.* Die Abbildung

$$\mathrm{BLF}(K^n) \to \mathrm{BLF}(V), \quad b \mapsto \Big((x,y) \mapsto b(\Phi_B(x),\Phi_B(y))\Big),$$

die einer Bilinearform $b$ auf $K^n$ die Bilinearform auf $V$ zuordnet, bei der man einfach in $b$ die Koordinatenvektoren der Vektoren aus $V$ einsetzt, ist offensichtlich ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung

$$\mathrm{BLF}(V) \to \mathrm{BLF}(K^n), \quad b \mapsto \Big((x,y) \mapsto b(\Phi_B^{-1}(x),\Phi_B^{-1}(y))\Big).$$

Verketten wir den Isomorphismus aus Satz 21.4 mit dieser Abbildung, erhalten wir also wie behauptet einen Isomorphismus $K^{n\times n} \to \mathrm{BLF}(K^n) \to \mathrm{BLF}(V)$, der eine Matrix $A$ auf die Bilinearform $(x,y) \mapsto b_A(\Phi_B(x),\Phi_B(y)) = \Phi_B(x)^\mathsf{T} A\, \Phi_B(y)$ abbildet, und dessen Umkehrung einer Bilinearform $b$ auf $V$ die Matrix $(b(\Phi_B^{-1}(e_i),\Phi_B^{-1}(e_j)))_{i,j} = (b(x_i,x_j))_{i,j}$ zuordnet. □

Natürlich hängt die Gramsche Matrix einer Bilinearform wie in Folgerung 21.6 von der gewählten Basis ab. Wie der folgende Satz zeigt, ist die Transformationsformel bei einem Basiswechsel jedoch eine andere als für Endomorphismen (siehe Bemerkung 19.3 (b)).

**Satz 21.7** (Verhalten von Gramschen Matrizen unter Basiswechsel)**.** *Es seien $b$ eine Bilinearform auf einem endlich-dimensionalen $K$-Vektorraum $V$ sowie $B$ und $B'$ zwei Basen von $V$. Dann gilt für die Gramschen Matrizen von $b$ bezüglich $B$ und $B'$*

$$A_b^{B'} = T^\mathsf{T} A_b^B\, T,$$

*wobei $T = A^{B',B}$ die Basiswechselmatrix aus Definition 16.38 ist.*

*Beweis.* Es seien $B = (x_1, \dots, x_n)$ und $B' = (x'_1, \dots, x'_n)$ die gewählten Basen. Nach Definition 16.38 enthält die $k$-te Spalte von $T = (a_{i,j})_{i,j}$ für $k = 1, \dots, n$ genau den Koordinatenvektor von $x'_k$ bezüglich $B$, d. h. es gilt

$$x'_k = a_{1,k}x_1 + \dots + a_{n,k}x_n.$$

Damit folgt für die Gramschen Matrizen mit der Formel aus Folgerung 21.6 sofort

$$A_b^{B'} = (b(x'_k, x'_l))_{k,l} = \left( b\left( \sum_{i=1}^n a_{i,k}x_i, \sum_{j=1}^n a_{j,l}x_j \right) \right)_{k,l} = \left( \sum_{i,j=1}^n a_{i,k} b(x_i, x_j) a_{j,l} \right)_{k,l} = T^\mathsf{T} A_b^B T. \quad \square$$

**Bemerkung 21.8** (Verhalten von Matrizen unter Basiswechsel)**.** Bisher hatten wir Matrizen nahezu ausschließlich zur Beschreibung von linearen Abbildungen benutzt. Nach Definition ist eine Matrix aber zunächst einmal nichts weiter als ein rechteckiges Zahlenschema, ohne Vorgabe einer Bedeutung dieser Zahlen. In der Tat haben wir nun gesehen, dass man Matrizen auch noch für ganz andere Dinge verwenden kann, nämlich z. B. zur Darstellung von Bilinearformen.

Ohne weitere Informationen ergibt es daher keinen Sinn zu fragen, wie sich eine (quadratische) Matrix unter einem Basiswechsel transformiert. Die Antwort auf diese Frage hängt nach Bemerkung 19.3 (b) und Satz 21.7 davon ab, welche Bedeutung die Einträge in der Matrix haben:

| Bei einem Basiswechsel mit zugehöriger Basiswechselmatrix $T$ transformiert sich ... |
|---|
| ... eine Abbildungsmatrix $A$ zu einem Endomorphismus in die Matrix $T^{-1}AT$, |
| ... eine Gramsche Matrix $A$ zu einer Bilinearform in die Matrix $T^\mathsf{T}AT$. |

Wie bei linearen Abbildungen oder Endomorphismen könnten wir uns nun schließlich auch bei Bilinearformen wieder nach einer Normalform fragen: Wie können wir zu einer gegebenen Bilinearform $b \in \mathrm{BLF}(V)$ eine Basis von $V$ so wählen, dass die zugehörige Gramsche Matrix $A_b^B$ möglichst einfach wird? Wir wollen diese Frage hier allerdings nicht in dieser vollen Allgemeinheit beantworten, da wir im Folgenden hauptsächlich an Bilinearformen mit noch weiteren speziellen Eigenschaften interessiert sind. Diese Eigenschaften wollen wir jetzt einführen.

## 21.B Skalarprodukte

Wir kommen nun zu den in der Einleitung zu diesem Kapitel bereits angekündigten Skalarprodukten. Sie sind als Bilinearformen mit den folgenden beiden Eigenschaften definiert, die wir auch gleich wieder analog für Matrizen einführen wollen.

**Definition 21.9** (Symmetrie und positive Definitheit)**.** Es seien $b \in \mathrm{BLF}(V)$ eine Bilinearform auf einem $K$-Vektorraum $V$ und $A \in K^{n \times n}$.

(a) Die Bilinearform $b$ heißt **symmetrisch**, wenn $b(x,y) = b(y,x)$ für alle $x, y \in V$ gilt.
Die Matrix $A$ heißt **symmetrisch**, wenn $A^\mathsf{T} = A$ gilt.

(b) Es sei nun zusätzlich $K = \mathbb{R}$.
Die Bilinearform $b$ heißt dann **positiv definit**, wenn $b(x,x) > 0$ für alle $x \in V \setminus \{0\}$ gilt.
Die Matrix $A$ heißt dann **positiv definit**, wenn $x^\mathsf{T}Ax > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.

**Bemerkung 21.10.**

(a) Die Bedingung der positiven Definitheit lässt sich offensichtlich nur für einen geordneten Körper (siehe Kapitel 4.B) formulieren. Für uns ist hierbei eigentlich nur der Fall $K = \mathbb{R}$ interessant. Wir werden die Bedingung der positiven Definitheit in Konstruktion 21.18 aber noch etwas abändern, so dass sie dann auch im Fall $K = \mathbb{C}$ anwendbar ist.

(b) Da eine Bilinearform $b$ in jedem Eintrag linear ist, gilt natürlich stets $b(0,0) = 0$. Eine positiv definite Bilinearform auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V$ erfüllt damit also immer $b(x,x) \geq 0$ für alle $x \in V$. Diese Bedingung, die wir später für Skalarprodukte fordern werden, wird uns dann sicherstellen, dass wir aus $b(x,x)$ die Wurzel ziehen und so die Länge von $x$ definieren können.

(c) In manchen Fällen (siehe Satz 26.20) benötigt man auch die folgenden zur positiven Definitheit analogen Bedingungen: Eine Bilinearform $b \in \mathrm{BLF}(V)$ auf einem reellen Vektorraum $V$ heißt …

- … **negativ definit**, wenn $b(x,x) < 0$ für alle $x \in V \setminus \{0\}$ gilt;
- … **positiv semidefinit**, wenn $b(x,x) \geq 0$ für alle $x \in V$ gilt;
- … **negativ semidefinit**, wenn $b(x,x) \leq 0$ für alle $x \in V$ gilt;
- … **indefinit**, wenn sie weder positiv noch negativ semidefinit ist, also wenn es $x, y \in V$ gibt mit $b(x,x) < 0$ und $b(y,y) > 0$.

Entsprechende Eigenschaften definiert man natürlich auch für reelle quadratische Matrizen.

48

Als Erstes wollen wir nun die wohl erwartete Aussage zeigen, dass sich die in Definition 21.9 eingeführten Begriffe für Bilinearformen und Matrizen entsprechen.

**Lemma 21.11** (Symmetrie und positive Definitheit bei Bilinearformen und Matrizen)**.** *Es seien $b$ eine Bilinearform auf einem endlich-dimensionalen $K$-Vektorraum $V$, $B$ eine Basis von $V$, und $A_b^B$ wie in Folgerung 21.6 die zugehörige Gramsche Matrix. Dann gilt:*

(a) *Die Bilinearform $b$ ist genau dann symmetrisch, wenn die Matrix $A_b^B$ symmetrisch ist.*

(b) *Im Fall $K = \mathbb{R}$ ist $b$ genau dann positiv definit, wenn $A_b^B$ positiv definit ist.*

*Beweis.* Es sei $B = (x_1, \ldots, x_n)$.

(a) „⇒“: Ist $b$ symmetrisch, so folgt natürlich sofort

$$(A_b^B)^\mathsf{T} = (b(x_j, x_i))_{i,j} = (b(x_i, x_j))_{i,j} = A_b^B.$$

„⇐“: Ist umgekehrt $A_b^B$ symmetrisch, so gilt nach Folgerung 21.6 für alle $x, y \in V$

$$b(x,y) = \Phi_B(x)^\mathsf{T} A_b^B \Phi_B(y) \overset{(*)}{=} \Phi_B(y)^\mathsf{T} (A_b^B)^\mathsf{T} \Phi_B(x) = \Phi_B(y)^\mathsf{T} A_b^B \Phi_B(x) = b(y,x),$$

wobei wir in $(*)$ gemäß Lemma 15.7 (d) die transponierte $1 \times 1$-Matrix gebildet haben.

(b) Da die Koordinatenabbildung $\Phi_B \colon V \to \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus ist, ist die Matrix $A_b^B$ genau dann positiv definit, wenn $\Phi_B(x)^\mathsf{T} A_b^B \Phi_B(x) > 0$ für alle $x \in V \setminus \{0\}$ gilt. Nach Folgerung 21.6 bedeutet dies genau $b(x,x) > 0$ für alle $x \in V \setminus \{0\}$, also dass $b$ positiv definit ist. □

**Bemerkung 21.12** (Invarianz von Symmetrie und positiver Definitheit)**.** Sind $A, A' \in K^{n \times n}$ zwei quadratische Matrizen mit $A' = T^\mathsf{T} A T$ für ein $T \in \mathrm{GL}(n, K)$, so besagt Lemma 21.11 insbesondere, dass $A'$ genau dann symmetrisch (bzw. im Fall $K = \mathbb{R}$ positiv definit) ist, wenn dies für $A$ gilt: $A'$ und $A$ beschreiben nach Satz 21.7 nämlich die gleiche Bilinearform bezüglich zweier evtl. verschiedener Basen, und nach Lemma 21.11 hängt es nur von dieser Bilinearform (aber eben nicht von der gewählten Basis) ab, ob die Matrix symmetrisch bzw. positiv definit ist.

Mit Hilfe der eingeführten Konzepte können wir nun Skalarprodukte auf reellen Vektorräumen definieren.

**Definition 21.13** (Skalarprodukte)**.** Es sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ein **Skalarprodukt** auf $V$ ist eine positiv definite, symmetrische Bilinearform $b \colon V \times V \to \mathbb{R}$. Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum $V$ zusammen mit einem Skalarprodukt heißt ein **euklidischer Raum**.

Für $x, y \in V$ schreiben wir statt $b(x,y)$ dann auch $\langle x, y \rangle$. Die (wegen der positiven Definitheit existierende) Zahl

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

heißt in Verallgemeinerung von Beispiel 21.1 die **Norm** oder **Länge** von $x$ (bezüglich $b$). Man nennt einen Vektor $x \in V$ **normiert** (bezüglich $b$), falls $\|x\| = 1$ gilt.

**Bemerkung 21.14.**

(a) Ist $V$ ein endlich erzeugter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $B$ eine Basis von $V$, so lässt sich ein Skalarprodukt auf $V$ nach Lemma 21.11 also genau durch eine positiv definite, symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beschreiben bzw. definieren (nämlich durch die Gramsche Matrix des Skalarprodukts bezüglich der Basis $B$).

(b) Die Einschränkung eines Skalarprodukts auf einen Untervektorraum ist offensichtlich wieder ein Skalarprodukt.

**Beispiel 21.15.**

(a) Ist $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix, so ist $A$ natürlich zunächst einmal symmetrisch. Gilt nun zusätzlich $\lambda_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$, so ist $A$ auch positiv definit, denn für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ist

$$x^\mathsf{T} A x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 > 0,$$

da in dieser Summe alle Terme nicht-negativ sind und mindestens einer positiv ist. Also ist die zugehörige Bilinearform

$$\langle x, y \rangle = x^\mathsf{T} A y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Speziell für $A = E$ erhalten wir daraus die schon in Beispiel 21.5 (b) betrachtete Bilinearform

$$\langle x, y \rangle = x^\mathsf{T} y = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Sie ist die direkte Verallgemeinerung von Beispiel 21.1 und wird das **Standardskalarprodukt** auf $\mathbb{R}^n$ (und nach Bemerkung 21.14 (b) auch auf Unterräumen von $\mathbb{R}^n$) genannt.

Gilt analog $\lambda_i < 0$ / $\lambda_i \geq 0$ / $\lambda_i \leq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$, so ist die oben konstruierte Bilinearform negativ definit / positiv semidefinit / negativ semidefinit. Sie ist indefinit, falls es unter den $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ eine positive und eine negative Zahl gibt.

(b) Die in Beispiel 21.5 (a) schon betrachtete reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ist positiv definit: Für alle $x \in \mathbb{R}^2$ ist zunächst

$$x^\mathsf{T} A x = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2 x_1 + 4x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + 3x_2^2 \geq 0,$$

und die Gleichheit kann hier nur gelten für $x_1 + x_2 = x_2 = 0$, also für $x = 0$. Da $A$ auch symmetrisch ist, ist die durch diese Matrix (bezüglich der Standardbasis) definierte Bilinearform

$$\langle x, y \rangle = x^\mathsf{T} A y = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 4x_2 y_2$$

also ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

(c) Betrachten wir reelle $m \times n$-Matrizen über ihre Einträge als Vektoren in $\mathbb{R}^{mn}$, so können wir das Standardskalarprodukt zweier Matrizen $A = (a_{i,j})_{i,j}$ und $B = (b_{i,j})_{i,j}$ im Vektorraum $\mathbb{R}^{m\times n}$ mit der Definition des Matrixprodukts und der Spur schreiben als

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j} = \operatorname{Spur}\left(A^\mathsf{T} B\right).$$

Wir werden dies in Zukunft als das *Standardskalarprodukt auf Matrizenräumen* wählen.

**Konstruktion 21.16** (Skalarprodukte auf Funktionenräumen)**.** Auch auf unendlich-dimensionalen Vektorräumen sind Skalarprodukte eine sehr nützliche Zusatzstruktur. Ein besonders wichtiges Beispiel dafür ist wie in Definition 11.7 der reelle Vektorraum $V = C^0([a,b])$ der stetigen Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ mit $a < b$. Wir behaupten, dass dann

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x)\, dx \qquad (*)$$

ein Skalarprodukt auf $V$ definiert. Die Existenz dieses Integrals ergibt sich hierbei sofort aus Satz 12.12. Auch die Bilinearität folgt direkt aus den Eigenschaften des Integrals in Satz 12.13; z. B. ist für $f_1, f_2, g \in V$

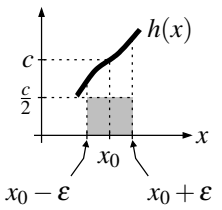
$$\begin{aligned}\langle f_1 + f_2, g\rangle &= \int_a^b (f_1(x) + f_2(x))g(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)g(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)g(x)\,dx \\ &= \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle\,.\end{aligned}$$

Die Symmetrie ist natürlich offensichtlich. Für die positive Definitheit müssen wir zeigen, dass

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f(x)^2\,dx > 0$$

für alle $f \in V\setminus\{0\}$ gilt. Dies ergibt sich aus der folgenden etwas allgemeineren Aussage, die wir später noch mehrmals verwenden werden: Ist $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige Funktion, die an mindestens einer Stelle ungleich 0 ist (in unserem Fall $h(x) = f(x)^2$), so ist $\int_a^b h(x) > 0$.

Um diese Aussage zu zeigen, sei also $x_0 \in [a,b]$ mit $c := h(x_0) > 0$. Da die Funktion $h$ nach Voraussetzung stetig ist, gibt es dann nach Bemerkung 8.8 wie im Bild rechts ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $h(x) > \frac{c}{2}$ für alle $x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| \leq \varepsilon$ gilt. Unter dem Graphen von $h$ liegt also sicher ein positives Flächenstück (der Breite $2\varepsilon$ und Höhe $\frac{c}{2}$, falls $x_0$ nicht zu weit am Rand des Intervalls $[a,b]$ liegt). Da die Funktion $h$ nirgends negativ ist, folgt damit wie behauptet $\int_a^b h(x)\,dx > 0$.




Damit definiert die Formel $(*)$ ein Skalarprodukt auf $V$ – und somit nach Bemerkung 21.14 (b) auch auf allen Unterräumen davon, wie z. B. dem Unterraum $C^1([a,b])$ aller stetig differenzierbaren Funktionen oder dem Unterraum $\mathrm{Pol}([a,b],\mathbb{R})$ aller Polynomfunktionen auf $[a,b]$. Beachte, dass diese Formel ganz analog zum Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ in Beispiel 21.15 (a) ist, wenn wir die Summe über die Koordinaten von $\mathbb{R}^n$ durch ein Integral über alle Punkte im Definitionsintervall $[a,b]$ ersetzen. Auch die Interpretation z. B. der Norm $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ ist in dem Sinne analog, dass diese Norm klein ist, wenn die Funktion „nur wenig von der Nullfunktion abweicht“. Man bezeichnet dieses Skalarprodukt daher auch als *Standardskalarprodukt auf* $C^0([a,b])$.

Beachte, dass die Stetigkeit der Funktionen für die Existenz dieses Skalarprodukts entscheidend ist: Wäre z. B. für einen gegebenen Punkt $x_0 \in [a,b]$ die unstetige Funktion

$$f\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq x_0, \\ 1 & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

zugelassen, so wäre hier $\langle f, f\rangle = \int_a^b f(x)^2\,dx = 0$, obwohl $f$ nicht die Nullfunktion ist. Wir hätten in diesem Fall also nur eine positiv semidefinite Bilinearform, aber kein Skalarprodukt (siehe auch Aufgabe 21.23 (c)).

**Aufgabe 21.17.** Es sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Untersuche, ob die folgenden Abbildungen $b$ Skalarprodukte auf dem reellen Vektorraum $V$ sind:

(a) $V = \mathbb{R}^n$, $b(x,y) = x^{\mathsf{T}} A\, y$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ 0 & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

(b) $V = \mathbb{R}^{n\times n}$, $b(A,B) = \mathrm{Spur}(AB)$.

Im Rest dieses Kapitels wollen wir nun die grundlegenden Eigenschaften von euklidischen Räumen untersuchen. Da es in der Praxis öfters einmal vorkommt, werden wir den Begriff des Skalarprodukts aber zunächst noch auf den Fall von komplexen Vektorräumen erweitern.

**Konstruktion 21.18** (Skalarprodukte im komplexen Fall)**.** Wollen wir die Definition 21.13 auf einen komplexen Vektorraum übertragen, so haben wir das Problem, dass die Bedingung der positiven Definitheit über $\mathbb{C}$ zunächst einmal keinen Sinn ergibt, da $\mathbb{C}$ kein geordneter Körper ist. Dies hat zur Folge, dass wir die Norm eines Vektors nicht mehr wie gewohnt definieren können: Würden wir wie beim Standardskalarprodukt im Reellen auch in $\mathbb{C}^n$ die Formeln

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{und} \quad \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$$

verwenden, so müssten wir hier die Wurzel aus einer im Allgemeinen komplexen Zahl $x_1^2+\cdots+x_n^2$ bilden – was nicht eindeutig möglich ist und auch nicht wie gewünscht zu einer nicht-negativen reellen Zahl als Länge eines Vektors führen würde. Die Lösung dieses Problems besteht darin, im Skalarprodukt grundsätzlich jede Koordinate *eines* Eintrags komplex zu konjugieren. Es spielt dabei keine Rolle, welchen Eintrag wir dafür wählen – wir werden in dieser Vorlesung immer den ersten nehmen, aber auch die umgekehrte Konvention des zweiten Eintrags ist in der Literatur zu finden. Durch diese komplexe Konjugation erhalten wir z. B. für das Standardskalarprodukt die Formeln

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i \quad \text{und damit} \quad \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{\overline{x_1}x_1+\cdots+\overline{x_n}x_n} = \sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2},$$

was wieder zu einer reellen, nicht-negativen Länge eines Vektors führt.

Mit dem Hintergrund dieser Idee sind die entsprechenden Abänderungen für beliebige Skalarprodukte auf komplexen Vektorräumen relativ offensichtlich. Wir werden die sich daraus ergebenden Definitionen und Resultate im Folgenden nur kurz auflisten; die Beweise dieser Aussagen sind völlig analog zu denen im reellen Fall.

Es sei also $V$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine **Sesquilinearform** auf $V$ ist eine Abbildung $s\colon V\times V\to\mathbb{C}$, so dass für alle $x_1,x_2,x,y_1,y_2,y\in V$ und $\lambda\in\mathbb{C}$ die Eigenschaften

$$\begin{aligned} s(x_1+x_2,y) &= s(x_1,y)+s(x_2,y),\\ s(\lambda x,y) &= \overline{\lambda}\, s(x,y),\\ s(x,y_1+y_2) &= s(x,y_1)+s(x,y_2),\\ s(x,\lambda y) &= \lambda\, s(x,y) \end{aligned}$$

gelten. Der einzige Unterschied zu Bilinearformen besteht also in der komplexen Konjugation des Skalars in der zweiten Zeile oben – und in der Tat kommt der Begriff „Sesquilinearform“ aus dem Lateinischen und bedeutet „eineinhalbfach lineare Form“.

Die Sesquilinearformen auf $V$ bilden einen $\mathbb{C}$-Vektorraum, den wir mit $\mathrm{SLF}(V)$ bezeichnen wollen. Ist $V$ endlich-dimensional und $B=(x_1,\dots,x_n)$ eine Basis von $V$, so ist $\mathrm{SLF}(V)$ wie in Folgerung 21.6 isomorph zu $\mathbb{C}^{n\times n}$ über die beiden zueinander inversen Isomorphismen

$$\begin{aligned} &\mathbb{C}^{n\times n}\to \mathrm{SLF}(V),\ A\mapsto s_A^B && \text{mit } s_A^B(x,y) := \overline{\Phi_B(x)}^{\mathsf{T}} A\,\Phi_B(y)\\ \text{und}\quad &\mathrm{SLF}(V)\to\mathbb{C}^{n\times n},\ s\mapsto A_s^B && \text{mit } A_s^B := (s(x_i,x_j))_{i,j}, \end{aligned}$$

wobei der Querstrich über $\Phi_B(x)\in\mathbb{C}^n$ bedeutet, dass jede Komponente des Vektors komplex konjugiert wird. Man bezeichnet $A_s^B$ wieder als die *Gramsche Matrix* von $s$. Ist $B'$ eine weitere Basis von $V$, so transformieren sich die Gramschen Matrizen analog zu Satz 21.7 gemäß

$$A_s^{B'} = \overline{T}^{\mathsf{T}} A_s^B T \quad \text{mit } T = A^{B',B},$$

wobei $T=A^{B',B}$ die übliche Basiswechselmatrix ist.

Eine Sesquilinearform $s$ auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum $V$ heißt **hermitesch**, wenn $s(x,y)=\overline{s(y,x)}$ für alle $x,y\in V$. Ist dies der Fall, so erhalten wir daraus insbesondere mit $y=x$

$$s(x,x)=\overline{s(x,x)}, \quad \text{also} \quad s(x,x)\in\mathbb{R}$$

für alle $x \in V$. Wir können daher fragen, ob diese reelle Zahl immer nicht-negativ ist, und nennen eine hermitesche Sesquilinearform $s$ analog zum reellen Fall **positiv definit**, wenn $s(x,x) > 0$ für alle $x \in V$ mit $x \neq 0$.

Entsprechend heißt eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ **hermitesch**, wenn $\overline{A}^{\mathsf{T}} = A$. In diesem Fall ist $\overline{x}^{\mathsf{T}} A x \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$, denn es ist

$$\overline{\overline{x}^{\mathsf{T}} A x} = x^{\mathsf{T}} \overline{A} \overline{x} \overset{(*)}{=} \overline{x}^{\mathsf{T}} \overline{A}^{\mathsf{T}} x = \overline{x}^{\mathsf{T}} A x,$$

wobei in $(*)$ nach Lemma 15.7 (d) die transponierte $1\times 1$-Matrix gebildet wurde. Gilt sogar $\overline{x}^{\mathsf{T}} A x > 0$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$ mit $x \neq 0$, so heißt $A$ **positiv definit**. Wie in Lemma 21.11 ist eine Sesquilinearform auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum genau dann hermitesch, bzw. eine hermitesche Sesquilinearform genau dann positiv definit, wenn ihre Gramsche Matrix zu einer beliebigen Basis diese Eigenschaft besitzt. Dabei ist eine hermitesche Diagonalmatrix immer reell, und wie in Beispiel 21.15 (a) genau dann positiv definit, wenn alle Diagonaleinträge positiv sind. Die anderen Definitheitsbegriffe aus Bemerkung 21.10 (c) definiert man natürlich sowohl für hermitesche Sesquilinearformen als auch für hermitesche Matrizen analog.

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum $V$ ist nun eine positiv definite, hermitesche Sesquilinearform $s$ auf $V$, die wir dann wieder als $\langle x,y\rangle := s(x,y)$ schreiben. Ein $\mathbb{C}$-Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt heißt ein **unitärer Raum**. Für $x \in V$ nennen wir in diesem Fall wieder

$$\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle} \quad \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

die *Norm* (oder *Länge*) von $x$.

Das **Standardskalarprodukt** auf $\mathbb{C}^n$ ist dasjenige, das bezüglich der Standardbasis der Einheitsmatrix entspricht, also

$$\langle x,y\rangle = \overline{x}^{\mathsf{T}} y = \overline{x_1} y_1 + \cdots + \overline{x_n} y_n,$$

wobei $x_1,\ldots,x_n$ und $y_1,\ldots,y_n$ die Koordinaten von $x$ bzw. $y$ sind. Beachte, dass die Norm eines Vektors $x \in \mathbb{C}^n$ in diesem Fall dann

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \sqrt{(\mathrm{Re}\, x_1)^2 + (\mathrm{Im}\, x_1)^2 + \cdots + (\mathrm{Re}\, x_n)^2 + (\mathrm{Im}\, x_n)^2},$$

und damit gleich seiner Norm in $\mathbb{R}^{2n}$ bezüglich des Standardskalarprodukts ist. Das Standardskalarprodukt für Matrizen $A,B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ist $\langle A,B\rangle = \mathrm{Spur}\left(\overline{A}^{\mathsf{T}} B\right)$ analog zu Beispiel 21.15 (c).

Im Folgenden wollen wir den reellen und komplexen Fall in der Regel zusammen behandeln. Wie in der Analysis schreiben wir daher wieder $\mathbb{K}$ für einen der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und sprechen von einem *Vektorraum mit Skalarprodukt*, wenn wir einen euklidischen bzw. unitären Raum meinen. Die Formeln werden wir dabei wie in Konstruktion 21.18 mit der komplexen Konjugation schreiben, so dass sie dann für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gleichermaßen gelten – im reellen Fall ist die komplexe Konjugation dann zwar unnötig, sie schadet aber natürlich auch nicht.

Als erstes Resultat über Skalarprodukte wollen wir nun eine sehr wichtige Ungleichung beweisen.

**Satz 21.19 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung).** *In jedem Vektorraum $V$ mit Skalarprodukt gilt*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

*für alle $x,y \in V$, wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn $x$ und $y$ linear abhängig sind.*

*Beweis.* Für $y = 0$ ist die Aussage des Satzes offensichtlich, denn dann sind beide Seiten gleich Null und die Vektoren linear abhängig. Andernfalls setzen wir $\lambda := \frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}$ (und damit $\overline{\lambda} = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ wegen der

Symmetrie bzw. Hermitizität des Skalarprodukts) und folgern aus der positiven Definitheit, dass

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle \qquad (*)\\ &= \langle x,x\rangle - \lambda\langle x,y\rangle - \overline{\lambda}\langle y,x\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle y,y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle - \frac{\langle y,x\rangle\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} - \frac{\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle} + \frac{\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle} \\ &= \langle x,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle} \\ &= \|x\|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} \end{aligned}$$

und damit $|\langle x,y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$ gilt. Wurzelziehen liefert nun die behauptete Ungleichung.

Gilt in dieser Ungleichung sogar die Gleichheit, gilt also die Gleichheit in $(*)$, so ergibt sich aus der positiven Definitheit des Skalarprodukts sofort $x-\lambda y = 0$, d. h. $x$ und $y$ sind linear abhängig. Sind umgekehrt $x$ und $y$ linear abhängig, gilt also $x = \mu y$ für ein $\mu \in \mathbb{K}$, so folgt direkt

$$|\langle x,y\rangle|^2 = |\langle \mu y,y\rangle|^2 = |\overline{\mu}\langle y,y\rangle|^2 = \mu\overline{\mu}\langle y,y\rangle^2 = \langle \mu y,\mu y\rangle\langle y,y\rangle = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle = \|x\|^2\|y\|^2. \qquad \square$$

49

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung können wir die folgenden Eigenschaften der Norm herleiten:

**Satz 21.20** (Eigenschaften der Norm)**.** *In jedem Vektorraum $V$ mit Skalarprodukt gilt für alle $x,y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$:*

(a) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$*;*

(b) $\|x\| > 0$ *für alle $x \neq 0$;*

(c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ***(Dreiecksungleichung)****.*

*Beweis.*

(a) Es ist $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x,\lambda x\rangle} = \sqrt{\overline{\lambda}\lambda\langle x,x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\langle x,x\rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(b) folgt sofort aus der positiven Definitheit des Skalarprodukts.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y,x+y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 && \text{(Bemerkung 6.4)} \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 && \text{(Lemma 6.9 (b))} \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 && \text{(Satz 21.19)} \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

woraus durch Wurzelziehen die Behauptung folgt. $\square$

**Bemerkung 21.21** (Normen in der linearen Algebra und Analysis)**.** In der Analysis werden wir später normierte Vektorräume definieren als reelle oder komplexe Vektorräume mit einer reellwertigen „Normabbildung“ $\|\cdot\|$, die die drei Eigenschaften aus Satz 21.20 erfüllt (siehe Definition 23.1). In diesem Sinne sind Vektorräume mit Skalarprodukt also immer normierte Vektorräume aus der Sicht der Analysis. Wir werden allerdings sehen, dass es auch sehr viele Normen gibt, die nicht von einem Skalarprodukt kommen, z. B. in $\mathbb{R}^2$ die Summennorm $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ oder die Maximumsnorm $\|x\| = \max(|x_1|,|x_2|)$.

Wir kommen nun zum Winkel zwischen zwei Vektoren. Man definiert ihn in der Regel nur im reellen Fall und orientiert sich dabei an der geometrischen Deutung aus Beispiel 21.1 im Fall des Standardskalarprodukts.

**Konstruktion 21.22** (Winkel)**.** Es seien $V$ ein euklidischer Raum und $x,y \in V\setminus\{0\}$. Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung aus Satz 21.19 ist dann

$$\frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\cdot\|y\|} \leq 1, \qquad \text{also} \qquad -1 \leq \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \leq 1.$$

Die Zahl

$$\varphi = \arccos \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \quad \in [0,\pi]$$

ist daher wohldefiniert; wir nennen sie in Analogie zu Beispiel 21.1 den (unorientierten) **Winkel** zwischen $x$ und $y$.

**Aufgabe 21.23** (Skalarprodukte aus positiv semidefiniten Formen)**.** Zu einer symmetrischen Bilinearform $b$ auf einem reellen Vektorraum $V$ sei $U_b = \{x \in V : b(x,x) = 0\}$. Man zeige:

(a) $U_b$ ist im Allgemeinen kein Unterraum von $V$.

(b) Ist $b$ jedoch positiv semidefinit, so ist $U_b$ ein Unterraum, und $\overline{b}(\overline{x},\overline{y}) := b(x,y)$ ist ein wohldefiniertes Skalarprodukt auf $V/U_b$.

(c) Was ergibt sich aus dieser Konstruktion, wenn $V$ der Vektorraum aller stückweise stetigen Funktionen auf einem Intervall $[a,b]$ und $b(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ ist? Wie kann man sich in diesem Fall die Elemente von $U_b$ und $V/U_b$ anschaulich vorstellen?

**Aufgabe 21.24.** Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines $\mathbb{K}$-Vektorraums mit Skalarprodukt, so dass $\langle f(x),x\rangle = 0$ für alle $x \in V$. Man zeige:

(a) Ist $V$ ein unitärer Raum (also $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), so ist $f$ die Nullabbildung.

(b) Ist $V$ ein euklidischer Raum (also $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), so ist $f$ nicht notwendig die Nullabbildung.

## 21.C Orthogonalität

Der mit Abstand wichtigste Fall der Winkeldefinition ist derjenige, in dem die beiden betrachteten Vektoren „senkrecht aufeinander stehen“, also dieser Winkel gleich $\frac{\pi}{2}$ und nach Konstruktion 21.22 damit das Skalarprodukt gleich 0 ist. Im Gegensatz zu allgemeinen Winkeln können wir diesen Spezialfall auch wieder sowohl für reelle als auch für komplexe Vektorräume definieren.

**Definition 21.25** (Orthogonale Vektoren)**.** Es sei $V$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt.

(a) Zwei Vektoren $x,y \in V$ heißen **orthogonal** bzw. **senkrecht** zueinander (in Zeichen: $x \perp y$), wenn $\langle x,y\rangle = 0$ gilt. Für $x \in V$ und einen Unterraum $U \leq V$ schreiben wir kurz $x \perp U$, falls $x \perp y$ für alle $y \in U$.

(b) Eine (endliche) Familie $B = (x_1,\dots,x_n)$ von Vektoren in $V$ heißt **orthogonal**, wenn $x_i \perp x_j$ für alle $i \neq j$ gilt, also wenn die gegebenen Vektoren paarweise zueinander senkrecht sind. Gilt zusätzlich $\|x_i\| = 1$ für alle $i$, so nennt man $B$ **orthonormal**.

(c) Eine **Orthogonalbasis** bzw. **Orthonormalbasis** von $V$ ist eine orthogonale bzw. orthonormale Familie, die gleichzeitig eine Basis von $V$ ist.

**Beispiel 21.26.**

(a) Nach Definition ist der Nullvektor orthogonal zu jedem anderen Vektor.

(b) Die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ ist natürlich eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts, da in diesem Fall $\langle e_i,e_j\rangle = 0$ und $\|e_i\| = 1$ für alle $i,j = 1,\dots,n$ gilt.

**Bemerkung 21.27.**

(a) Die Orthogonalitätsrelation ist symmetrisch: Gilt $x \perp y$ für zwei Vektoren $x$ und $y$ in einem Vektorraum mit Skalarprodukt, ist also $\langle x,y\rangle = 0$, so folgt auch $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle} = \overline{0} = 0$ und damit $y \perp x$.

(b) Es sei $U$ ein Unterraum eines Vektorraums $V$ mit Skalarprodukt. Sind dann $x \in V$ und $(x_1, \dots, x_n)$ ein Erzeugendensystem von $U$, so genügt es für die Bedingung $x \perp U$ zu überprüfen, dass $x \perp x_i$ für alle $i = 1, \dots, n$: Dann gilt nämlich $\langle x, x_i \rangle = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$, also auch

$$\langle x, \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \rangle = \lambda_1 \langle x, x_1 \rangle + \dots + \lambda_n \langle x, x_n \rangle = 0$$

für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, und damit $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in U$.

(c) Natürlich ist jede orthonormale Familie auch orthogonal. Umgekehrt können wir aus einer orthogonalen Familie, die nicht den Nullvektor enthält, immer eine orthonormale Familie machen, indem wir jeden ihrer Vektoren normieren, also durch seine Länge dividieren.

Eine erste sehr nützliche Eigenschaft der Orthogonalität einer Familie ist, dass daraus bereits ihre lineare Unabhängigkeit folgt:

**Lemma 21.28.** *In einem Vektorraum mit Skalarprodukt ist jede orthogonale Familie, die nicht den Nullvektor enthält, linear unabhängig.*

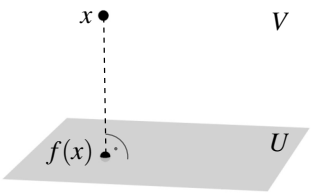
*Insbesondere ist sie damit also stets eine Orthogonalbasis des von ihr aufgespannten Unterraums.*

*Beweis.* Es sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ orthogonal mit $x_k \neq 0$ für alle $k$. Weiterhin sei $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ eine Linearkombination des Nullvektors. Bilden wir dann das Skalarprodukt von $x_k$ für ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit dieser Gleichung, so folgt

$$0 = \langle x_k, \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \rangle = \lambda_1 \langle x_k, x_1 \rangle + \dots + \lambda_n \langle x_k, x_n \rangle = \lambda_k \|x_k\|^2,$$

weil $B$ orthogonal ist und damit $\langle x_k, x_i \rangle = 0$ für alle $i \neq k$ gilt. Da weiterhin nach Voraussetzung $x_k \neq 0$ und damit aufgrund der positiven Definitheit $\|x_k\| \neq 0$ ist, folgt $\lambda_k = 0$. Dies gilt aber für alle $k$, d. h. die ursprüngliche Linearkombination ist trivial, und $B$ damit linear unabhängig. □

Wir wollen nun sehen, dass Orthogonalbasen (und damit nach Bemerkung 21.27 (c) auch Orthonormalbasen) in jedem endlichdimensionalen Vektorraum mit Skalarprodukt existieren und zu besonders schönen Eigenschaften führen. In der Tat gilt sogar eine „Basisergänzungseigenschaft“ analog zu Folgerung 14.16. Um dies zu beweisen, brauchen wir die folgende Konstruktion der orthogonalen Projektion $f \colon V \to U$ eines Vektorraums $V$ auf einen Unterraum $U$, die im Bild rechts dargestellt ist.




**Satz und Definition 21.29** (Orthogonale Projektionen)**.** *Es sei $U$ ein endlich-dimensionaler Unterraum eines Vektorraums $V$ mit Skalarprodukt. Ferner sei $(x_1, \dots, x_n)$ eine Orthogonalbasis von $U$ (wir werden in Satz 21.31 noch sehen, dass eine solche Orthogonalbasis immer existiert). Dann gilt:*

(a) *Es gibt genau eine lineare Abbildung $f \colon V \to U$ mit $x - f(x) \perp U$ für alle $x \in V$, nämlich*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x_i, x \rangle}{\|x_i\|^2} x_i.$$

*Man nennt sie die **orthogonale Projektion** von $V$ auf $U$.*

(b) *Die orthogonale Projektion $f(x)$ von $x$ aus (a) ist der eindeutig bestimmte Punkt in $U$ mit kleinstem Abstand zu $x$, d. h. es gilt $\|y - x\| > \|f(x) - x\|$ für alle $y \in U$ mit $y \neq f(x)$.*

*Beweis.*

(a) Für ein zunächst festes $x \in V$ seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ die Koordinaten des Vektors $f(x) \in U$ bezüglich der gegebenen Basis $(x_1, \ldots, x_n)$, also $f(x) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x - f(x) \perp U &\overset{21.27\,(b)}{\Leftrightarrow} \langle x_i, x - f(x)\rangle = 0 \text{ für alle } i = 1, \ldots, n \\ &\Leftrightarrow \langle x_i, x - \lambda_1 x_1 - \cdots - \lambda_n x_n\rangle = 0 \text{ für alle } i = 1, \ldots, n \\ &\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \langle x_i, x\rangle - \lambda_i \langle x_i, x_i\rangle = 0 \text{ für alle } i = 1, \ldots, n, \\ &\Leftrightarrow \lambda_i = \frac{\langle x_i, x\rangle}{\|x_i\|^2} \text{ für alle } i = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ die Orthogonalität der Basis verwendet haben. Die Bedingung $x - f(x) \perp U$ für alle $x \in V$ ist also äquivalent zur angegebenen Formel für $f$ und legt $f$ damit eindeutig fest. Da diese Vorschrift offensichtlich auch linear in $x$ ist, ist Teil (a) des Satzes damit gezeigt.

(b) Es sei $y \in U$ mit $y \neq f(x)$, also $y = f(x) + u$ für ein $u \in U \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|y - x\|^2 &= \|f(x) + u - x\|^2 = \langle f(x) + u - x, f(x) + u - x\rangle \\ &= \underbrace{\langle f(x) - x, f(x) - x\rangle}_{=\|f(x)-x\|^2} + \underbrace{\langle u, u\rangle}_{=\|u\|^2} + \underbrace{\langle f(x) - x, u\rangle + \langle u, f(x) - x\rangle}_{=0 \text{ wegen } f(x)-x \perp U}. \end{aligned}$$

Wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts ist aber $\|u\| > 0$, und damit wie behauptet $\|y - x\|^2 > \|f(x) - x\|^2$. □

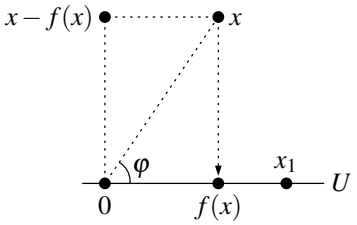
**Bemerkung 21.30.** Die Formel für die orthogonale Projektion aus Satz 21.29 hat eine einfache geometrische Deutung, die im Bild unten rechts für einen eindimensionalen Unterraum $U = \mathrm{Lin}(x_1)$ von $V = \mathbb{R}^2$ dargestellt ist.

Die Abbildung konstruiert in diesem Fall zu einem $x \in V$ das Lot auf den Unterraum $U$; der so entstehende Punkt ist die orthogonale Projektion $f(x)$. Nach Konstruktion 21.22 ist damit

$$\|f(x)\| = \|x\| \cos\varphi = \|x\| \cdot \frac{\langle x_1, x\rangle}{\|x_1\| \cdot \|x\|} = \frac{\langle x_1, x\rangle}{\|x_1\|},$$

und damit wie in Satz 21.29

$$f(x) = \|f(x)\| \cdot \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{\langle x_1, x\rangle}{\|x_1\|^2} x_1.$$




Beachte, dass $f(x)$ wie in Satz 21.29 auch anschaulich im Bild der Punkt in $U$ ist, der am nächsten an $x$ liegt, und dass die Differenz $x - f(x)$ senkrecht zu $x_1$ ist.

Nach Satz 21.29 können wir einen Vektor konstruieren, der auf einem gegebenen Unterraum $U$ senkrecht steht, indem wir von einem beliebigen Vektor $x \notin U$ seine orthogonale Projektion auf $U$ abziehen. Dies ist nun die Grundidee des folgenden Verfahrens zur Bestimmung von Orthogonalbasen.

**Satz 21.31 (Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren).** *Es seien $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt und $U \leq V$ ein Untervektorraum. Dann lässt sich jede Orthogonalbasis von $U$ zu einer Orthogonalbasis von $V$ ergänzen.*

*Insbesondere besitzt also jeder endlich-dimensionale Vektorraum mit Skalarprodukt eine Orthogonalbasis (und damit nach Bemerkung 21.27 (c) auch eine Orthonormalbasis).*

*Beweis.* Der Beweis dieses Satzes ist konstruktiv und erlaubt daher auch eine einfache (iterative) Konstruktion solcher Orthogonalbasen.

Es sei $(x_1,\dots,x_n)$ die gegebene Orthonormalbasis von $U$. Ist bereits $U=V$, so sind wir natürlich fertig. Ansonsten wählen wir einen beliebigen Vektor $x \in V \setminus U$ und setzen

$$x_{n+1} := x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x_i, x\rangle}{\|x_i\|^2} x_i.$$

Nach Satz 21.29 (a) ist dieser Vektor senkrecht zu $U$. Außerdem ist er wegen $x \notin U = \mathrm{Lin}(x_1,\dots,x_n)$ nicht der Nullvektor. Nach Lemma 21.28 ist $(x_1,\dots,x_{n+1})$ also eine Orthogonalbasis eines Unterraums $U' = \mathrm{Lin}(x_1,\dots,x_{n+1}) \supsetneq U$.

Ist jetzt $U'=V$, so sind wir fertig. Ansonsten setzen wir das obige Verfahren iterativ mit dem neuen Unterraum $U'$ fort, bis wir genügend Vektoren gefunden haben. □

**Beispiel 21.32.** Wir wollen eine Orthogonal- bzw. Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ für das Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle = x^\mathsf{T} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} y$$

aus Beispiel 21.15 (b) bestimmen. Den ersten Vektor können wir dabei (ungleich 0) beliebig wählen, z. B. $x_1 = e_1$. Für den zweiten Vektor starten wir mit einem beliebigen Element von $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Lin}(x_1)$, z. B. $x = e_2$, und subtrahieren davon wie im Beweis von Satz 21.31 seine orthogonale Projektion auf $\mathrm{Lin}(x_1)$. Mit

$$\langle x_1, e_2\rangle = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{und} \quad \|x_1\|^2 = \langle x_1, x_1\rangle = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

erhalten wir so

$$x_2 = e_2 - \frac{\langle x_1, e_2\rangle}{\|x_1\|^2} x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Familie $(x_1, x_2)$ ist also eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich des gegebenen Skalarprodukts. Um eine Orthonormalbasis zu bestimmen, müssen wir diese beiden Vektoren noch normieren: Wegen $\|x_1\|^2 = 1$ und

$$\|x_2\|^2 = \langle x_2, x_2\rangle = \begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

ist eine Orthonormalbasis

$$\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \frac{x_2}{\|x_2\|}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

**Bemerkung 21.33** (Gram-Schmidt als Normalformensatz)**.** Es sei $V$ ein endlich erzeugter Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle x, y\rangle = b(x,y)$. Ist dann $B = (x_1,\dots,x_n)$ gemäß Satz 21.31 eine Orthonormalbasis von $V$, so ist die Gramsche Matrix von $b$ bezüglich $B$ nach Folgerung 21.6 gerade

$$A_b^B = \left(\langle x_i, x_j\rangle\right)_{i,j} = E_n,$$

denn es ist ja $\langle x_i, x_j\rangle$ gleich 1 für $i=j$ und 0 für $i \neq j$. In Analogie zu den Normalformaussagen aus Satz 17.29 und Folgerung 20.14 kann man die Existenz von Orthonormalbasen damit auch so auffassen, dass es zu jedem Skalarprodukt eine Basis gibt, bezüglich der die Gramsche Matrix die Einheitsmatrix ist, also diese sehr einfache Form hat.

Da sich Gramsche Matrizen unter Basiswechsel wie in Satz 21.7 bzw. Konstruktion 21.18 verhalten, ist die entsprechende Aussage in Matrixform gemäß Lemma 21.11 also, dass es zu jeder positiv definiten, symmetrischen (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. hermiteschen (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ gibt mit $\overline{T}^\mathsf{T} A T = E$: Man muss in die Spalten von $T$ einfach eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle x, y\rangle = \bar{x}^\mathsf{T} A y$ schreiben. Für das Skalarprodukt und die Orthonormalbasis aus Beispiel 21.32 ergibt sich also z. B.

$$T^\mathsf{T} A T = E \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

was man durch direkte Berechnung des Matrixprodukts auch sofort bestätigen kann.

Eine Verallgemeinerung dieser Aussage auf nicht notwendig positiv definite symmetrische Bilinearformen bzw. hermitesche Sesquilinearformen werden wir in Satz 22.35 bzw. Bemerkung 22.36 (b) kennenlernen.

50

**Folgerung 21.34.** *Für jede symmetrische bzw. hermitesche Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt:*

(a) $\det A \in \mathbb{R}$.

(b) *Ist $A$ zusätzlich positiv definit, so ist sogar* $\det A > 0$.

*Beweis.*

(a) Da die Determinante ausschließlich über Summen und Produkte in $\mathbb{K}$ definiert ist und die komplexe Konjugation nach Lemma 6.9 (a) mit diesen Rechenoperationen vertauscht, gilt zunächst einmal $\overline{\det A} = \det \overline{A}$. Nach der Voraussetzung $\overline{A}^{\mathsf{T}} = A$ folgt damit

$$\overline{\det A} = \det \overline{A} = \det \overline{A}^{\mathsf{T}} = \det A,$$

also $\det A \in \mathbb{R}$.

(b) Nach Bemerkung 21.33 gibt es eine invertierbare Matrix $T$ mit $\overline{T}^{\mathsf{T}} A T = E$. Damit ist analog zur Rechnung in (a)

$$1 = \det E = \det \overline{T}^{\mathsf{T}} \cdot \det A \cdot \det T = \det A \cdot \det \overline{T} \cdot \det T = \det A \cdot |\det T|^2,$$

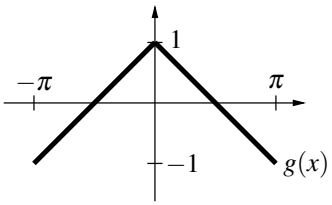
woraus $\det A > 0$ folgt. □

**Aufgabe 21.35.**

(a) Für welche $m,n \in \mathbb{N}$ definiert $\langle f,g\rangle := \sum_{i=0}^{m} f(i)\,g(i)$ ein Skalarprodukt auf $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

(b) Berechne für dieses Skalarprodukt eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ im Fall $m = n = 2$.

**Aufgabe 21.36.** Es sei $V = C^0([-\pi,\pi])$ der reelle Vektorraum aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle f,g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$ wie in Konstruktion 21.16. Wir betrachten darin das Element $g \in V$ definiert durch $g(x) := 1 - \frac{2}{\pi}|x|$.




Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ seien weiterhin $f_n \in V$ mit $f_n(x) := \cos nx$, und $U_n := \mathrm{Lin}(f_1,\dots,f_n) \le V$.

(a) Zeige, dass $(f_1,\dots,f_n)$ für alle $n$ eine Orthogonalbasis von $U_n$ ist.

(b) Berechne für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die orthogonale Projektion $g_n$ von $g$ auf $U_n$ (also die Funktion in $U_n$, die nach Satz 21.29 (b) von $g$ den kleinsten Abstand hat, d. h. sie am besten approximiert).

(c) Zeichne die Funktionen $g_n$ für kleine $n$ mit einem Computer und vergleiche sie mit der ursprünglichen Funktion $g$.

Wir wollen nun noch drei interessante Anwendungen von Orthonormalbasen betrachten. Die erste betrifft Abbildungsmatrizen bzw. Basiswechselmatrizen: Bisher mussten wir zur Berechnung solcher Matrizen wie in Bemerkung 19.1 Koordinatendarstellungen von Vektoren berechnen und die dabei erhaltenen Koeffizienten in die Spalten einer Matrix schreiben. Dies erfordert die Lösung linearer Gleichungssysteme und ist daher recht rechenaufwendig. In einem Vektorraum mit Skalarprodukt ist die Berechnung solcher Matrizen bezüglich Orthonormalbasen dagegen deutlich einfacher:

**Satz 21.37** (Abbildungsmatrizen zu Orthonormalbasen)**.** *Es seien $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt und $B = (x_1,\dots,x_n)$ eine Orthonormalbasis von $V$.*

(a) *Für alle $x \in V$ gilt*

$$x = \langle x_1,x\rangle\, x_1 + \cdots + \langle x_n,x\rangle\, x_n.$$

*Mit anderen Worten ist in der Koordinatendarstellung $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ bezüglich $B$ also $\lambda_i = \langle x_i,x\rangle$ für alle $i = 1,\dots,n$.*

(b) *Ist $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus, so ist die Abbildungsmatrix von $f$ bezüglich $B$ gleich* $A_f^B = \big(\langle x_i, f(x_j)\rangle\big)_{i,j}$.

(c) *Ist $B' = (y_1, \dots, y_n)$ eine weitere Basis von $V$, so ist die zugehörige Basiswechselmatrix gleich* $A^{B',B} = \big(\langle x_i, y_j\rangle\big)_{i,j}$.

*Beweis.*

(a) Bilden wir für $i = 1, \dots, n$ das Skalarprodukt von $x_i$ mit der Gleichung $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, so erhalten wir wegen der Orthonormalität von $B$ sofort $\langle x_i, x\rangle = \lambda_i \langle x_i, x_i\rangle = \lambda_i$.

(b) Nach Satz 16.26 ist der Eintrag in Zeile $i$ und Spalte $j$ von $A_f^B$ genau die $i$-te Koordinate von $f(x_j)$ bezüglich $B$, nach (a) also $\langle x_i, f(x_j)\rangle$.

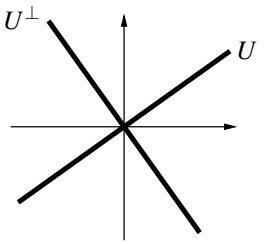
(c) Nach Definition 16.38 ist der Eintrag in Zeile $i$ und Spalte $j$ von $A^{B',B}$ genau die $i$-te Koordinate von $y_j$ bezüglich $B$, nach (a) also $\langle x_i, y_j\rangle$. □

In der zweiten Anwendung von Orthonormalbasen geht es um Komplemente von Unterräumen in endlich erzeugten Vektorräumen: Wir wissen ja nach Beispiel 17.10 und Satz 17.11 bereits, dass solche Komplemente zwar immer existieren, aber in der Regel nicht eindeutig bestimmt sind. Falls im zugrundeliegenden Vektorraum aber ein Skalarprodukt gegeben ist, wollen wir jetzt sehen, dass es zu jedem Unterraum ein besonderes Komplement gibt – nämlich das sogenannte *orthogonale Komplement* – das immer eindeutig bestimmt ist.

**Definition 21.38** (Orthogonales Komplement)**.** Es seien $V$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $U \leq V$ ein Unterraum von $V$. Dann nennen wir die Menge

$$\begin{aligned} U^\perp &:= \{x \in V : x \perp U\} \\ &= \{x \in V : \langle x, y\rangle = 0 \text{ für alle } y \in U\} \end{aligned}$$

das **orthogonale Komplement** von $U$. (Das Bild rechts illustriert dies für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt.)




**Satz 21.39.** *Es seien $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt und $U \leq V$ ein Unterraum. Dann ist das orthogonale Komplement $U^\perp$ ein Komplement von $U$ im Sinne von Definition 17.8, d. h. es gilt $V = U \oplus U^\perp$.*

*Beweis.* Nach Satz 21.31 können wir eine Orthonormalbasis $(x_1, \dots, x_k)$ von $U$ finden und zu einer Orthonormalbasis $(x_1, \dots, x_n)$ von $V$ ergänzen. Nach Bemerkung 17.12 ist $U' := \mathrm{Lin}(x_{k+1}, \dots, x_n)$ dann ein Komplement von $U$. Es genügt also zu zeigen, dass $U' = U^\perp$ gilt: Für einen Vektor $x \in V$ mit der Darstellung $x = \langle x_1, x\rangle x_1 + \dots + \langle x_n, x\rangle x_n$ wie in Satz 21.37 (a) folgt unmittelbar

$$x \in U' = \mathrm{Lin}(x_{k+1}, \dots, x_n) \Leftrightarrow \langle x_1, x\rangle = \dots = \langle x_k, x\rangle = 0 \overset{21.27\,(b)}{\Leftrightarrow} x \in U^\perp.$$ □

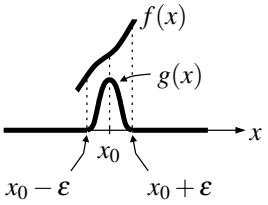
**Bemerkung 21.40.** Der Beweis von Satz 21.39 zeigt auch, wie man das orthogonale Komplement eines Unterraums $U$ in $V$ berechnen kann: Man ergänzt eine Orthonormalbasis $(x_1, \dots, x_k)$ von $U$ zu einer Orthonormalbasis $(x_1, \dots, x_n)$ von $V$; die dabei neu hinzugenommenen Vektoren $(x_{k+1}, \dots, x_n)$ bilden dann eine Orthonormalbasis von $U^\perp$.

Da in diesem Fall natürlich auch $x_1, \dots, x_k$ die Vektoren $x_{k+1}, \dots, x_n$ zu einer Orthonormalbasis von $V$ ergänzen, folgt aus dieser Beschreibung auch sofort, dass $(U^\perp)^\perp = U$ gilt.

**Beispiel 21.41** (Orthogonale Komplemente in unendlich-dimensionalen Vektorräumen)**.** Als „abschreckendes Beispiel" dafür, dass Satz 21.39 nicht so selbstverständlich ist, wie er vielleicht scheint, wollen wir kurz zeigen, dass diese Aussage für unendlich-dimensionale Vektorräume im Allgemeinen *falsch* ist, dass das orthogonale Komplement dann also nicht unbedingt immer ein Komplement im Sinne von Definition 17.8 ist. Dazu sei $V = C^0([a,b])$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ aus Konstruktion

21.16. Wir betrachten darin den Unterraum $U = C^1([a,b]) \subsetneq V$ aller stetig differenzierbaren Funktionen und werden zeigen, dass $U^\perp = \{0\}$ gilt, so dass also insbesondere $U + U^\perp = U \neq V$, d. h. $U^\perp$ kein Komplement von $U$ ist.

Dazu sei $f \in V\backslash\{0\}$ beliebig; wir werden zeigen, dass $f \notin U^\perp$ gilt. Wegen $f \neq 0$ gibt es ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \neq 0$; ohne Einschränkung sei $f(x_0) > 0$. Da $f$ stetig ist, gibt es dann nach Bemerkung 8.8 ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$ ist. Es sei nun $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetig differenzierbare Funktion wie rechts im Bild, also mit $g(x_0) > 0$ und $g(x) = 0$ für $|x - x_0| \geq \varepsilon$. Dann ist $fg$ stetig und nicht-negativ auf $[a,b]$ mit $f(x_0)g(x_0) > 0$, und damit $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx > 0$ nach Konstruktion 21.16.




Wir haben also ein $g \in U$ gefunden mit $\langle f,g\rangle \neq 0$. Damit ist $f \notin U^\perp$, und da $f \in V\backslash\{0\}$ beliebig war, folgt wie behauptet $U^\perp = \{0\}$.

Unsere letzte Anwendung der Existenz von Orthonormalbasen in diesem Kapitel ist das folgende einfache Kriterium für die positive Definitheit einer Matrix.

**Satz 21.42 (Hurwitz-Kriterium).** *Es sei $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine symmetrische (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. hermitesche (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Matrix. Für $k = 1,\dots,n$ bezeichnen wir mit $A_k = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,k} \in \mathbb{K}^{k\times k}$ die Matrizen, die man erhält, wenn man von $A$ nur die ersten $k$ Zeilen und Spalten betrachtet. (Beachte, dass ihre Determinanten nach Folgerung 21.34 (a) in jedem Fall reell sind.)*

*Dann ist $A$ genau dann positiv definit, wenn $\det A_k > 0$ für alle $k = 1,\dots,n$.*

*Beweis.* Es sei $b$ die zu $A$ gehörige symmetrische Bilinearform bzw. hermitesche Sesquilinearform auf $\mathbb{K}^n$, so dass also $A = (b(e_i,e_j))_{i,j}$ bzw. $b(x,y) = \overline{x}^{\mathsf{T}} A y$ für alle $x,y \in \mathbb{K}^n$ gilt.

„⇒“: Ist $A$ positiv definit und $b$ damit ein Skalarprodukt, so ist nach Bemerkung 21.14 (b) auch die Einschränkung von $b$ auf den Unterraum $\mathrm{Lin}(e_1,\dots,e_k)$ ein Skalarprodukt. Die zugehörige Gramsche Matrix $(b(e_i,e_j))_{i,j=1,\dots,k} = A_k$ ist also ebenfalls positiv definit und hat damit nach Folgerung 21.34 (b) eine positive Determinante.

„⇐“: Wir zeigen die Aussage mit Induktion über $n$, der Induktionsanfang für $n = 1$ ist trivial.

Für den Induktionsschritt $n \to n+1$ bemerken wir zunächst, dass nach Annahme insbesondere $\det A_k > 0$ für $k = 1,\dots,n$ gilt. Damit ist $A_n$ nach Induktionsvoraussetzung positiv definit, und wir können nach Satz 21.31 eine Orthonormalbasis $(x_1,\dots,x_n)$ für das zugehörige Skalarprodukt finden, das gerade die Einschränkung von $b$ auf $\mathrm{Lin}(e_1,\dots,e_n)$ ist. Bilden wir nun wie im Gram-Schmidt-Verfahren in Satz 21.31 den Vektor

$$x_{n+1} := e_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} b(x_i, e_{n+1})\, x_i \qquad \notin \mathrm{Lin}(x_1,\dots,x_n)$$

(beachte, dass hier wegen $b(x_i,x_i) = 1$ kein Nenner auftritt), so gilt wieder

$$b(x_j,x_{n+1}) = b(x_j,e_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n} b(x_i,e_{n+1})b(x_j,x_i) = b(x_j,e_{n+1}) - b(x_j,e_{n+1}) = 0$$

für alle $j = 1,\dots,n$, da $(x_1,\dots,x_n)$ orthonormal ist. Damit hat die Gramsche Matrix von $b$ bezüglich der Basis $B = (x_1,\dots,x_{n+1})$ die Form

$$A_b^B = \overline{T}^{\mathsf{T}} A\, T = (b(x_i,x_j))_{i,j} = \left(\begin{array}{c|c} E_n & 0 \\ \hline 0 & b(x_{n+1},x_{n+1}) \end{array}\right),$$

wobei wir wie üblich $T = (x_1 \,|\, \cdots \,|\, x_{n+1})$ gesetzt haben. Insbesondere folgt damit

$$b(x_{n+1},x_{n+1}) = \det A_b^B = \det\left(\overline{T}^{\mathsf{T}} A\, T\right) = \overline{\det T} \cdot \det A \cdot \det T = |\det T|^2 \cdot \det A > 0.$$

Die Matrix $A_b^B$ ist also eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen, und damit nach Beispiel 21.15 (a) (bzw. Konstruktion 21.18) positiv definit. Daher ist auch $b$, und somit auch $A$ positiv definit. □

**Bemerkung 21.43.** Die Determinanten von quadratischen Teilmatrizen einer gegebenen Matrix $A$ werden oft auch *Minoren* von $A$ genannt, die in Satz 21.42 auftretenden Determinanten $\det A_k$ bezeichnet man als *Hauptminoren* von $A$. Das Hurwitz-Kriterium ist daher auch unter dem Namen *Hauptminorenkriterium* bekannt.

**Beispiel 21.44.** Wir betrachten noch ein letztes Mal die symmetrische reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 21.15 (b), die wir dort schon durch eine direkte Rechnung als positiv definit erkannt haben. Mit dem Hurwitz-Kriterium folgt dies (in der Notationen des Satzes) nun auch einfacher aus

$$\det A_1 = \det(1) = 1 > 0 \qquad \text{und} \qquad \det A_2 = \det A = 3 > 0.$$

**Aufgabe 21.45.** Für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

(a) Für welche $\lambda$ ist $A$ positiv definit? Für welche $\lambda$ ist $A$ negativ definit?

(b) Wir betrachten nun $V = \mathbb{R}^3$ als euklidischen Vektorraum mit dem Skalarprodukt $b_A$ für den Wert $\lambda = 1$. Berechne zu $U = \mathrm{Lin}(e_1) \leq V$ eine Orthonormalbasis des orthogonalen Komplements $U^\perp$.

## 21.D Dualräume

Zu einem $K$-Vektorraum $V$ haben wir bisher zwei Möglichkeiten betrachtet, aus Abbildungen neue Vektorräume zu bilden: den Vektorraum $\mathrm{End}(V)$ aller linearen Abbildungen $V \to V$ und den Vektorraum $\mathrm{BLF}(V)$ aller Bilinearformen $V \times V \to K$. Wir wollen nun in den abschließenden beiden Abschnitten dieses Kapitels noch kurz zwei weitere Konstruktionen dieser Art untersuchen. Als Erstes betrachten wir dazu in diesem Abschnitt den Raum $\mathrm{Hom}(V,K)$ aller linearen Abbildungen $V \to K$. Er ist natürlich ein Spezialfall des Vektorraums $\mathrm{Hom}(V,W)$ aller Morphismen in einen weiteren $K$-Vektorraum $W$, den wir in Abschnitt 16.C schon ausführlich betrachtet haben, hat aber trotzdem – gerade auch im Zusammenhang mit den in diesem Kapitel eingeführten Skalarprodukten – ein paar besondere Eigenschaften.

**Definition 21.46** (Linearformen und Dualräume)**.** Eine lineare Abbildung von einem $K$-Vektorraum $V$ in seinen Grundkörper $K$ bezeichnet man als **Linearform** auf $V$. Der Vektorraum $\mathrm{Hom}(V,K)$ aller dieser Linearformen wird auch mit $V^*$ bezeichnet und der **Dualraum** von $V$ genannt.

**Konstruktion 21.47** (Duale Basen)**.** Es sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit gegebener Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$.

(a) Nach Folgerung 16.27 (a) gibt es einen Isomorphismus

$$V^* \to K^{1\times n},\ f \mapsto (f(x_1) \,|\, \cdots \,|\, f(x_n)),$$

der jeder Linearform $f\colon V \to K$ seine Abbildungsmatrix bezüglich der Basis $B$ im Startraum zuordnet. Insbesondere ist also $\dim V^* = n = \dim V$, und $V^*$ damit nach Abschnitt 16.B isomorph zu $V$.

(b) Unter dem Isomorphismus $V^* \cong K^{1\times n}$ aus (a) entspricht der $i$-te Einheitsvektor in $K^{1\times n} \cong K^n$ offensichtlich genau der Linearform, die auf $x_i$ den Wert 1 und auf allen anderen Vektoren von $B$ den Wert 0 annimmt; man bezeichnet sie in der Regel mit $x_i^* \in V^*$. Da Isomorphismen Basen auf Basen abbilden, ist $B^* := (x_1^*, \dots, x_n^*)$ damit eine Basis von $V^*$. Sie heißt die **duale Basis** zu $B$ und ist also bestimmt durch

$$x_i^*(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

für alle $i, j = 1, \dots, n$. (Beachte, dass ein dualer Basisvektor $x_i^*$ damit nicht nur von $x_i$, sondern von allen $x_1, \dots, x_n$ abhängt.)

51

Beachte, dass wir in Konstruktion 21.47 (a) zwar gesehen haben, dass ein endlich-dimensionaler Vektorraum $V$ immer isomorph zu seinem Dualraum $V^*$ ist, dass wir einen konkreten Isomorphismus zwischen $V$ und $V^*$ aber erst dann hinschreiben können, wenn wir eine Basis von $V$ (und damit einen Isomorphismus $V \cong K^n$) gewählt haben. Man sagt daher auch, dass es zwischen $V$ und $V^*$ zwar einen Isomorphismus, aber keinen *natürlichen Isomorphismus* gibt.

Diese Situation ändert sich, wenn $V$ ein euklidischer Raum ist: In diesem Fall wollen wir jetzt zeigen, dass das gegebene Skalarprodukt eine natürliche Einbettung von $V$ in $V^*$ liefert, die im endlich-dimensionalen Fall sogar natürlichen Isomorphismus zwischen $V$ und $V^*$ liefert.

**Satz 21.48** (Natürliche Einbettung eines euklidischen Vektorraums in seinen Dualraum)**.** *Es sei $V$ ein euklidischer Vektorraum.*

(a) *Es gibt einen natürlichen injektiven Morphismus $\Gamma\colon V \to V^*$, wobei $\Gamma(x) \in V^*$ für alle $x \in V$ definiert ist durch $\Gamma(x)(y) = \langle x, y\rangle$ für alle $y \in V$.*

(b) *Ist $V$ endlich-dimensional, so ist die Abbildung $\Gamma$ aus (a) sogar ein natürlicher Isomorphismus.*

*Beweis.*

(a) Wir müssen die folgenden Dinge überprüfen:

- Für alle $x \in V$ ist $\Gamma(x)$ wirklich in $V^*$, also eine lineare Abbildung von $V$ nach $K$, weil das Skalarprodukt im zweiten Eintrag linear ist: Für alle $y_1, y_2 \in V$ gilt
$$\Gamma(x)(y_1+y_2) = \langle x, y_1+y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle = \Gamma(x)(y_1) + \Gamma(x)(y_2).$$
Die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation zeigt man analog.
- Die Abbildung $\Gamma\colon V \to V^*$ ist linear, weil das Skalarprodukt im ersten Eintrag linear ist: Für alle $x_1, x_2 \in V$ und $y \in V$ gilt
$$\Gamma(x_1+x_2)(y) = \langle x_1+x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle = \Gamma(x_1)(y) + \Gamma(x_2)(y),$$
und damit $\Gamma(x_1+x_2) = \Gamma(x_1) + \Gamma(x_2)$ in $V^*$. Auch hier folgt die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation wieder analog.
- Der Morphismus $\Gamma$ ist injektiv, d. h. $\operatorname{Ker}\Gamma = \{0\}$: Es sei $x \in V$ mit $\Gamma(x) = 0 \in V^*$, d. h. $\Gamma(x)$ ist die Nullabbildung von $V$ nach $K$. Insbesondere ist dann also $\Gamma(x)(x) = 0 \in K$. Nach Definition von $\Gamma$ bedeutet dies $\langle x, x\rangle = 0$, wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts also $x = 0$.

(b) Im endlich-dimensionalen Fall folgt aus der Dimensionsformel für Morphismen aus Folgerung 16.30 (c) sofort
$$\dim \operatorname{Im}\Gamma = \dim V - \dim \operatorname{Ker}\Gamma \overset{\text{(a)}}{=} \dim V \overset{21.47\ \text{(a)}}{=} \dim V^*,$$
und damit auch die Surjektivität von $\Gamma$. □

**Bemerkung 21.49.**

(a) Für einen endlich-dimensionalen euklidischen Raum $V$ bildet der natürliche Isomorphismus $\Gamma$ aus Satz 21.48 (b) jede Orthonormalbasis $B = (x_1, \ldots, x_n)$ auf ihre duale Basis $B^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ wie in Konstruktion 21.47 (b) ab, denn für alle $i, j = 1, \ldots, n$ gilt
$$\begin{aligned}\Gamma(x_i)(x_j) = \langle x_i, x_j\rangle &= \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \\ &= x_i^*(x_j),\end{aligned}$$
und damit $\Gamma(x_i) = x_i^*$.

(b) Für einen unitären Raum $V$ ist die wie in Satz 21.48 konstruierte Abbildung $\Gamma\colon V \to V^*$ zwar noch definiert und injektiv, aber nicht mehr linear (und damit kein Isomorphismus), da das Skalarprodukt im ersten Eintrag nicht linear ist und somit der obige Beweis der Linearität von $\Gamma$ nicht funktioniert.

**Beispiel 21.50.** Analog zu Beispiel 21.41 verhalten sich unendlich-dimensionale Vektorräume auch in Satz 21.48 wieder anders als endlich-dimensionale, da die Einbettung $\Gamma$ in den Dualraum dann kein Isomorphismus mehr ist. Als konkretes Beispiel dafür betrachten wir wieder einmal den Raum $V = C^0([a,b])$ mit dem Standardskalarprodukt. Dabei wählen wir $a$ und $b$ mit $a < 0 < b$ und betrachten die Auswerteabbildung

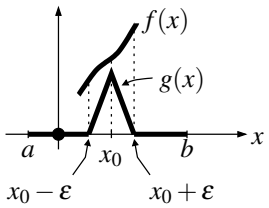
$$\delta\colon V \to \mathbb{R},\ g \mapsto g(0).$$

Sie ist offensichtlich linear, und damit ein Element des Dualraums $V^*$. Allerdings wollen wir jetzt sehen, dass sie nicht im Bild der natürlichen Abbildung $\Gamma\colon V \to V^*$ liegt, also dass es kein $f \in V$ gibt mit $\Gamma(f) = \delta$, d. h. mit $\Gamma(f)(g) = \delta(g)$, und damit mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(0) \quad \text{für alle } g \in C^0([a,b]). \tag{$*$}$$

Wir zeigen dies mit einem Widerspruchsbeweis analog zu Beispiel 21.41 und nehmen also an, dass es doch eine solche stetige Funktion $f \in C^0([a,b])$ gibt.

Ist dann $x_0 \in [a,b]\backslash\{0\}$ beliebig, so muss notwendigerweise $f(x_0) = 0$ gelten: Wäre nämlich $f(x_0) \neq 0$, wobei wir ohne Einschränkung $f(x_0) > 0$ annehmen können, so gibt es nach Bemerkung 8.8 zunächst ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$. Wir können nun wie im Bild rechts eine stetige Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ wählen mit $g(x_0) > 0$, $g(0) = 0$ und $g(x) = 0$ für $|x - x_0| \geq \varepsilon$. Dann ist $fg$ stetig und nicht-negativ auf $[a,b]$ mit $f(x_0)g(x_0) > 0$, und damit nach Konstruktion 21.16




$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx > 0 = g(0)$$

im Widerspruch zu $(*)$. Also ist $f(x_0) = 0$ für alle $x_0 \neq 0$. Da $f$ stetig ist, müsste $f$ dann aber schon die Nullfunktion sein – was natürlich auch $(*)$ widerspricht. Also kann es keine solche Funktion $f$ geben, d. h. die Abbildung $\Gamma\colon V \to V^*$ ist in diesem Fall nicht surjektiv.

**Bemerkung 21.51** (Die „Deltafunktion“)**.** Man kann das Ergebnis von Beispiel 21.50 auch so interpretieren: Da $\Gamma$ eine natürliche Einbettung ist, können wir den Funktionenraum $C^0([a,b])$ über $\Gamma$ als Teilmenge von $(C^0([a,b]))^*$ auffassen und so zu einem „erweiterten Funktionenraum“ $(C^0([a,b]))^*$ übergehen (in dem „Funktionen“ nicht mehr stetige Abbildungen von $[a,b]$ nach $\mathbb{R}$ sind, sondern lineare Abbildungen von $C^0([a,b])$ nach $\mathbb{R}$). Dies ist völlig analog z. B. zur Konstruktion der komplexen Zahlen aus den reellen in Kapitel 6: Dort haben wir zunächst einen neuen Körper $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ eingeführt, dann eine natürliche Einbettung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto (x,0)$ gefunden, und dies benutzt, um $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{C}$ als eine Erweiterung von $\mathbb{R}$ aufzufassen.

Wie wir oben gesehen haben, existiert in diesem „erweiterten Funktionenraum“ $(C^0([a,b]))^*$ nun z. B. das Element $\delta$, das sich gemäß $(*)$ so verhält, als würde es $g(0)$ zurück liefern, wenn man $\delta$ mit einer Funktion $g$ multipliziert und darüber integriert. Dieses Element $\delta$, das insbesondere in der Physik eine große Rolle spielt, bezeichnet man oft als die „*Deltafunktion*“, auch wenn es sich hierbei nicht um eine Funktion im eigentlichen, sondern nur im oben betrachteten erweiterten Sinne handelt.

Oft wird $\delta$ in der Physik ohne Erwähnung von Dualräumen als eine „Funktion“ eingeführt, die die Eigenschaft von $f$ in $(*)$ hat, also insbesondere (wie wir oben gesehen haben) überall außer in 0 gleich 0 ist und (mit $g = 1$) $\int_a^b \delta(x)\,dx = 1$ erfüllt – d. h. in 0 „gerade so unendlich“ ist, dass die Fläche unter ihrem Graphen (der Breite 0 und Höhe $\infty$) gleich 1 ist. Dies erscheint natürlich zunächst unsinnig, lässt sich aber wie eben gesehen durch eine Erweiterung des Funktionenraums zu einer mathematisch exakten Theorie machen. Derartige Fragestellungen – also wie sich die lineare

Algebra auf unendlich-dimensionalen Funktionenräumen verhält – sind die Inhalte der sogenannten Funktionalanalysis, in die ihr im zweiten Studienjahr eine Einführung hören könnt.

**Aufgabe 21.52** (Duale Abbildungen)**.** Zu einer linearen Abbildung $f\colon V \to W$ zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen definiert man die *duale Abbildung* $f^*$ zwischen den Dualräumen $W^*$ und $V^*$ durch

$$f^*\colon W^* \to V^*,\ \varphi \mapsto \varphi \circ f.$$

Man zeige:

(a) Die Abbildungen $f^*\colon W^* \to V^*$ und $\operatorname{Hom}(V,W) \to \operatorname{Hom}(W^*,V^*),\ f \mapsto f^*$ sind ebenfalls linear.

(b) Sind $B$ und $C$ Basen von $V$ bzw. $W$ mit dualen Basen $B^*$ bzw. $C$, so hat $f^*$ die Abbildungsmatrix

$$A_{f^*}^{C^*,B^*} = \left(A_f^{B,C}\right)^{\mathsf{T}}.$$

(c) Sind $V$ und $W$ euklidische Räume, so gibt es nach Satz 21.48 natürliche Isomorphismen $\Gamma_V\colon V \to V^*$ und $\Gamma_W\colon W \to W^*$ zu den Dualräumen. Konstruieren wir damit aus $f^*$ die Abbildung $g := \Gamma_V^{-1} \circ f^* \circ \Gamma_W\colon W \to V$, so gilt

$$\langle x, f(y)\rangle = \langle g(x), y\rangle \quad \text{für alle } x \in V \text{ und } y \in W.$$

**Aufgabe 21.53** (*Bidualräume*)**.** Zeige, dass für jeden endlich-dimensionalen Vektorraum $V$ die natürliche Abbildung

$$\Psi\colon V \to (V^*)^* \quad \text{mit} \quad \Psi(x)(\varphi) = \varphi(x) \quad \text{für alle } x \in V \text{ und } \varphi \in V^*$$

ein Isomorphismus ist. Nimmt man von einem solchen Vektorraum zweimal den Dualraum, erhält man also auf natürliche Art wieder den Ausgangsraum – was auch den Namen „Dualraum“ erklärt.

## 21.E Tensorprodukte

Dieser abschließende Abschnitt von Kapitel 21 gehört nicht mehr zum eigentlichen Stoff der „Grundlagen der Mathematik“ und wird in der Vorlesung nur bei genügend zur Verfügung stehender Zeit behandelt. Er wird im Rest dieses Skripts nicht mehr benötigt.

Wir wollen hier untersuchen, wie ganz generell Produkte von Vektoren konstruiert werden können. Sind z. B. $x$ und $y$ zwei Vektoren in einem $K$-Vektorraum $V$, so wollen wir auf möglichst allgemeine Art ein Produkt $x \otimes y$ definieren, das wieder ein Vektor in einem noch zu bestimmenden Vektorraum ist. Dabei soll „allgemein“ bedeuten, dass das Produkt außer der Bilinearität keine weiteren speziellen Eigenschaften hat: Sind $B = (x_1,\dots,x_n)$ eine Basis von $V$ und $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ bzw. $y = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n$ mit $\lambda_1,\dots,\lambda_n,\mu_1,\dots,\mu_n \in K$ die Koordinatendarstellungen der beiden Vektoren, so möchten wir bilinear

$$x \otimes y = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^n \mu_j x_j\right) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j\, x_i \otimes x_j$$

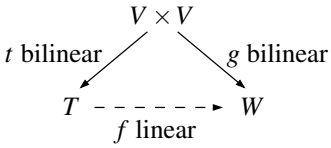
rechnen können, dieser Ausdruck soll aber nicht weiter vereinfacht werden können, d. h. die hier auftretenden Produkte $x_i \otimes x_j$ sollen voneinander unabhängig sein. Mit anderen Worten wollen wir einen Vektorraum konstruieren, der eine Basis bestehend aus den Produkten $x_i \otimes x_j$ für $i,j \in \{1,\dots,n\}$ hat. Diesen Vektorraum werden wir dann das Tensorprodukt von $V$ mit sich selbst nennen und mit $V \otimes V$ bezeichnen. Ein allgemeines Element in $V \otimes V$ – auch Tensor genannt – wird dann also die Form $\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\, x_i \otimes x_j$ für gewisse $a_{i,j} \in K$ haben, und hat damit bezüglich der Basis $B$ eine Darstellung durch die Matrix $(a_{i,j})_{i,j} \in K^{n\times n}$. Solche Matrixdarstellungen sehen natürlich sehr analog zur Situation bei Bilinearformen und Endomorphismen aus, und in der Tat werden wir in Beispiel 21.59 noch sehen, dass $\operatorname{BLF}(V)$ und $\operatorname{End}(V)$ letztlich Spezialfälle von Tensorprodukten sind.

Wir wollen diese Idee nun zu einer exakten Definition machen. Da diese Definition natürlich nicht von der Wahl einer Basis von $V$ abhängen sollte, müssen wir sie aber (leider) etwas abstrakter formulieren als in der obigen Motivation.

**Definition 21.54** (Tensorprodukt)**.** Es sei $V$ ein $K$-Vektorraum.

(a) Analog zu Definition 21.2 heißt auch eine Abbildung $f\colon V \times V \to W$ in einen weiteren $K$-Vektorraum $W$ **bilinear**, wenn sie linear in beiden Komponenten ist.

(b) Ein **Tensorprodukt** von $V$ mit sich selbst ist ein Vektorraum $T$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung $t\colon V \times V \to T$, so dass die folgende Eigenschaft gilt: Zu jeder *bilinearen* Abbildung $g\colon V \times V \to W$ in einen weiteren Vektorraum $W$ gibt es (wie im Bild rechts gestrichelt eingezeichnet) eine eindeutig bestimmte *lineare* Abbildung $f\colon T \to W$ mit $f \circ t = g$.

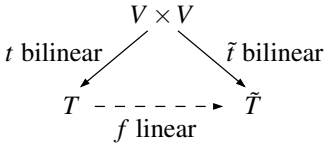


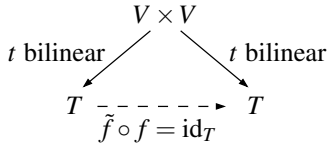

Wir werden gleich in Lemma 21.55 sehen, dass ein solcher Vektorraum $T$ (zusammen mit $t$) im Fall der Existenz bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Wir bezeichnen ihn mit $V \otimes V$, und für $x, y \in V$ das Bild $t(x,y)$ mit $x \otimes y$ (es ist dann also $g(x,y) = f(x \otimes y)$). Die Elemente von $V \otimes V$ bezeichnet man als **Tensoren**.

**Lemma 21.55** (Eindeutigkeit des Tensorproukts)**.** *Für jeden $K$-Vektorraum $V$ ist ein Tensorprodukt wie in Definition 21.54 bis auf natürliche Isomorphie eindeutig bestimmt.*

*Mit anderen Worten: Sind $T$ und $\tilde{T}$ mit zugehörigen bilinearen Abbildungen $t\colon V \times V \to T$ bzw. $\tilde{t}\colon V \times V \to \tilde{T}$ zwei Tensorprodukte, so gibt es einen eindeutigen Isomorphismus $f\colon T \to \tilde{T}$ mit $f \circ t = \tilde{t}$ und $f^{-1} \circ \tilde{t} = t$.*

*Beweis.* Da $T$ mit $t$ ein Tensorprodukt ist, existiert nach Definition 21.54 (b) für die bilineare Abbildung $\tilde{t}\colon V \times V \to \tilde{T}$ wie im Bild unten links eine eindeutige lineare Abbildung $f\colon T \to \tilde{T}$ mit $f \circ t = \tilde{t}$. Durch Vertauschen der Rollen von $T$ und $\tilde{T}$ erhalten wir analog ein eindeutiges $\tilde{f}\colon \tilde{T} \to T$ mit $\tilde{f} \circ \tilde{t} = t$.




Es ist also $t = \tilde{f} \circ \tilde{t} = \tilde{f} \circ f \circ t$. Betrachten wir nun noch einmal die Eigenschaft aus Definition 21.54 (b) für das Diagramm oben rechts, so erhalten wir daraus eine *eindeutige* lineare Abbildung $T \to T$, die mit $t$ verkettet wieder $t$ ergibt. Da sowohl $\tilde{f} \circ f$ als auch $\mathrm{id}_T$ dies erfüllen, folgt also $\tilde{f} \circ f = \mathrm{id}_T$. Analog ist auch $f \circ \tilde{f} = \mathrm{id}_{\tilde{T}}$, d. h. $f$ ist ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung $\tilde{f}$. □

Natürlich wollen wir jetzt auch noch sehen, dass ein solches Tensorprodukt auch wirklich existiert. Obwohl man zeigen kann, dass dies für beliebige Vektorräume gilt, wollen wir uns dabei hier der Einfachheit halber auf den endlich-dimensionalen Fall beschränken und im folgenden Beweis mit gewählten Basen bzw. Koordinaten arbeiten. Lemma 21.55 stellt uns sicher, dass unser Ergebnis am Ende nicht von diesen Wahlen abhängen wird.

**Satz 21.56** (Existenz des Tensorprodukts)**.** *Es sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Dann gilt:*

(a) *Es gibt ein (nach Lemma 21.55 eindeutig bestimmtes) Tensorprodukt $V \otimes V$.*

(b) *Ist $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von $V$, so bilden die Tensoren $x_i \otimes x_j$ für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ eine Basis von $V \otimes V$. Insbesondere ist also $\dim(V \otimes V) = (\dim V)^2$.*

*Beweis.* Es sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von $V$. Wie in Konstruktion 21.47 (b) bezeichnen wir die dazu duale Basis von $V^*$ mit $B^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$.

Wir setzen nun $T := K^{n \times n}$ und werden zeigen, dass die (offensichtlich bilineare) Abbildung

$$t\colon V \times V \to T,\ (x,y) \mapsto \left(x_k^*(x)\, x_l^*(y)\right)_{k,l}$$

ein Tensorprodukt im Sinne von Definition 21.54 (b) ist. Beachte dazu zunächst, dass nach Konstruktion der dualen Basis für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$x_i \otimes x_j := t(x_i, x_j) = \left(x_k^*(x_i)\, x_l^*(x_j)\right)_{k,l} = E_{i,j}$$

gilt, wobei $E_{i,j} \in K^{n\times n}$ die Matrix bezeichnet, die an der Stelle $(i, j)$ eine 1 und sonst überall Nullen hat. Da diese Matrizen natürlich eine Basis von $K^{n\times n}$ bilden, zeigt dies bereits (b).

Es sei nun $g\colon V \times V \to W$ eine beliebige bilineare Abbildung in einen weiteren Vektorraum $W$. Möchten wir nun wie in Definition 21.54 (b) eine lineare Abbildung $f\colon T \to W$ mit $f \circ t = g$ finden, so muss $f$ auf der Basis $(E_{i,j})_{i,j}$ von $K^{n\times n}$ zwangsläufig die Werte

$$f(E_{i,j}) = f(t(x_i, x_j)) = g(x_i, x_j) \quad \in W \tag{1}$$

annehmen. Nach Folgerung 16.32 existiert nun aber genau eine solche lineare Abbildung $f$, und erfüllt darüber hinaus für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in K$

$$f\left(t\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^n \mu_j x_j\right)\right) \overset{(2)}{=} \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j f(t(x_i, x_j)) \overset{(1)}{=} \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j g(x_i, x_j) \overset{(3)}{=} g\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^n \mu_j x_j\right),$$

also wie verlangt $f \circ t = g$ (wobei wir in (2) Linearität von $f$ und die Bilinearität von $t$ benutzt haben, und in (3) die Bilinearität von $g$). Dies zeigt auch den Teil (a) des Satzes. □

**Bemerkung 21.57** (Matrixdarstellung von Tensoren)**.** Es sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis eines endlich-dimensionalen Vektorraums $V$. Da die Tensoren $x_i \otimes x_j$ für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ nach Satz 21.56 (b) eine Basis von $V \otimes V$ bilden – so wie wir es uns am Anfang dieses Abschnitts gewünscht hatten – sind Matrizen der Größe $n \times n$ und Tensoren in $V \otimes V$ also nach Wahl von $B$ über den Isomorphismus

$$K^{n\times n} \to V \otimes V,\ (a_{i,j})_{i,j} \mapsto \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\, x_i \otimes x_j$$

dasselbe (in der Tat sind dies auch genau die Matrizen, die im Beweis von Satz 21.56 auftraten).

**Bemerkung 21.58** (Verallgemeinerung des Tensorprodukts)**.** Mit exakt denselben Ideen und nur etwas aufwändigerer Notation lassen sich sowohl die Definition als auch die Konstruktion des Tensorprodukts leicht in zwei Richtungen verallgemeinern:

(a) Die beiden Vektorräume im Produkt müssen nicht dieselben sein: Man kann auch bilineare Abbildungen auf $V \times W$ und somit Tensorprodukte $V \otimes W$ für zwei verschiedene Vektorräume $V$ und $W$ betrachten. Im endlich-dimensionalen Fall mit Basen $B = (x_1, \dots, x_n)$ von $V$ und $C = (y_1, \dots, y_m)$ von $W$ erhalten wir dann analog zu Bemerkung 21.57 einen Isomorphismus

$$K^{n\times m} \to V \otimes W,\ (a_{i,j})_{i,j} \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{i,j}\, x_i \otimes y_j;$$

es ist also $\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$.

(b) Durch die Untersuchung multilinearer statt bilinearer Abbildungen können auch Tensorprodukte von mehr als zwei Vektorräumen gebildet werden. Betrachten wir z. B. das dreifache Tensorprodukt eines endlich-dimensionalen Vektorraums $V$ mit sich selbst, so erhalten wir nach Wahl einer Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$ von $V$ einen Isomorphismus

$$K^{n\times n\times n} \to V \otimes V \otimes V,\ (a_{i,j,k})_{i,j,k} \mapsto \sum_{i,j,k=1}^n a_{i,j,k}\, x_i \otimes x_j \otimes x_k;$$

d. h. solche Tensoren entsprechen nach einer Basiswahl einem Tupel von Skalaren $a_{i,j,k} \in K$, die man sich in einem dreidimensionalen (statt wie bei Matrizen in einem zweidimensionalen) Schema angeordnet vorstellen kann. Insbesondere ist damit $\dim(V \otimes V \otimes V) = (\dim V)^3$; Entsprechendes gilt natürlich auch für mehr als drei Faktoren.

52

**Beispiel 21.59** (Bilinearformen und Endomorphismen als Tensoren)**.** Es sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Dann können wir die folgenden früher betrachteten Vektorräume auch als Tensorprodukte auffassen:

(a) $V^* \otimes V^*$ ist auf natürliche Art isomorph zu $\mathrm{BLF}(V)$ (während die Elemente von $V^*$ *Linear*formen auf $V$ sind, sind die Elemente von $V^* \otimes V^*$ also *Bilinear*formen auf $V \times V$):

Um dies zu zeigen, betrachten wir zunächst die Abbildung

$$V^* \times V^* \to \mathrm{BLF}(V),\ (\varphi, \psi) \mapsto b_{\varphi,\psi} \quad \text{mit} \quad b_{\varphi,\psi}(x,y) = \varphi(x)\,\psi(y) \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

Man rechnet sofort nach, dass $b_{\varphi,\psi}$ wirklich eine Bilinearform ist, und dass diese Abbildung bilinear ist. Nach Definition 21.54 (b) gibt es dazu also eine natürliche lineare Abbildung

$$V^* \otimes V^* \to \mathrm{BLF}(V) \quad \text{mit} \quad \varphi \otimes \psi \mapsto b_{\varphi,\psi} \quad \text{für alle } \varphi, \psi \in V^*. \tag{1}$$

Um nun zu überprüfen, dass sie tatsächlich ein Isomorphismus ist, können wir Koordinaten verwenden. Dazu wählen wir eine Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$ von $V$ mit dualer Basis $B^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ von $V^*$, und zeigen, dass die zugehörigen Koordinatendarstellungen der Tensoren in $V^* \otimes V^*$ und Bilinearformen in $\mathrm{BLF}(V)$ über die Abbildung (1) übereinstimmen: Zur Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{n \times n}$ gehört nach Bemerkung 21.58 (a) der Tensor $\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\, x_i^* \otimes x_j^*$, dazu gemäß (1) die Bilinearform $\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\, b_{x_i^*, x_j^*}$, und diese hat nach Folgerung 21.6 wieder die Gramsche Matrix

$$\left( \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\, b_{x_i^*, x_j^*}(x_k, x_l) \right)_{k,l} = \left( \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\, x_i^*(x_k)\, x_j^*(x_l) \right)_{k,l} = (a_{k,l})_{k,l} = A.$$

(b) Analog zu (a) zeigt man, dass $V \otimes V^*$ auf natürliche Art isomorph zu $\mathrm{End}(V)$ ist:

Die Abbildung

$$V \times V^* \mapsto \mathrm{End}(V),\ (v, \varphi) \mapsto f_{v,\varphi} \quad \text{mit} \quad f_{v,\varphi}(x) = \varphi(x)\, v \quad \text{für alle } x \in V$$

ist wieder bilinear und bestimmt damit nach Definition 21.54 (b) eine natürliche lineare Abbildung

$$V \otimes V^* \to \mathrm{End}(V) \quad \text{mit} \quad v \otimes \varphi \mapsto f_{v,\varphi} \quad \text{für alle } v \in V \text{ und } \varphi \in V^*. \tag{2}$$

Wie in (a) benutzen wir nun wieder eine Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$ und die zugehörigen Koordinatendarstellungen, um zu überprüfen, dass dies ein Isomorphismus ist: Zu einer Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{n \times n}$ gehört der Tensor $\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\, x_i \otimes x_j^*$, dazu nach (2) der Endomorphismus $\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\, f_{x_i, x_j^*}$, und dieser hat nach Definition 16.26 die Abbildungsmatrix

$$\begin{aligned} &\left( \Phi_B\left( \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\, x_j^*(x_1)\, x_i \right) \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \Phi_B\left( \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\, x_j^*(x_n)\, x_i \right) \right) \\ = &\left( \Phi_B\left( \sum_{i=1}^n a_{i,1}\, x_i \right) \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \Phi_B\left( \sum_{i=1}^n a_{i,n}\, x_i \right) \right) = A. \end{aligned}$$

In der Tat ist der Unterschied zwischen (a) und (b) – also dass $\mathrm{BLF}(V)$ auf natürliche Art isomorph ist zu $V^* \otimes V^*$, aber $\mathrm{End}(V)$ zu $V \otimes V^*$ – aus der Sicht der Tensorprodukte der Grund dafür, warum diese Objekte zwar beide durch Matrizen beschrieben werden können, aber unter einem Basiswechsel ein anderes Transformationsverhalten haben.

**Aufgabe 21.60.** Es sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Man zeige:

(a) Jeder Tensor $\alpha \in V \otimes V$ lässt sich als $\alpha = \sum_{i=1}^r x_i \otimes y_i$ schreiben, wobei sowohl $(x_1, \dots, x_r)$ als auch $(y_1, \dots, y_r)$ linear unabhängig ist.

(b) In (a) ist die Zahl $r$ durch $\alpha$ eindeutig bestimmt, und zwar gleich dem Rang einer beliebigen Matrixdarstellung von $\alpha$.

**Aufgabe 21.61.** Es sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Aus der bilinearen Abbildung

$$V \times V^* \to K,\ (x, \varphi) \mapsto \varphi(x)$$

ergibt sich nach Definition 21.54 (b) die Existenz einer (auf natürliche Art definierten) zugehörigen linearen Abbildung $g\colon V \otimes V^* \to K$ mit $g(x \otimes \varphi) = \varphi(x)$. Andererseits wissen wir aus Beispiel

21.59 (b), dass $V \otimes V^*$ auf natürliche Art isomorph ist zu $\mathrm{End}(V)$; wir können $g$ also auch als lineare Abbildung $g\colon \mathrm{End}(V) \to K$ auffassen.

Diese Abbildung $g$ ist eine, die wir schon lange kennen – um welche handelt es sich?

**Aufgabe 21.62** (Polynome in mehreren Variablen als Tensorprodukte)**.** Es sei $\mathrm{Pol}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellen Polynomfunktionen in zwei Variablen, d. h. der Raum aller Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die geschrieben werden können als

$$f(x,y) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_{i,j} x^i y^j \quad \text{für alle } x,y \in \mathbb{R},$$

wobei nur endlich viele $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ ungleich 0 sind. Wie in Bemerkung 3.23 kann man auch hier beweisen, dass für jede solche Polynomfunktion ihre Koeffizienten $a_{i,j}$ eindeutig bestimmt sind (das braucht ihr nicht zu tun).

(a) Zeige, dass $\mathrm{Pol}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) = \mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \otimes \mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ gilt (also dass $\mathrm{Pol}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ zusammen mit einer geeigneten bilinearen Abbildung $\mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ die Bedingungen aus Definition 21.54 (b) erfüllt).

(b) Gib ein Beispiel für ein Polynom $f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) = \mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \otimes \mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ an, das nicht als $f = p \otimes q$ mit $p,q \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ geschrieben werden kann.

# 22. Endomorphismen euklidischer und unitärer Räume

Im letzten Kapitel haben wir ausführlich Vektorräume studiert, auf denen die Zusatzstruktur eines Skalarprodukts gegeben ist. Wir wollen nun sehen, welche Vorteile und Vereinfachungen uns diese Zusatzstruktur bei der Untersuchung von Endomorphismen gibt, wenn diese in gewissem Sinne mit dem gegebenen Skalarprodukt verträglich sind. Das zentrale Resultat dieses Kapitels wird schließlich der sogenannte Spektralsatz in Abschnitt 22.C sein, der die Diagonalisierbarkeit solcher Endomorphismen garantiert und – wie wir sehen werden – so universell ist, dass er bei geschickter Anwendung auch Aussagen über Bilinearformen bzw. Sesquilinearformen und in Abschnitt 22.D sogar über lineare Abbildungen mit unterschiedlichem Start- und Zielraum machen kann.

## 22.A Orthogonale und unitäre Abbildungen

Die natürlichste Verträglichkeitsbedingung zwischen Morphismen und Skalarprodukten ist vermutlich die folgende.

**Definition 22.1** (Orthogonale und unitäre Abbildungen und Matrizen)**.**

(a) Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines Vektorraums $V$ mit Skalarprodukt heißt **orthogonal** (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. **unitär** (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), wenn

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

für alle $x, y \in V$ gilt.

(b) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **orthogonal**, wenn $A^\mathsf{T} A = E$ gilt, also wenn $A$ invertierbar ist mit $A^{-1} = A^\mathsf{T}$. Wir bezeichnen die Menge aller orthogonalen $n \times n$-Matrizen mit $\mathrm{O}(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$.

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt **unitär**, wenn $\overline{A}^\mathsf{T} A = E$ gilt, also wenn $A$ invertierbar ist mit $A^{-1} = \overline{A}^\mathsf{T}$. Die Menge aller unitären $n \times n$-Matrizen wird mit $\mathrm{U}(n) \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ bezeichnet.

Wie üblich schreiben wir diese Bedingung im Folgenden oft in beiden Fällen als $\overline{A}^\mathsf{T} A = E$.

**Bemerkung 22.2.**

(a) Ist $(x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von $V$, so genügt es, die Bedingung eines orthogonalen bzw. unitären Morphismus $f\colon V \to V$ für alle Paare von Basisvektoren zu überprüfen: Ist nämlich $\langle f(x_i), f(x_j)\rangle = \langle x_i, x_j\rangle$ für alle $i, j = 1, \dots, n$, so gilt wegen der Linearität von $f$ und der Bilinearität bzw. Sesquilinearität des Skalarprodukts auch für alle $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ und $y = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n$

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\lambda_i}\mu_j \langle f(x_i), f(x_j)\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\lambda_i}\mu_j \langle x_i, x_j\rangle = \langle x, y\rangle .$$

(b) Eine Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist genau dann orthogonal bzw. unitär, wenn die Spalten von $A$ eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts bilden: Nach Definition des Matrixprodukts ist nämlich

$$\overline{A}^\mathsf{T} A = \left( \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{j,i}}\, a_{j,k} \right)_{i,k} .$$

Der Ausdruck $\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{j,i}}\, a_{j,k}$ ist aber genau das Standardskalarprodukt der $i$-ten mit der $k$-ten Spalte von $A$. Daher bilden diese Spalten genau dann eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts, wenn dieser Ausdruck gleich 1 für $i = k$ und 0 für $i \neq k$ ist, also wenn $\overline{A}^\mathsf{T} A = E$ ist.

Es wäre also vermutlich konsequenter, eine reelle Matrix $A$ mit $A^\mathsf{T}A = E$ ortho*normal* statt ortho*gonal* zu nennen. Die Bezeichnung „orthogonale Matrix“ ist in der Literatur aber so üblich, dass wir hier nicht davon abweichen wollen.

Wir wollen nun als Erstes zeigen, dass die oben eingeführten Bedingungen für orthogonale und unitäre Matrizen wie erwartet denen der zugehörigen Endomorphismen entsprechen, sofern es sich um Abbildungsmatrizen bezüglich einer Orthonormalbasis handelt.

**Lemma 22.3.** *Es sei $V$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $B$ eine Orthonormalbasis von $V$. Dann gilt:*

(a) *Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ ist genau dann orthogonal bzw. unitär, wenn $A_f^B$ orthogonal bzw. unitär ist.*

(b) *Eine weitere Basis $B'$ von $V$ ist genau dann auch eine Orthonormalbasis, wenn $A^{B',B}$ orthogonal bzw. unitär ist.*

*Beweis.* Es seien $B = (x_1, \dots, x_n)$ und $A = \big(\langle x_i, y_j\rangle\big)_{i,j}$ für Vektoren $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\overline{A}^\mathsf{T} A &= \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\langle x_j, y_i\rangle}\,\langle x_j, y_k\rangle\right)_{i,k} && \text{(Definition 15.5)}\\
&= \left(\left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle x_j, y_i\rangle\, x_j, y_k \right\rangle\right)_{i,k} && \text{(Sesquilinearität des Skalarprodukts)}\\
&= \big(\langle y_i, y_k\rangle\big)_{i,k}. && \text{(Satz 21.37 (a))}
\end{aligned}$$

(a) Setzen wir $y_i = f(x_i)$ für alle $i$ und eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$, so ist $A = A_f^B$ nach Satz 21.37 (b). Damit ist diese Abbildungsmatrix genau dann orthogonal bzw. unitär, wenn $\big(\langle f(x_i), f(x_k)\rangle\big)_{i,k} = E = \big(\langle x_i, x_k\rangle\big)_{i,k}$ ist, also nach Bemerkung 22.2 (a) wenn $f$ orthogonal bzw. unitär ist.

(b) Setzen wir $B' = (y_1, \dots, y_n)$, so ist $A = A^{B',B}$ nach Satz 21.37 (c). Damit ist diese Basiswechselmatrix genau dann orthogonal bzw. unitär, wenn $\big(\langle y_i, y_k\rangle\big)_{i,k} = E$ ist, also wenn $B'$ eine Orthonormalbasis ist. □

**Bemerkung 22.4.**

(a) Gemäß Definition 22.1 (b) sind orthogonale bzw. unitäre Matrizen invertierbar. Mit Lemma 22.3 (a) bedeutet dies also, dass orthogonale bzw. unitäre Endomorphismen eines endlich erzeugten Vektorraums mit Skalarprodukt stets Isomorphismen sind.

(b) Nach Definition 22.1 (a) erhalten orthogonale und unitäre Abbildungen Skalarprodukte, und damit auch Längen, Orthogonalität und (im reellen Fall) Winkel zwischen zwei Vektoren. Über $\mathbb{R}$ kann man sie sich daher als Drehungen und Spiegelungen (bzw. Kombinationen davon) vorstellen. Dieselbe Interpretation gilt dann nach Lemma 22.3 (a) natürlich auch für orthogonale Matrizen.

Das folgende Beispiel zeigt dies deutlich im zweidimensionalen Fall (für höhere Dimensionen siehe auch Aufgabe 22.10).

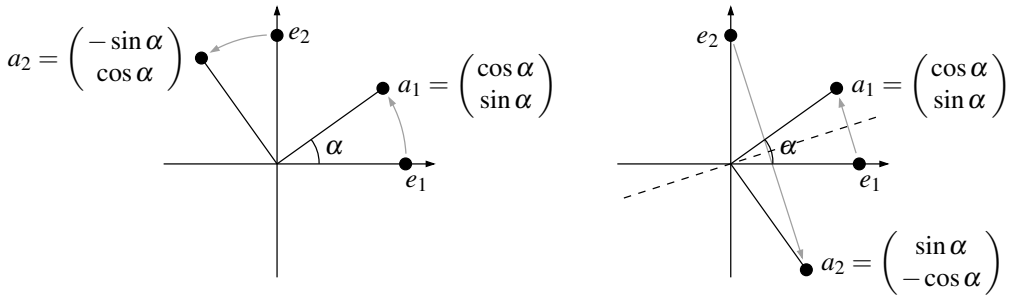
**Beispiel 22.5** ($\mathrm{O}(2)$)**.** Nach Bemerkung 22.2 (b) ist eine Matrix $A = (a_1 \,|\, a_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ genau dann orthogonal, wenn bezüglich des Standardskalarprodukts

$$\|a_1\| = 1, \quad \|a_2\| = 1 \quad \text{und} \quad a_1 \perp a_2$$

gilt. Also liegt $a_1$ auf dem Einheitskreis und lässt sich nach der Polarkoordinatendarstellung aus Satz 9.27 damit als

$$a_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ schreiben, und $a_2$ entsteht aus $a_1$ durch eine positive oder negative Drehung um $\frac{\pi}{2}$. Wir erhalten also die folgenden beiden Möglichkeiten:




(a) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

In beiden Fällen werden die Einheitsvektoren $e_1$ und $e_2$ durch $A$ (wie durch die grauen Pfeile angedeutet) auf $a_1$ und $a_2$ abgebildet. In (a) haben wir damit geometrisch eine Drehung um den Winkel $\alpha$ wie in Beispiel 19.13, in (b) eine Spiegelung an der gestrichelt eingezeichneten Winkelhalbierenden zwischen $e_1$ und $a_1$. Damit lassen sich alle Elemente von $\mathrm{O}(2)$ in der Tat wie erwartet durch Drehungen und Spiegelungen beschreiben.

Zum Ende dieses Abschnitts wollen wir noch kurz die wichtigsten Eigenschaften orthogonaler und unitärer Matrizen untersuchen.

**Lemma 22.6** ($\mathrm{O}(n)$ und $\mathrm{U}(n)$ als Gruppen)**.** *Sind $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ orthogonal bzw. unitär, so auch $AB$ und $A^{-1}$. Insbesondere sind $\mathrm{O}(n)$ und $\mathrm{U}(n)$ also Gruppen (siehe Definition 3.1) mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung; man nennt sie die* ***orthogonalen*** *bzw.* ***unitären Gruppen****.*

*Beweis.* Es gelte $\overline{A}^{\mathsf{T}}A = \overline{B}^{\mathsf{T}}B = E$. Dann folgt zunächst

$$\overline{AB}^{\mathsf{T}}AB \overset{15.7\,(\mathrm{d})}{=} \overline{B}^{\mathsf{T}}\overline{A}^{\mathsf{T}}AB = \overline{B}^{\mathsf{T}}EB = \overline{B}^{\mathsf{T}}B = E.$$

Wegen $\overline{A^{-1}} \cdot \overline{A} = \overline{A^{-1}A} = \overline{E} = E$ ist außerdem $\overline{A^{-1}} = \overline{A}^{-1}$, und damit auch

$$\overline{A^{-1}}^{\mathsf{T}}A^{-1} = \left(\overline{A}^{-1}\right)^{\mathsf{T}}A^{-1} \overset{15.20\,(\mathrm{a})}{=} \left(\overline{A}^{\mathsf{T}}\right)^{-1}A^{-1} \overset{15.18\,(\mathrm{a})}{=} \left(A\overline{A}^{\mathsf{T}}\right)^{-1} = E^{-1} = E.$$

Also sind $AB$ und $A^{-1}$ ebenfalls orthogonal bzw. unitär. Da auch die Einheitsmatrix (als neutrales Element) orthogonal bzw. unitär ist, sind $\mathrm{O}(n)$ und $\mathrm{U}(n)$ damit Gruppen bezüglich der Matrixmultiplikation. □

**Lemma 22.7** (Determinante und Eigenwerte orthogonaler und unitärer Matrizen)**.** *Für jede orthogonale oder unitäre Matrix $A$ gilt:*

(a) $|\det A| = 1$.

(b) *Ist $\lambda$ ein Eigenwert von $A$, so ist $|\lambda| = 1$.*

*Beweis.*

(a) Wie im Beweis von Folgerung 21.34 (a) ist $\overline{\det A} = \det\overline{A}$. Aus $\overline{A}^{\mathsf{T}}A = E$ ergibt sich damit sofort $1 = \det E = \det\overline{A}^{\mathsf{T}} \cdot \det A = \overline{\det A} \cdot \det A = |\det A|^2$.

(b) Gilt $Ax = \lambda x$ für ein $x \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$, so ist auch $\overline{A}\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x}$, nach Transponieren also $\overline{x}^{\mathsf{T}}\overline{A}^{\mathsf{T}} = \overline{\lambda}\overline{x}^{\mathsf{T}}$. Zusammen erhalten wir mit $\overline{A}^{\mathsf{T}}A = E$ so

$$\overline{x}^{\mathsf{T}}x = \overline{x}^{\mathsf{T}}\overline{A}^{\mathsf{T}}Ax = \overline{\lambda}\overline{x}^{\mathsf{T}} \cdot \lambda x = |\lambda|^2 \cdot \overline{x}^{\mathsf{T}}x,$$

wegen $\overline{x}^{\mathsf{T}}x \neq 0$ also $|\lambda|^2 = 1$, und damit $|\lambda| = 1$. □

**Bemerkung 22.8.** Nach Lemma 22.3 (a) gelten die Aussagen aus Lemma 22.7 genauso für orthogonale bzw. unitäre Endomorphismen endlich erzeugter Vektorräume mit Skalarprodukt.

**Bemerkung 22.9** (Spezielle orthogonale und unitäre Matrizen)**.** Bei einer orthogonalen Matrix können die Determinante und die Eigenwerte nach Lemma 22.7 nur 1 und $-1$ sein. Für eine komplexe unitäre Matrix ist dagegen jede Zahl auf dem komplexen Einheitskreis möglich. In beiden Fällen spielen aber diejenigen Matrizen, deren Determinante gleich 1 ist, eine große Rolle. Man definiert daher:

(a) Eine orthogonale Matrix $A \in \mathrm{O}(n)$ heißt *spezielle orthogonale Matrix*, wenn $\det A = 1$ gilt. Die Menge der speziellen orthogonalen $n \times n$-Matrizen wird mit $\mathrm{SO}(n)$ bezeichnet.

(b) Eine unitäre Matrix $A \in \mathrm{U}(n)$ heißt *spezielle unitäre Matrix*, wenn $\det A = 1$ gilt. Man bezeichnet die Menge der speziellen unitären $n \times n$-Matrizen mit $\mathrm{SU}(n)$.

Man sieht leicht, dass auch $\mathrm{SO}(n)$ und $\mathrm{SU}(n)$ Gruppen bezüglich der Matrixmultiplikation sind, denn wenn $\det A = \det B = 1$ gilt, so ist nach Satz 18.6 ja auch $\det(AB) = \det A^{-1} = 1$.

In Beispiel 22.5 haben die Drehungen in (a) Determinante 1, und die Spiegelungen in (b) Determinante $-1$. In diesem Fall entsprechen die Elemente von $\mathrm{SO}(2)$ also den Drehungen, die Elemente von $\mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$ den Spiegelungen. In der Tat gilt eine analoge Interpretation auch in höheren Dimensionen. Um dies zu einer exakten Aussage machen zu können, bräuchten wir aber natürlich erst einmal eine exakte Definition der Begriffe „Drehung“ und „Spiegelung“ – was wir hier nicht weiter verfolgen wollen.

**Aufgabe 22.10** ($\mathrm{O}(3)$ und $\mathrm{O}(4)$)**.** Man zeige:

(a) Ist $A \in \mathrm{O}(3)$, so gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und $T \in \mathrm{O}(3)$ mit

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

(b) Ist $A \in \mathrm{O}(4)$, so gibt es im Allgemeinen *kein* $\alpha \in \mathbb{R}$ und $T \in \mathrm{O}(4)$ mit

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

(Hinweis: Untersuche, ob $A$ einen Eigenwert besitzen muss.)

Was bedeutet das Ergebnis geometrisch?

**Aufgabe 22.11.** Es seien $V$ ein endlich erzeugter euklidischer Vektorraum und $v \in V$ mit $\|v\| = 1$. Wir betrachten den Endomorphismus $f\colon V \to V$, $x \mapsto x - 2\langle v,x\rangle v$.

(a) Zeige, dass $f$ eine orthogonale Abbildung ist.

(b) Berechne das charakteristische Polynom $\chi_f$.

(c) Wie kann man $f$ geometrisch beschreiben?

**Aufgabe 22.12.** Zeige, dass für jeden Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines endlich-dimensionalen euklidischen Raums $V$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Für alle $x, y \in V$ mit $x \perp y$ gilt $f(x) \perp f(y)$.

(b) Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$ für alle $x \in V$ gilt.

(c) Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und eine orthogonale Abbildung $g\colon V \to V$ mit $f = \lambda g$.

**Aufgabe 22.13** ($QR$-Zerlegung)**.** Zeige, dass sich jede reelle invertierbare Matrix $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ eindeutig in der Form $A = QR$ schreiben lässt, wobei $Q \in \mathrm{O}(n)$ eine orthogonale Matrix und $R$ eine obere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonaleinträgen ist.

(Hinweis: Bezeichne die Spaltenvektoren von $A$ bzw. $Q$ mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ bzw. $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ und schreibe die Matrixgleichung $A = QR$ in Gleichungen für diese Spaltenvektoren um.)

Diese Zerlegung wird in der Vorlesung „Einführung in die Numerik“ im zweiten Studienjahr noch eine wichtige Rolle spielen. Möchte man ein Gleichungssystem $Ax = b$ lösen, so ist dies mit der Zerlegung $A = QR$ wie oben natürlich äquivalent zum System $Rx = Q^\mathsf{T} b$, das sich wegen der oberen Diagonalform von $R$ einfach durch Rückwärtseinsetzen lösen lässt. In der Regel ist dieses Verfahren für große Gleichungssysteme schneller und unanfälliger für eine Verstärkung von Rundungsfehlern als der Gauß-Algorithmus.

53

## 22.B Selbstadjungierte Abbildungen

In diesem Abschnitt wollen wir eine weitere Art der Verträglichkeit eines Endomorphismus mit einem Skalarprodukt behandeln. Obwohl sie im Gegensatz zur Bedingung einer orthogonalen bzw. unitären Abbildung keine einfache geometrische Interpretation besitzt, ist sie dennoch in der Praxis sehr wichtig – vor allem, da sie einfach an der Abbildungsmatrix abzulesen ist. Um sie einzuführen, brauchen wir das folgende Konzept der adjungierten Abbildungen.

**Satz und Definition 22.14** (Adjungierte Abbildung)**.** *Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums $V$ mit Skalarprodukt. Dann gilt:*

(a) *Es gibt genau einen Endomorphismus $f^*\colon V \to V$ mit*

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$$

*für alle $x, y \in V$. Man nennt $f^*$ die zu $f$ **adjungierte Abbildung**.*

(b) *Ist $B$ eine Orthonormalbasis von $V$, so gilt für die Abbildungsmatrix von $f^*$ bezüglich $B$*

$$A_{f^*}^B = \overline{A_f^B}^\mathsf{T}.$$

*Beweis.* Es seien $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Orthonormalbasis von $V$ und $g\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Beachte zunächst, dass mit demselben Argument wie in Bemerkung 22.2 (a) genau dann

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle \qquad (*)$$

für alle $x, y \in V$ ist, wenn $\langle f(x_i), x_j\rangle = \langle x_i, g(x_j)\rangle$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ gilt. Wegen der Hermitizität des Skalarprodukts ist diese Bedingung nun aber äquivalent zu

$$\left(\overline{\langle x_j, f(x_i)\rangle}\right)_{i,j} = \left(\langle x_i, g(x_j)\rangle\right)_{i,j},$$

nach Satz 21.37 (b) also zu $\overline{A_f^B}^\mathsf{T} = A_g^B$. Also gibt es genau einen solchen Endomorphismus $g$, nämlich denjenigen, der bezüglich der Basis $B$ zur Abbildungsmatrix $\overline{A_f^B}^\mathsf{T}$ gehört. Dies zeigt bereits beide Teile des Satzes. □

**Bemerkung 22.15.**

(a) Aufgrund von Satz 22.14 (b) nennt man zu einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ manchmal $\overline{A}^\mathsf{T}$ auch die *adjungierte Matrix* und schreibt sie als $A^*$. Bezüglich einer Orthonormalbasis entsprechen sich dann also die Konzepte der adjungierten Abbildung und der adjungierten Matrix.

(b) Da offensichtlich $\overline{\overline{A}^\mathsf{T}}^\mathsf{T} = A$ für alle $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt, ist nach Satz 22.14 (b) auch $(f^*)^* = f$ für jeden Endomorphismus $f$ eines endlich erzeugten $\mathbb{K}$-Vektorraums mit Skalarprodukt. Dies bedeutet, dass nicht nur

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle, \quad \text{sondern auch} \quad \langle f^*(x), y\rangle = \langle x, (f^*)^*(y)\rangle = \langle x, f(y)\rangle$$

für alle $x, y \in V$ gilt: Man kann in einem Skalarprodukt stets die Abbildung $f$ auf der einen Seite durch $f^*$ auf der anderen Seite ersetzen (und umgekehrt).

(c) Für einen Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $V$ hatten wir in Aufgabe 21.52 (c) schon eine andere Art gesehen, die adjungierte Abbildung zu konstruieren: Unter Verwendung des natürlichen Isomorphismus zwischen $V$ und seinem Dualraum $V^*$ aus Satz 21.48 entspricht sie genau der dualen Abbildung $f^*\colon V^* \to V^*$ (was auch die gleiche Notation erklärt).

**Beispiel 22.16** (Adjungierte Abbildung einer orthogonalen bzw. unitären Abbildung)**.** Ist eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ orthogonal bzw. unitär, also $\overline{A}^{\mathsf{T}} A = E$, so ist $\overline{A}^{\mathsf{T}} = A^{-1}$ die adjungierte Matrix zu $A$. Für eine orthogonale oder unitäre Abbildung $f$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums mit Skalarprodukt ist dementsprechend also $f^* = f^{-1}$.

Die für diesen Abschnitt angekündigte Verträglichkeitsbedingung eines Endomorphismus mit einem Skalarprodukt besteht nun einfach darin, dass die adjungierte Abbildung mit der ursprünglichen übereinstimmt.

**Definition 22.17** (Selbstadjungierte Abbildungen)**.** Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums $V$ mit Skalarprodukt heißt **selbstadjungiert**, wenn $f^* = f$, also

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$$

für alle $x, y \in V$ gilt.

**Bemerkung 22.18** (Selbstadjungierte Matrizen)**.** Gemäß Satz 22.14 (b) ist ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ genau dann selbstadjungiert, wenn die Abbildungsmatrix $A_f^B$ bezüglich einer Orthonormalbasis $B$ von $V$ symmetrisch bzw. hermitesch ist, also $\overline{A_f^B}^{\mathsf{T}} = A_f^B$ gilt. Man bezeichnet symmetrische bzw. hermitesche Matrizen daher manchmal auch als *selbstadjungiert*.

**Beispiel 22.19** (Selbstadjungiertheit orthogonaler Projektionen)**.** Es seien $U$ ein Unterraum eines endlich erzeugten Vektorraums $V$ mit Skalarprodukt und $f\colon V \to V$ die orthogonale Projektion auf $U$ wie in Definition 21.29. Ist $(x_1, \dots, x_k)$ eine Orthonormalbasis von $U$, die wir zu einer Orthonormalbasis $B = (x_1, \dots, x_n)$ von $V$ ergänzen (siehe Satz 21.31), so ist also

$$f(x_i) = x_i \text{ für } i = 1, \dots, k \quad \text{und} \quad f(x_i) = 0 \text{ für } i = k+1, \dots, n,$$

und damit $A_f^B = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (mit $k$ Einträgen 1 und $n-k$ Einträgen 0) nach Satz 16.26. Da diese Matrix hermitesch ist, ist $f$ nach Bemerkung 22.18 selbstadjungiert.

Beachte jedoch, dass orthogonale Projektionen (auch wenn man es vom Namen her anders vermuten könnte) nach Bemerkung 22.4 (a) keine orthogonalen Abbildungen sind, da sie ja in der Regel nicht invertierbar sind, wie man an der obigen Form der Abbildungsmatrix ablesen kann.

**Lemma 22.20** (Determinante und Eigenwerte hermitescher Matrizen)**.** *Für jede hermitesche Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt:*

(a) $\det A \in \mathbb{R}$.

(b) *Ist $\lambda$ ein Eigenwert von $A$, so ist $\lambda \in \mathbb{R}$.*

*Beweis.*

(a) Dies hatten wir bereits in Folgerung 21.34 (a) gesehen.

(b) Gilt $Ax = \lambda x$ für ein $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, so auch $\overline{A}\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x}$, und damit $\overline{x}^{\mathsf{T}}\overline{A}^{\mathsf{T}} = \overline{\lambda}\overline{x}^{\mathsf{T}}$. Also folgt

$$\lambda \overline{x}^{\mathsf{T}} x = \overline{x}^{\mathsf{T}} A x = \overline{x}^{\mathsf{T}} \overline{A}^{\mathsf{T}} x = \overline{\lambda}\overline{x}^{\mathsf{T}} x,$$

nach Division durch $\overline{x}^{\mathsf{T}} x \neq 0$ also $\lambda = \overline{\lambda}$ und damit $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Um die weiteren Eigenschaften von orthogonalen, unitären und selbstadjungierten Abbildungen zu untersuchen, wenden wir nun einen kleinen Trick an: Es stellt sich heraus, dass alle diese Abbildungen Spezialfälle einer noch etwas allgemeineren Klasse von Abbildungen, den sogenannten *normalen Abbildungen*, sind, und dass man viele gemeinsame Eigenschaften orthogonaler, unitärer und selbstadjungierter Abbildungen auch für diese normalen Abbildungen zeigen kann – mit einem einzigen Beweis, der dann alle bisher betrachteten Fälle abdeckt.

**Definition 22.21** (Normale Endomorphismen und Matrizen)**.**

(a) Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines endlich erzeugten Vektorraums $V$ mit Skalarprodukt heißt **normal**, wenn $f^* \circ f = f \circ f^*$ gilt.

(b) Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt **normal**, wenn $\overline{A}^{\mathsf{T}} A = A\overline{A}^{\mathsf{T}}$ gilt.

**Bemerkung 22.22.**

(a) Da die Verkettung von Morphismen der Matrixmultiplikation entspricht, ist ein Endomorphismus nach Satz 22.14 (b) genau dann normal, wenn seine Abbildungsmatrix bezüglich einer beliebigen Orthonormalbasis normal ist.

(b) Der Begriff eines normalen Endomorphismus ist ebenso wie der eines selbstadjungierten Endomorphismus ein theoretisches Konzept, für das es keine einfache geometrische Interpretation gibt. Auch sollte der Name „normal“ nicht darüber hinwegtäuschen, dass es für einen Endomorphismus durchaus nicht normal ist, normal zu sein: Die „meisten“ Endomorphismen sind dies nicht. Die speziellen Morphismen, die wir in diesem Kapitel betrachten wollen, haben diese Eigenschaft jedoch:

**Beispiel 22.23.**

(a) Ist $f\colon V \to V$ ein orthogonaler bzw. unitärer Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums $V$ mit Skalarprodukt, so gilt $f^* = f^{-1}$ nach Beispiel 22.16, und daher auch

$$f^* \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V = f \circ f^{-1} = f \circ f^*.$$

Ist $f$ selbstadjungiert, also $f^* = f$, so gilt natürlich trivialerweise ebenfalls $f^* \circ f = f \circ f^*$.

Orthogonale, unitäre und selbstadjungierte Endomorphismen (und damit auch Matrizen) sind also normal.

(b) Jede Diagonalmatrix $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ist normal: Wegen $\overline{A}^{\mathsf{T}} = \mathrm{diag}(\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n})$ ist dann nämlich $\overline{A}^{\mathsf{T}} A = \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2) = A\overline{A}^{\mathsf{T}}$. Da eine solche Matrix nach Lemma 22.7 und Lemma 22.20 nur dann orthogonal, unitär oder selbstadjungiert sein kann, wenn $|\lambda_i| = 1$ bzw. $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für alle $i$ gilt, gibt es insbesondere also auch normale Endomorphismen, die nicht von der Form wie in (a) sind.

Wir wollen jetzt solche normalen Endomorphismen und Matrizen untersuchen – um nach Beispiel 22.23 (a) dann jedes Ergebnis dazu auf orthogonale, unitäre und selbstadjungierte Endomorphismen anwenden zu können.

**Lemma 22.24** (Eigenschaften normaler Endomorphismen)**.** *Es seien $V$ ein endlich erzeugter Vektorraum mit Skalarprodukt und $f\colon V \to V$ ein normaler Endomorphismus. Dann gilt:*

(a) *Für alle $x \in V$ gilt $\|f^*(x)\| = \|f(x)\|$.*

(b) *Ist $x$ ein Eigenvektor von $f$ zum Eigenwert $\lambda$, so ist $x$ auch ein Eigenvektor von $f^*$ zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.*

(c) *Eigenvektoren von $f$ zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.*

*Beweis.*

(a) Für $x \in V$ ist

$$\|f^*(x)\|^2 = \langle f^*(x), f^*(x)\rangle = \langle x, f(f^*(x))\rangle \overset{(*)}{=} \langle x, f^*(f(x))\rangle = \langle f(x), f(x)\rangle = \|f(x)\|^2,$$

wobei wir in $(*)$ die Normalität von $f$ ausgenutzt haben.

(b) Es sei $f(x) = \lambda x$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\|f^*(x) - \overline{\lambda} x\|^2 &= \left\langle f^*(x) - \overline{\lambda} x, f^*(x) - \overline{\lambda} x \right\rangle \\
&= \langle f^*(x), f^*(x)\rangle - \lambda \langle x, f^*(x)\rangle - \overline{\lambda} \langle f^*(x), x\rangle + \lambda\overline{\lambda} \langle x, x\rangle \\
&\overset{(a)}{=} \langle f(x), f(x)\rangle - \lambda \langle f(x), x\rangle - \overline{\lambda} \langle x, f(x)\rangle + \lambda\overline{\lambda} \langle x, x\rangle \\
&= \langle f(x) - \lambda x, f(x) - \lambda x\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

und damit $f^*(x) - \overline{\lambda} x = 0$.

(c) Sind $x, y \in V$ und $f(x) = \lambda x$ sowie $f(y) = \mu y$ mit $\lambda \neq \mu$, so folgt

$$\lambda \langle x,y\rangle = \left\langle \overline{\lambda} x, y \right\rangle \overset{\text{(b)}}{=} \langle f^*(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \mu \langle x,y\rangle ,$$

also $(\lambda - \mu)\langle x,y\rangle = 0$. Wegen $\lambda \neq \mu$ ergibt sich daraus sofort $\langle x,y\rangle = 0$. □

## 22.C Der Spektralsatz

Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Kapitels. Es besagt, dass normale Endomorphismen mit zerfallendem charakteristischen Polynom stets diagonalisierbar sind, und zwar sogar mit einer Orthonormalbasis. Dieser Satz wird der Spektralsatz genannt, da die Menge aller Eigenwerte eines Endomorphismus oft als das Spektrum dieses Endomorphismus bezeichnet wird und dieser Satz durch die Diagonalisierbarkeit eine Aussage über diese Eigenwerte und ihre Vielfachheiten macht.

**Satz 22.25 (Spektralsatz).** *Für einen Endomorphismus $f$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums $V$ mit Skalarprodukt sind äquivalent:*

(a) *$f$ ist normal und $\chi_f$ zerfällt in Linearfaktoren;*

(b) *$V$ besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $f$.*

*Insbesondere ist $f$ dann nach Folgerung 19.30 also diagonalisierbar; man sagt für (b) auch, dass $f$* ***orthogonal*** *bzw.* ***unitär diagonalisierbar*** *ist.*

*Beweis.*

(a) $\Rightarrow$ (b): Wir zeigen diese Richtung mit Induktion über $n := \dim V$; der Fall $n = 0$ ist trivial. Für den Induktionsschritt $n-1 \to n$ sei nun also $n > 0$.

Da $\chi_f$ nach Voraussetzung in Linearfaktoren zerfällt, gibt es einen Eigenwert $\lambda$ von $f$ mit zugehörigem Eigenvektor $x_1$. Durch Normieren können wir diesen so wählen, dass $\|x_1\| = 1$. Es sei $U = \mathrm{Lin}(x_1)$.

Wir ergänzen nun $x_1$ zu einer Orthonormalbasis $B = (x_1, x_2', \ldots, x_n')$ von $V$, so dass nach Bemerkung 21.40 also $B' = (x_2', \ldots, x_n')$ eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ ist. Unser Ziel ist es, die Induktionsvoraussetzung auf die Einschränkung von $f$ auf $U^\perp$ anzuwenden. Dazu müssen wir die folgenden Dinge überprüfen:

- $f(U^\perp) \subset U^\perp$, d. h. $f$ lässt sich zu einem Endomorphismus $f|_{U^\perp} : U^\perp \to U^\perp$ einschränken: Für alle $x \in U^\perp$ gilt

$$\begin{aligned} \langle f(x), x_1\rangle &= \langle x, f^*(x_1)\rangle && \text{(Satz 22.14 (a))} \\ &= \left\langle x, \overline{\lambda} x_1 \right\rangle && \text{(Lemma 22.24 (b), da } f \text{ normal)} \\ &= \overline{\lambda}\, \langle x, x_1\rangle \\ &= 0 && \text{(wegen } x \in U^\perp\text{)}, \end{aligned}$$

  und damit auch $f(x) \in U^\perp$.

- Die Einschränkung $f' := f|_{U^\perp} : U^\perp \to U^\perp$ erfüllt die Voraussetzung (a) des Satzes: Für die Abbildungsmatrix $A_f^B$ gilt

$$A_f^B = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & A_{f'}^{B'} \end{array}\right)$$

  (wobei gemäß Satz 16.26 die erste Spalte aus $f(x_1) = \lambda x_1$ und die Nullen neben $\lambda$ aus $f(U^\perp) \subset U^\perp$ folgen). Da $f$ normal ist, ist nun nach Bemerkung 22.22 (a)

$$\overline{A_f^B}^{\mathsf{T}} A_f^B = A_f^B \overline{A_f^B}^{\mathsf{T}} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{c|c} |\lambda|^2 & 0 \\ \hline 0 & \overline{A_{f'}^{B'}}^{\mathsf{T}} A_{f'}^{B'} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} |\lambda|^2 & 0 \\ \hline 0 & A_{f'}^{B'} \overline{A_{f'}^{B'}}^{\mathsf{T}} \end{array}\right),$$

also $A_{f'}^{B'}$ und damit $f'$ normal; und wegen $\chi_f(t) = (t-\lambda)\,\chi_{f'}(t)$ zerfällt mit $\chi_f$ auch $\chi_{f'}$ in Linearfaktoren.

Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es nun also eine Orthonormalbasis $(x_2,\dots,x_n)$ von $U^\perp$ aus Eigenvektoren von $f$ (bzw. $f'$), so dass wie gewünscht $(x_1,\dots,x_n)$ eine Orthonormalbasis von $V$ aus Eigenvektoren von $f$ ist.

(b) $\Rightarrow$ (a): Es sei $B$ eine Orthonormalbasis von $V$ aus Eigenvektoren von $f$. Dann ist die Abbildungsmatrix $A = A_f^B$ nach Folgerung 19.30 eine Diagonalmatrix. Insbesondere ist diese Matrix normal nach Beispiel 22.23 (b) und hat ein zerfallendes charakteristisches Polynom nach Folgerung 19.36 (a). Dasselbe gilt damit auch für $f$. □

54

Da der Spektralsatz in der Praxis sehr häufig gebraucht wird, schreiben wir ihn hier auch noch einmal in Matrixform auf:

**Folgerung 22.26** (Spektralsatz in Matrixform)**.** *Für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind äquivalent:*

(a) *$A$ ist normal und $\chi_A$ zerfällt in Linearfaktoren;*

(b) *es gibt eine orthogonale bzw. unitäre Matrix $T$, so dass*

$$T^{-1}AT = \overline{T}^{\mathsf{T}}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

*eine Diagonalmatrix (mit den Eigenwerten $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ von $A$ auf der Diagonale) ist.*

*Man sagt für (b) wieder, dass $A$ **orthogonal** bzw. **unitär diagonalisierbar** ist.*

*Beweis.* Es sei $f = f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $x \mapsto Ax$ die zu $A$ gehörige lineare Abbildung, so dass umgekehrt also $A = A_f$ die Abbildungsmatrix von $f$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{K}^n$ ist. Wir versehen $\mathbb{K}^n$ mit dem Standardskalarprodukt, für das die Standardbasis natürlich eine Orthonormalbasis ist.

Nach Bemerkung 22.22 (a) ist $A$ nun genau dann normal mit in Linearfaktoren zerfallendem charakteristischen Polynom, wenn dies für $f$ gilt. Dies ist nach dem Spektralsatz 22.25 wiederum genau dann der Fall, wenn $\mathbb{K}^n$ eine Orthonormalbasis $(x_1,\dots,x_n)$ aus Eigenvektoren von $f$ bzw. $A$ besitzt. Mit $T = (x_1 \,|\, \cdots \,|\, x_n)$ und $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ den Eigenwerten zu $x_1,\dots,x_n$ ist diese Aussage nach Folgerung 19.30 und Lemma 22.3 (b) aber genau äquivalent dazu, dass $T$ orthogonal bzw. unitär ist und $T^{-1}AT$ die Diagonalmatrix mit Einträgen $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ist. □

**Beispiel 22.27.** Die für uns wichtigsten Spezialfälle von Folgerung 22.26 sind:

(a) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $A$ ist hermitesch oder unitär: Dann ist $A$ nach Bemerkung 22.23 (a) normal, und wegen des Fundamentalsatzes der Algebra aus Satz 6.11 zerfällt $\chi_A$ in Linearfaktoren. Also ist $A$ dann nach Folgerung 22.26 unitär diagonalisierbar.

(b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $A$ ist symmetrisch (also selbstadjungiert): Wie in (a) ist $A$ auch dann wieder normal. Außerdem können wir $A$ auch als komplexe hermitesche Matrix auffassen; das charakteristische Polynom zerfällt dann zumindest über $\mathbb{C}$ wieder in Linearfaktoren, d. h. es ist $\chi_A(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$ mit den Eigenwerten $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{C}$ von $A$. Diese Eigenwerte sind nach Lemma 22.20 (b) aber reell, und damit zerfällt $\chi_A$ sogar über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren. Wir erhalten so den sicher wichtigsten Fall des Spektralsatzes:

| Symmetrische reelle Matrizen sind stets orthogonal diagonalisierbar. |
|---|

(c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $A$ ist orthogonal: Dann muss $\chi_A$ nicht notwendig in Linearfaktoren zerfallen – wie z. B. bei einer Drehung in $\mathbb{R}^2$ wie in Beispiel 19.13 (c). Nach Folgerung 19.40 ist $A$ dann also auch nicht notwendig diagonalisierbar.

**Beispiel 22.28.** Die Berechnung der Matrix $T$ in Folgerung 22.26 bzw. der Orthonormalbasis in Satz 22.25 ist mit unserem Vorwissen nicht mehr weiter kompliziert: Wir berechnen mit dem Verfahren von Gram-Schmidt aus Satz 21.31 Orthonormalbasen aller Eigenräume – besonders einfach ist dies natürlich für alle eindimensionalen Eigenräume, weil wir für diese nur jeweils einen normierten

Eigenvektor benötigen. Nach Lemma 22.24 (c) erhalten wir auf diese Art eine orthonormale Familie, und wegen der aus dem Spektralsatz folgenden Diagonalisierbarkeit sogar eine Orthonormalbasis. Als konkretes Beispiel sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Die Matrix $A$ ist offensichtlich reell symmetrisch und damit nach Beispiel 22.27 (b) orthogonal diagonalisierbar. Wie üblich (siehe Beispiel 19.16) berechnen wir dazu zuerst die Eigenwerte und -räume von $A$. Die Rechnung zeigt, dass $A$ zwei Eigenwerte besitzt, und zwar

- $\lambda_1 = 3$ mit Eigenraum $\operatorname{Eig}(A,3) = \operatorname{Lin}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also normiertem Eigenvektor $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und
- $\lambda_1 = 1$ mit Eigenraum $\operatorname{Eig}(A,1) = \operatorname{Lin}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, also normiertem Eigenvektor $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(wie man durch Rückwärtseinsetzen auch leicht bestätigen kann). Beachte, dass wir dabei für die Bestimmung der Orthonormalbasen das Standardskalarprodukt nehmen müssen und *nicht* die durch $A$ bestimmte Bilinearform $b(x,y) = x^\mathsf{T} A y$. Dies wird aus dem Beweis von Folgerung 22.26 deutlich; man sieht es aber auch schon daran, dass wir nach Bemerkung 22.2 (b) für eine orthogonale Matrix ja Spaltenvektoren brauchen, die *bezüglich des Standardskalarprodukts* orthonormal sind.

Schreiben wir diese Vektoren nun wie üblich als Spalten in eine Matrix, so erhalten wir also die orthogonale Matrix

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \in \mathrm{O}(2)$$

(wie man leicht sieht, bilden die Spalten in der Tat eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Standardskalarprodukts), und es gilt dann

$$T^{-1} A T = T^\mathsf{T} A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wie man auch leicht durch direkte Matrixmultiplikation (bzw. Inversenbildung) überprüfen kann.

**Aufgabe 22.29** (Wurzelziehen für Matrizen)**.** Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Man zeige:

(a) Ist $A$ positiv semidefinit, so gibt es eine eindeutig bestimmte symmetrische positiv semidefinite Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $B^2 = A$. Man nennt sie die *Wurzel* aus $A$.

(b) Ist $A$ nicht positiv semidefinit, so kann es zwar eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $B^2 = A$ geben, aber keine symmetrische.

**Aufgabe 22.30.**

(a) Es seien $V$ ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Zeige, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:

(i) $f^* = -f$.

(ii) Es gibt eine Orthonormalbasis von $V$ aus Eigenvektoren von $f$, und der Realteil jedes Eigenwerts ist 0.

(iii) Für alle $x \in V$ gilt $\langle x, f(x)\rangle \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

(b) Man zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^\mathsf{T} + A = 0$ ist $E - A$ invertierbar und $(E-A)^{-1}(E+A) \in \mathrm{SO}(n)$.

**Aufgabe 22.31.** Es sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Zeige, dass es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt mit $A^3 + A = B$.

In seiner ursprünglichen Form macht der Spektralsatz 22.25 eine Aussage über Endomorphismen. Wir wollen nun sehen, dass man ihn jedoch ebenso gewinnbringend auf Bilinearformen bzw. Sesquilinearformen anwenden kann – denn obwohl sich deren Gramsche Matrizen nach Bemerkung 21.8 zunächst einmal anders transformieren als die Abbildungsmatrizen von Endomorphismen (nämlich

mit $A \mapsto \overline{T}^{\mathsf{T}} A T$ statt mit $A \mapsto T^{-1} A T$), stimmen diese beiden Transformationsregeln für eine orthogonale bzw. unitäre Matrix $T$ ja überein.

Als Erstes wollen wir eine in der Praxis besonders wichtige Charakterisierung positiv definiter Matrizen (bzw. Bilinear- oder Sesquilinearformen) mit Hilfe von Eigenwerten angeben. Wir stellen sie im Folgenden noch einmal mit dem uns bereits aus Satz 21.42 bekannten Hurwitz-Kriterium zusammen und erweitern diese Aussagen auch auf negativ definite und indefinite Matrizen, da wir dies für die spätere Anwendung auf Extremwertuntersuchungen benötigen werden (siehe Satz 26.20).

**Satz 22.32** (Kriterien für die Definitheit von Matrizen)**.** *Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine symmetrische (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. hermitesche (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Matrix. Ferner sei $A_k \in \mathbb{K}^{k \times k}$ für $k = 1, \dots, n$ die Matrix, die aus den ersten $k$ Zeilen und Spalten von $A$ besteht. Dann gilt:*

(a) *(**Eigenwertkriterium**)*

*$A$ ist genau dann positiv definit / negativ definit / positiv semidefinit / negativ semidefinit, wenn $\lambda > 0$ / $\lambda < 0$ / $\lambda \geq 0$ / $\lambda \leq 0$ für jeden (nach Lemma 22.20 (b) reellen) Eigenwert $\lambda$ von $A$ gilt.*

*$A$ ist genau dann indefinit, wenn $A$ mindestens einen positiven und einen negativen Eigenwert besitzt.*

(b) *(**Hurwitz-Kriterium**)*

*$A$ ist genau dann positiv definit, wenn $\det A_k > 0$ für alle $k$.*

*$A$ ist genau dann negativ definit, wenn $\det A_k > 0$ für alle geraden und $\det A_k < 0$ für alle ungeraden $k$.*

*Ist $\det A \neq 0$, so ist $A$ genau dann positiv bzw. negativ semidefinit, wenn $A$ positiv bzw. negativ definit ist.*

*Ist $\det A \neq 0$, so ist $A$ genau dann indefinit, wenn $A$ weder positiv noch negativ definit ist, also wenn die Vorzeichenfolge von $\det A_k$ für $k = 1, \dots, n$ weder $(+,+,+,\dots)$ noch $(-,+,-,+,\dots)$ ist.*

*Beweis.*

(a) Nach der Folgerung 22.26 aus dem Spektralsatz gibt es eine orthogonale bzw. unitäre Matrix $T$ mit $\overline{T}^{\mathsf{T}} A T = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von $A$ sind. Analog zu Bemerkung 21.12 hat $A$ nun genau dann eine der betrachteten Definitheitseigenschaften, wenn diese für die Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ gilt. Die Aussage folgt damit unmittelbar aus Beispiel 21.15 (a) bzw. Folgerung 21.18.

(b) Der Fall der positiven Definitheit ist genau Satz 21.42. Weiterhin ist $A$ genau dann negativ definit, wenn $\overline{x}^{\mathsf{T}} A x < 0$ und damit $\overline{x}^{\mathsf{T}} (-A) x > 0$ für alle $x \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$ gilt, also genau dann, wenn $-A$ positiv definit ist. Anwenden von Satz 21.42 auf $-A$ ergibt in diesem Fall also wegen $\det(-A_k) = (-1)^k \det A_k$ die Behauptung.

Ist nun $\det A \neq 0$, so ist $A$ invertierbar, d. h. es ist $\operatorname{Eig}(A, 0) = \operatorname{Ker} A = \{0\}$ und damit 0 kein Eigenwert von $A$. Nach (a) ist $A$ damit genau dann positiv bzw. negativ semidefinit, wenn $A$ positiv bzw. negativ definit ist, und indefinit, wenn dies beides nicht der Fall ist. □

**Bemerkung 22.33.** Zur Bestimmung der Definitheitseigenschaften einer symmetrischen bzw. hermiteschen Matrix $A$ mit Satz 22.32 ist das Hurwitz-Kriterium oftmals geeigneter, da die Berechnung von Determinanten einfacher ist als die aller Eigenwerte. Es liefert aber nicht in jedem Fall eine Entscheidung: Ist $\det A = 0$, so lässt sich mit dem Hurwitz-Kriterium in der Regel keine allgemeine Aussage treffen. Dies zeigt das Beispiel der drei Matrizen

$$\operatorname{diag}(0,1,1), \ \operatorname{diag}(0,-1,-1) \quad \text{und} \quad \operatorname{diag}(0,1,-1),$$

die nach Satz 22.32 (a) positiv semidefinit, negativ semidefinit bzw. indefinit sind, für die aber alle Untermatrizen der ersten $k = 1, 2, 3$ Zeilen und Spalten die Determinante 0 haben.

**Aufgabe 22.34.** Es sei $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische reelle Matrix mit

$$a_{i,i} > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$$

für alle $i = 1,\dots,n$. Beweise, dass $A$ dann positiv definit ist – symmetrische Matrizen, deren Diagonaleinträge im Vergleich zu den anderen „groß genug“ sind, sind also positiv definit.

Als weitere Anwendung des Spektralsatzes auf symmetrische Bilinearformen bzw. Sesquilinearformen können wir dafür den folgenden „Normalformensatz“ zeigen, der die Aussage von Bemerkung 21.33 auf den nicht notwendig positiv definiten Fall verallgemeinert:

**Satz 22.35 (Trägheitssatz von Sylvester).** *Es seien $V$ ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum und $b$ eine symmetrische Bilinearform (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. hermitesche Sesquilinearform (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Dann gibt es eine Basis $B$ von $V$, bezüglich der die Gramsche Matrix von $b$ die einfache Form*

$$A_b^B = \operatorname{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{k},\underbrace{-1,\dots,-1}_{l},0,\dots,0) = \left(\begin{array}{c|c|c} E_k & & 0 \\ \hline & -E_l & \\ \hline 0 & & 0 \end{array}\right)$$

*hat. Dabei ist die Anzahl $k$ bzw. $l$ der Einträge $1$ bzw. $-1$ auf der Diagonalen durch $b$ bereits eindeutig bestimmt, und zwar ist $k$ bzw. $l$ gleich*

(a) *der maximalen Dimension eines Unterraums von $V$, auf dem $b$ positiv bzw. negativ definit ist; und*

(b) *der (mit Vielfachheiten gezählten) Anzahl der positiven bzw. negativen Eigenwerte einer beliebigen Gramschen Matrix zu $b$.*

*Beweis.* Wir teilen den Beweis in zwei Teile:

Teil 1: Als Erstes zeigen wir die Eindeutigkeit von $k$ und $l$ und den Ausdruck aus (a). Dazu betrachten wir eine beliebige Basis $B = (x_1,\dots,x_n)$ von $V$, für die $A_b^B = (b(x_i,x_j))_{i,j}$ die im Satz angegebene Form hat. Dann ist $U_+ := \operatorname{Lin}(x_1,\dots,x_k)$ sicher ein $k$-dimensionaler Unterraum von $V$, auf dem $b$ positiv definit ist, denn die Gramsche Matrix der Einschränkung von $b$ auf $U_+$ ist ja gerade die positiv definite Matrix $E_k$. Genauso sieht man natürlich, dass $U_- := \operatorname{Lin}(x_{k+1},\dots,x_n)$ ein $(n-k)$-dimensionaler Unterraum ist, auf dem $b$ negativ semidefinit ist.

Ist nun andererseits $U \leq V$ ein beliebiger Unterraum, auf dem $b$ positiv definit ist, so ist mit dem eben gefundenen $U_-$ sicher $U \cap U_- = \{0\}$, denn für ein $x \in U \cap U_-$ mit $x \neq 0$ ergäbe sich aus $b(x,x) > 0$ wegen $x \in U$ und $b(x,x) \leq 0$ wegen $x \in U_-$ sofort ein Widerspruch. Mit der Dimensionsformel aus Satz 14.25 erhalten wir also

$$\dim U = \dim(U \cap U_-) + \underbrace{\dim(U + U_-)}_{\leq n} - \dim U_- \leq 0 + n - (n-k) = k.$$

Also ist $k$ wirklich die maximale Dimension eines Unterraums von $V$, auf dem $b$ positiv definit ist. Analog zeigt man die entsprechende Aussage für $l$. Wir haben damit also den Ausdruck für $k$ und $l$ in (a) bewiesen, und somit auch die Eindeutigkeit der im Satz angegebenen Matrixdarstellung.

Teil 2: Wir zeigen nun (konstruktiv) die Existenz einer Basis $B$ wie in der Behauptung und dabei den Ausdruck aus (b). Dazu sei zunächst $B'$ eine beliebige Basis von $V$. Nach Lemma 21.11 bzw. Konstruktion 21.18 ist mit $b$ auch die Gramsche Matrix $A := A_b^{B'}$ symmetrisch bzw. hermitesch. Wir gehen nun in zwei Schritten vor:

- Schritt 1: Drehung auf Diagonalform.

  Aus dem Spektralsatz folgt wie in Beispiel 22.27 die Existenz einer orthogonalen bzw. unitären Matrix $T$, so dass

  $$\overline{T}^{\mathsf{T}} A T = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

eine Diagonalmatrix mit den (nach Lemma 22.20 (b) reellen) Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von $A$ ist. Dabei wählen wir die Reihenfolge der Spalten von $T$ und damit der Diagonaleinträge der Matrix so, dass die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ positiv, $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{k+l}$ negativ, und $\lambda_{k+l+1}, \dots, \lambda_n$ gleich 0 sind.

- Schritt 2: Koordinatenstreckung auf Normalform.

  Wir setzen nun

  $$S = \overline{S}^\mathsf{T} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{|\lambda_{k+l}|}}, 1, \dots, 1\right) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}).$$

  Dann ist

  $$\overline{TS}^\mathsf{T} A\, TS = \overline{S}^\mathsf{T} \overline{T}^\mathsf{T} A\, TS = \overline{S}^\mathsf{T} \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot S = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0).$$

Nach Lemma 16.41 gibt es nun aber eine Basis $B$, so dass die Basiswechselmatrix $A^{B,B'}$ gleich $TS$ ist. Mit der Transformationsregel für Bilinearformen aus Satz 21.7 (bzw. für Sesquilinearformen aus Konstruktion 21.18) hat die Matrix $A_b^B$ dann die gewünschte Form, wobei $k$ und $l$ wie in (b) sind. □

**Bemerkung 22.36.**

(a) Im Fall einer positiv definiten symmetrischen Bilinearform bzw. hermiteschen Sesquilinearform ist natürlich $k = n$ und $l = 0$ in Satz 22.35, so dass $A_b^B$ die Einheitsmatrix ist. Diese Aussage ist genau die uns schon bekannte Existenz von Orthonormalbasen zu Skalarprodukten wie in Bemerkung 21.33.

(b) Natürlich gibt es auch vom Trägheitssatz 22.35 eine Matrixform: Für jede reelle symmetrische bzw. komplexe hermitesche Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gibt es (wie in Teil 2 des Beweises) eine invertierbare Matrix $T$, so dass $\overline{T}^\mathsf{T} A\, T$ die in Satz 22.35 angegebene Gestalt hat. Dabei sind auch hier dann die Anzahlen $k$ und $l$ der Diagonaleinträge 1 bzw. $-1$ eindeutig bestimmt und gleich der maximalen Dimension eines Unterraums von $\mathbb{K}^n$, auf dem $A$ positiv bzw. negativ definit ist, sowie gleich der Anzahl der positiven bzw. negativen Eigenwerte von $\overline{S}^\mathsf{T} A\, S$ für eine beliebige invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. Mit den uns bekannten Entsprechungen zwischen Bilinearformen bzw. Sesquilinearformen und Matrizen ergeben sich diese Aussagen unmittelbar aus Satz 22.35 angewendet auf $b(x, y) = \overline{x}^\mathsf{T} A\, y$.

Insbesondere bedeutet dies, dass die Matrizen $A$ und $\overline{S}^\mathsf{T} A\, S$ für alle $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ die gleiche Anzahl positiver (und analog negativer) Eigenwerte haben – obwohl die Eigenwerte selbst ja nicht übereinstimmen, da $A$ und $\overline{S}^\mathsf{T} A\, S$ im Allgemeinen nicht ähnlich zueinander sind. Diese Aussage, die aus unserem Satz 22.35 folgt, wird in der Literatur auch oft Trägheitssatz von Sylvester genannt. Aus ihr leitet sich auch der Name „Trägheitssatz“ ab: Der Satz zeigt, dass sich die Anzahlen der positiven und negativen Eigenwerte einer hermiteschen Matrix unter Transformationen der Form $A \mapsto \overline{S}^\mathsf{T} A\, S$ nicht ändern, sich also in diesem Sinne „träge“ verhalten.

55

Die in Teil 2 vom Beweis des Trägheitssatzes 22.35 konstruierte Transformation, um eine gegebene reelle symmetrische Bilinearform in die dort angegebene Normalform zu bringen, hat auch eine einfache geometrische Bedeutung. Der Einfachheit halber betrachten wir diese zunächst im positiv definiten Fall, also wenn alle Diagonaleinträge der transformierten Matrix gleich 1 sind.

**Konstruktion 22.37 (Hauptachsentransformation).** Wir betrachten ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ mit Gramscher Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und wollen es visualisieren, indem wir die nach Definition 21.13 zugehörige Norm $\|x\| = \sqrt{x^\mathsf{T} A x}$ betrachten und die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\mathsf{T} A x = 1\}$$

aller Punkte mit Norm 1 zeichnen, also den „Rand der Einheitskugel“ bezüglich des Skalarprodukts. Um $M$ geometrisch zu beschreiben, führen wir die zwei Schritte in Teil 2 des Beweises von Satz 22.35 durch:

- Drehung auf Diagonalform: Wir finden nach dem Spektralsatz eine orthogonale Matrix $T$, so dass $T^\mathsf{T} A T = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =: D$ eine Diagonalmatrix ist. Als Eigenwerte von $A$ sind diese $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nach Satz 22.32 (a) positiv.

  Wir machen nun die Koordinatentransformation $y := T^{-1}x = T^\mathsf{T}x$, also $x = Ty$, die wir uns wegen $T \in \mathrm{O}(n)$ als Drehung (bzw. Spiegelung) in $\mathbb{R}^n$ vorstellen können. Mit diesen neuen Koordinaten ist

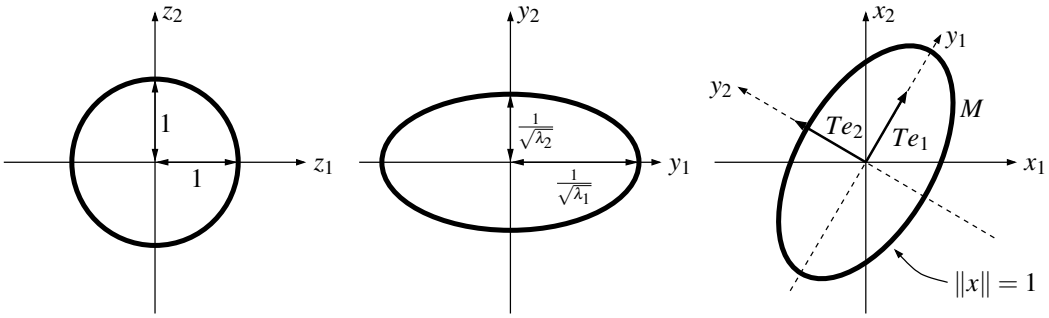
  $$x^\mathsf{T}Ax = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y^\mathsf{T}T^\mathsf{T}ATy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y^\mathsf{T}Dy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = 1.$$

- Koordinatenstreckung auf Normalform: Wegen $\lambda_i > 0$ für alle $i$ können wir nun noch die weitere Koordinatentransformation $z_i := \sqrt{\lambda_i}\, y_i$, also $y_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} z_i$ für $i = 1, \dots, n$ durchführen, die einer Streckung der Koordinatenachsen (mit unterschiedlichen Streckfaktoren) entspricht. In diesen neuen Koordinaten ist nun einfach

  $$x^\mathsf{T}Ax = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 1,$$

  d. h. hier bekommen wir nun den Rand der „gewöhnlichen Einheitskugel“.

Unsere ursprüngliche Menge $M$ ensteht also aus dem Rand der normalen Einheitskugel (in den Koordinaten $z_i$), indem wir zuerst die einzelnen Koordinaten strecken (Übergang von den $z_i$ zu den $y_i$) und das resultierende Ellipsoid dann im Raum drehen (Übergang von den $y_i$ zu den $x_i$). Die gesuchte Menge $M$ ist also wie im folgenden Bild für $n = 2$ dargestellt ein im Raum gedrehtes Ellipsoid.




Wie im Bild angedeutet sind die charakteristischen Merkmale dieses Ellipsoids:

- Seine Radien sind gerade $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$, denn dies sind die $y_i$-Werte, die $z_i = 1$ entsprechen;
- Seine Symmetrieachsen werden aufgespannt von den $x$-Vektoren, die im $y$-Koordinatensystem den Einheitsvektoren entsprechen – wegen $x = Ty$ also von den Spalten $Te_1, \dots, Te_n$ von $T$ und damit genau von den Eigenvektoren von $A$. Diese Symmetrieachsen werden auch als die **Hauptachsen** des Ellipsoids bezeichnet – daher der Name Hauptachsentransformation.

Als konkretes Beispiel ist die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\mathsf{T}Ax = 1\}$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

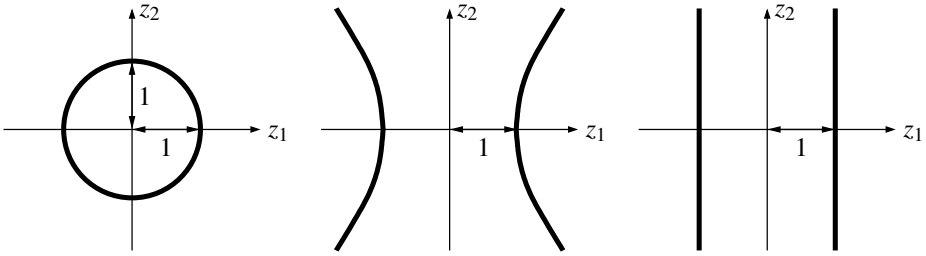
aus Beispiel 22.28 also aufgrund der dort durchgeführten Rechnung eine Ellipse mit Hauptachsen

$$\operatorname{Lin}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{Lin}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und Radien $\frac{1}{\sqrt{3}}$ bzw. 1 in diesen beiden Richtungen.

**Bemerkung 22.38.** Untersuchen wir die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\mathsf{T}Ax = 1\}$ wie in Konstruktion 22.37 für eine symmetrische Matrix $A$, die nicht mehr notwendig positiv definit ist, so können wir immer noch das Verfahren aus Teil 2 des Beweises von Satz 22.35 anwenden, erhalten jedoch am Ende in den Koordinaten $z_i$ eine quadratische Gleichung, deren Koeffizienten 1, $-1$ und 0 sein können (je

nachdem, wie viele Eigenwerte von $A$ positiv, negativ bzw. 0 sind). Bis auf Permutation dieser Variablen erhalten wir so z. B. für $n = 2$ als Möglichkeiten für ein nicht-leeres $M$ wie im folgenden Bild neben einem Kreis (bei zwei positiven Eigenwerten) eine *Hyperbel* (bei einem positiven und einem negativen Eigenwert) und ein *Geradenpaar* (bei einem positiven Eigenwert und einem Eigenwert 0):




$z_1^2 + z_2^2 = 1$ Kreis | $z_1^2 - z_2^2 = 1$ Hyperbel | $z_1^2 = 1$ Geradenpaar

Wie in Konstruktion 22.37 ist die ursprüngliche Menge $M$ dann eine in den Koordinatenrichtungen gestreckte und anschließend gedrehte Variante dieser Bilder. Hat $A$ keinen positiven Eigenwert, so ist $M = \emptyset$, da eine Summe von Quadraten mit nicht-positiven Vorfaktoren niemals 1 ergeben kann. Für $n > 2$ gibt es natürlich entsprechend mehr qualitativ verschiedene Möglichkeiten für $M$.

**Aufgabe 22.39.** Die symmetrische reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & 4 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ hat genau die beiden Eigenwerte 3 und 12. Da alle Eigenwerte positiv sind, ist $A$ nach Satz 22.32 (b) also positiv definit und bestimmt somit ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

(a) Berechne eine orthogonale Matrix $T$, so dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

(b) Bestimme mit einer Hauptachsentransformation die Punkte der Menge $\{x \in \mathbb{R}^3 : x^\mathsf{T} Ax = 3\}$, die vom Ursprung (bezüglich des Standardskalarprodukts) den kleinsten Abstand haben.

**Aufgabe 22.40.** Man zeige: Ist $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ normal, so ist $A$ genau dann hermitesch, wenn alle Eigenwerte von $A$ reell sind.

**Aufgabe 22.41** (Normalform antisymmetrischer Bilinearformen)**.** Es sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Wir nennen eine Bilinearform $b$ auf $V$ *antisymmetrisch*, wenn $b(x,y) = -b(y,x)$ für alle $x, y \in V$ gilt, und eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ *antisymmetrisch*, wenn $A^\mathsf{T} = -A$ ist. Analog zu Lemma 21.11 sieht man sofort, dass $b$ genau dann antisymmetrisch ist, wenn $A_b^B$ für eine beliebige Basis $B$ von $V$ antisymmetrisch ist. Man zeige:

(a) Zu jeder antisymmetrischen Bilinearform $b$ auf $V$ gibt es eine Basis $B$ von $V$, so dass

$$A_b^B = \begin{pmatrix} \boxed{I} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \boxed{I} \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad I := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$$

gilt, also so dass $A_b^B$ eine Blockdiagonalmatrix mit einer gewissen Anzahl $k$ von Blöcken $I$ (mit $0 \leq 2k \leq n$) und $n - 2k$ anschließenden Nullzeilen und -spalten ist.

(Hinweis: Ist $b \neq 0$, so zeige man die Existenz eines zweidimensionalen Unterraums $U \leq V$, so dass die Einschränkung von $b$ auf $U$ bezüglich einer geeigneten Basis die Gramsche Matrix $I$ hat, und verwende dann Induktion über $\dim V$ wie im Beweis des Spektralsatzes.)

(b) Die Determinante jeder ganzzahligen antisymmetrischen Matrix ist eine Quadratzahl.

## 22.D Die Singulärwertzerlegung

Als Abschluss der linearen Algebra wollen wir nun noch sehen, dass die Eigenwerttheorie und der Spektralsatz überraschenderweise sogar auf beliebige lineare Abbildungen mit unterschiedlichem Start- und Zielraum angewendet werden können – und damit eine Brücke zurück zu Kapitel 16 schlagen, in dem wir derartige Abbildungen untersucht haben.

Dazu erinnern wir uns an unseren ersten Normalformensatz 17.29: Zu einem Morphismus $f\colon V \to W$ zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen $V$ und $W$ gibt es stets Basen $B$ und $C$ von $V$ bzw. $W$, so dass die zugehörige Abbildungsmatrix die besonders einfache Form

$$A_f^{B,C} = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

hat. Wir suchen nun nach einer analogen Aussage, bei der $V$ und $W$ Vektorräume mit Skalarprodukt sind und wir nur *Orthonormalbasen* $B$ und $C$ zulassen wollen. Da uns dies mehr einschränkt, erwarten wir natürlich, dass die zugehörige Normalform dann nicht mehr ganz so einfach sein wird. Wir werden allerdings sehen, dass es genügt, statt der Einsen auf der „Diagonalen“ der Abbildungsmatrix beliebige positive reelle Zahlen zuzulassen. Daher führen wir für derartige Matrizen zunächst eine einfache Notation ein:

**Notation 22.42** (Nichtquadratische Diagonalmatrizen)**.** Im Folgenden wollen wir auch eine nicht notwendig quadratische Matrix $D = (d_{i,j})_{i,j} \in K^{m\times n}$ als *Diagonalmatrix* bezeichnen, wenn $d_{i,j} = 0$ für alle $i \neq j$. Analog zu Definition 19.29 schreiben wir für $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit $r \leq \min(m,n)$

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) := \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \lambda_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \in K^{m\times n}$$

(wobei die Größe der Matrix aus dieser Schreibweise nicht ersichtlich ist und aus dem Zusammenhang klar sein muss). Oft verlangen wir dabei, dass $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ungleich 0 sind, in diesem Fall ist dann natürlich $r = \operatorname{rk} D$.

Beachte, dass auch diese Diagonalmatrizen wie erwartet transponiert und multipliziert werden können: Ist $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in K^{m\times n}$, so ist z. B. auch

$$D^\mathsf{T} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in K^{n\times m} \quad \text{und} \quad D^\mathsf{T} D = \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_r^2) \in K^{n\times n}.$$

Damit können wir nun den angekündigten Normalformensatz beweisen, der in der Literatur unter dem Namen *Singulärwertzerlegung* bekannt ist. Für den Beweis ist es praktisch, zunächst die Matrixform dieses Satzes zu betrachten.

**Satz 22.43** (Singulärwertzerlegung)**.** *Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gibt es orthogonale bzw. unitäre Matrizen $S \in \mathbb{K}^{m\times m}$ und $T \in \mathbb{K}^{n\times n}$, so dass*

$$S^{-1} A T = \overline{S}^\mathsf{T} A T = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) =: D \quad \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

*eine Diagonalmatrix mit reellen positiven $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ und $r = \operatorname{rk} A$ ist.*

*Die $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sind dabei bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt und heißen die* ***Singulärwerte*** *von $A$. Man nennt die Produktdarstellung $A = SDT^{-1} = SD\overline{T}^\mathsf{T}$ die* ***Singulärwertzerlegung*** *von $A$.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit der Singulärwerte: Sind $S$ und $T$ beliebige orthogonale bzw. unitäre Matrizen der passenden Größen, so dass $\overline{S}^\mathsf{T} A T = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) =: D$ eine

Diagonalmatrix mit reellen positiven $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ist, so folgt durch Transponieren und Konjugieren auch $\overline{T}^\mathsf{T} \overline{A}^\mathsf{T} S = \overline{D}^\mathsf{T} = D^\mathsf{T}$, und damit

$$T^{-1} \overline{A}^\mathsf{T} A T = \overline{T}^\mathsf{T} \overline{A}^\mathsf{T} A T = \overline{T}^\mathsf{T} \overline{A}^\mathsf{T} S \overline{S}^\mathsf{T} A T = D^\mathsf{T} D = \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_r^2) \quad \in \mathbb{K}^{n \times n}.$$

Die Matrix $\overline{A}^\mathsf{T} A$ ist also ähnlich zur Diagonalmatrix $D^\mathsf{T} D$ und hat damit dieselben Eigenwerte. Die $\lambda_1^2, \dots, \lambda_r^2$ (und damit auch $\lambda_1, \dots, \lambda_r$) sind daher bis auf ihre Reihenfolge eindeutig bestimmt, nämlich als die Eigenwerte von $\overline{A}^\mathsf{T} A$ ungleich 0.

Der Existenzbeweis der Singulärwertzerlegung ist konstruktiv und erfolgt in zwei Schritten, wobei der erste eng an den gerade geführten Eindeutigkeitsbeweis angelehnt ist:

(a) Bestimmung von $T$.

Motiviert durch den Eindeutigkeitsbeweis betrachten wir die Matrix $\overline{A}^\mathsf{T} A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Sie ist symmetrisch bzw. hermitesch, da $\overline{\overline{A}^\mathsf{T} A}^\mathsf{T} = \overline{A}^\mathsf{T} A$ gilt. Nach dem Spektralsatz gibt es wie in Beispiel 22.27 also eine orthogonale bzw. unitäre Matrix $T$, so dass $\overline{T}^\mathsf{T} \overline{A}^\mathsf{T} A T$ eine Diagonalmatrix ist; ihre Einträge sind außerdem nach Lemma 22.20 (b) reell.

Nun ist $\overline{A}^\mathsf{T} A$ aber auch positiv semidefinit, denn es gilt $\overline{x}^\mathsf{T} \overline{A}^\mathsf{T} A x = \overline{Ax}^\mathsf{T} Ax = \|Ax\|^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$, wobei $\|\cdot\|$ die Norm des Standardskalarprodukts ist. Die Einträge der Diagonalmatrix $\overline{T}^\mathsf{T} \overline{A}^\mathsf{T} A T$ sind also nicht-negativ, und damit können wir (nach geeigneter Anordnung der Spalten von $T$)

$$\overline{T}^\mathsf{T} \overline{A}^\mathsf{T} A T = \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_r^2)$$

mit reellen $\lambda_1, \dots, \lambda_r > 0$ für ein $r \leq n$ schreiben.

(b) Bestimmung von $S$.

Für alle $i \leq r$ setzen wir

$$s_i := \frac{1}{\lambda_i} A T e_i \quad \in \mathbb{K}^m.$$

Diese Vektoren sind bezüglich des Standardskalarprodukts orthonormal, denn für alle $i, j \leq r$ gilt

$$\overline{s_i}^\mathsf{T} s_j = \frac{1}{\lambda_i \lambda_j} e_i^\mathsf{T} \overline{T}^\mathsf{T} \overline{A}^\mathsf{T} A T e_j \overset{\text{(a)}}{=} \frac{1}{\lambda_i \lambda_j} e_i^\mathsf{T} \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_r^2) \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Wir können sie nach Satz 21.31 also zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^m$ ergänzen (insbesondere ist damit auch $r \leq m$) und daraus die orthogonale bzw. unitäre Matrix $S := (s_1 \mid \cdots \mid s_m)$ bilden.

Wir setzen nun $D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und behaupten, dass damit wie gewünscht $\overline{S}^\mathsf{T} A T = D$, also $AT = SD \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt. Die Gleichheit dieser Matrizen überprüfen wir spaltenweise, d. h. wir zeigen $AT e_i = SDe_i$ für alle $i = 1, \dots, n$:

- Für $i \leq r$ gilt $AT e_i = s_i \lambda_i = SDe_i$ nach (b).
- Für $i > r$ ist

$$\|AT e_i\|^2 = e_i^\mathsf{T} \overline{T}^\mathsf{T} \overline{A}^\mathsf{T} A T e_i \overset{\text{(a)}}{=} e_i^\mathsf{T} \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_r^2) \cdot e_i = 0$$

und damit $AT e_i = 0 = SDe_i$, da die $i$-te Spalte $De_i$ von $D$ eine Nullspalte ist.

Mit $\overline{S}^\mathsf{T} A T = D$ sind $A$ und $D$ nun insbesondere auch äquivalent, so dass $r = \operatorname{rk} D = \operatorname{rk} A$ nach Folgerung 16.46 gilt. Damit ist alles gezeigt. □

**Bemerkung 22.44** (Singulärwertzerlegung für Morphismen)**.** Wie am Anfang dieses Abschnitts erwähnt gibt es natürlich auch eine Variante der Singulärwertzerlegung für Morphismen: Ist $f \colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei endlich-dimensionalen Vektorräumen $V$ und $W$ mit Skalarprodukt, so gibt es Orthonormalbasen $B$ und $C$ von $V$ bzw. $W$, so dass die Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$

diagonal mit reellen nicht-negativen Diagonaleinträgen ist. Dies ergibt sich unmittelbar aus Satz 22.43 angewendet auf eine Abbildungsmatrix von $f$ zu beliebigen Orthonormalbasen.

**Beispiel 22.45.**

(a) Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ quadratisch, symmetrisch bzw. hermitesch und positiv semidefinit, so finden wir nach dem Spektralsatz wie in Beispiel 22.27 bereits eine orthogonale bzw. unitäre Matrix $T$, so dass $\overline{T}^{\mathsf{T}} A T$ eine Diagonalmatrix ist, deren Einträge nach Satz 22.32 (a) in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ liegen. Wir können in Satz 22.43 dann also $S = T$ wählen, und die Singulärwerte von $A$ sind genau die positiven Eigenwerte von $A$. In diesem Sinne kann man Singulärwerte also als eine Art Verallgemeinerung von Eigenwerten auf nicht-quadratische Matrizen ansehen.

(b) Wir wollen eine Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

finden. Um wie im Beweis von Satz 22.43 zunächst $T$ zu bestimmen, müssen wir nach dem Spektralsatz die symmetrische, positiv semidefinite Matrix

$$A^{\mathsf{T}} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

orthogonal diagonalisieren. Dies haben wir bereits in Beispiel 22.28 getan: Mit

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \in \mathrm{O}(2) \quad \text{ist} \quad T^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} A T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}.$$

Die Singulärwerte von $A$ sind also $\lambda_1 = \sqrt{3}$ und $\lambda_2 = \sqrt{1} = 1$. Um nun auch $S$ zu bestimmen, setzen wir

$$s_1 := \frac{1}{\lambda_1} A T e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \qquad s_2 := \frac{1}{\lambda_2} A T e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass diese beiden Vektoren in der Tat wie in der Konstruktion von Satz 22.43 bezüglich des Standardskalarprodukts orthonormal sind. Wir ergänzen sie leicht (z. B. mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren aus Satz 21.31, falls man das Ergebnis nicht bereits sieht) mit

$$s_3 := \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Nach Satz 22.43 gilt dann mit der orthogonalen Matrix $S := (s_1 \,|\, s_2 \,|\, s_3) \in \mathrm{O}(3)$ also

$$S^{-1} A T = S^{\mathsf{T}} A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 22.46** (Approximation von Matrizen)**.** Eine interessante praktische Anwendung der Singulärwertzerlegung liegt im Bereich der Approximation von Matrizen durch Matrizen von kleinem Rang. Dazu betrachten wir einmal eine (große) reelle Matrix $A = (a_{i,k})_{i,k} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in ihrer Singulärwertzerlegung $A = SDT^{\mathsf{T}}$, so dass für alle $i = 1, \ldots, m$ und $k = 1, \ldots, n$ nach Definition 15.5 der Matrixmultiplikation also

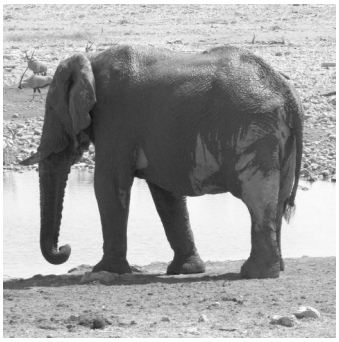
$$a_{i,k} = \sum_{j=1}^{r} s_{i,j} \lambda_j t_{k,j} \qquad (*)$$

mit $S = (s_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{O}(m)$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $T = (t_{j,k})_{j,k} \in \mathrm{O}(n)$ gilt, wobei wir die Singulärwerte so anordnen, dass $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ (mit $r = \mathrm{rk} A$). Beachte dabei, dass in $(*)$ nur die ersten $r$ Spalten von $S$ und $T$ benötigt werden, da in der Summe stets $j \leq r$ ist. Wir können $A$ also exakt rekonstruieren, wenn wir nur diese Teile von $S$ und $T$ sowie die Diagonaleinträge von $D$ kennen, was insgesamt

$$rm + rn + r = r(m+n+1)$$

reelle Zahlen sind. Wenn der Rang $r$ von $A$ klein ist, können dies deutlich weniger Zahlen sein als wenn wir uns die $mn$ Einträge von $A$ direkt merken würden. Matrizen von kleinem Rang lassen sich so also z. B. in einem Computer sehr platzsparend abspeichern.

Für beliebige Matrizen, deren Rang in der Regel nicht klein ist, hilft dies natürlich erst einmal nicht weiter. Ist es aber akzeptabel, die Werte in der Matrix nur näherungsweise abzuspeichern – wie etwa in dem Foto rechts, das mit seinen Helligkeitswerten eine reelle Matrix der Größe $1000 \times 1000$ darstellt – so können wir sehr einfach eine Näherung des Ausdrucks $(*)$ bilden, indem wir ein $r' \leq r$ wählen und in der Summe nur die größten (also „wichtigsten“) $r'$ Singulärwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_{r'}$ berücksichtigen, d. h. $A = SDT^\mathsf{T}$ durch die Matrix

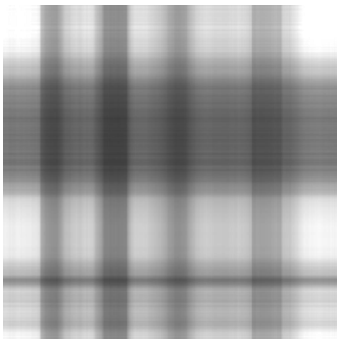


$$A' = SD'T^\mathsf{T} \quad \text{mit} \quad D' = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{r'})$$

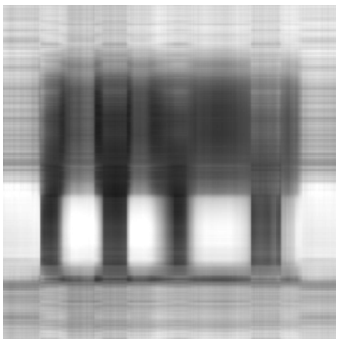
vom Rang $r'$ approximieren, die sich dann wieder wie oben platzsparend abspeichern lässt. Wir können den Fehler, den wir dabei machen, auch genau berechnen: Bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^{m \times n}$ wie in Beispiel 21.15 (c) ist

$$\begin{aligned} \|A - A'\|^2 &= \left\|S(D-D')T^\mathsf{T}\right\|^2 \\ &= \mathrm{Spur}\left(T(D-D')^\mathsf{T} \underbrace{S^\mathsf{T} \cdot S}_{=E} (D-D')T^\mathsf{T}\right) \\ &\overset{19.7}{=} \mathrm{Spur}\left((D-D')^\mathsf{T}(D-D') \underbrace{T^\mathsf{T}T}_{=E}\right) \\ &= \sum_{j>r'} \lambda_j^2. \end{aligned}$$

Da die weggelassenen Singulärwerte $\lambda_j$ für $j > r'$ ja die kleinsten sind, ist diese Näherung also wirklich recht gut. In der Tat kann man zeigen, dass sie im Sinne dieser Norm die beste Approximation von $A$ durch eine Matrix vom Rang höchstens $r'$ ist. Für das obige Foto sind drei dieser Näherungen für (sehr) kleine Werte von $r'$ unten dargestellt.



$r' = 1$



$r' = 3$

$r' = 20$

Die ursprüngliche Matrix $A \in \mathbb{R}^{1000 \times 1000}$ hat wie erwartet maximalen Rang $r = 1000$, ihre Singulärwerte fallen allerdings sehr schnell ab: Schon der erste im mittleren Näherungsfoto weggelassene

Singulärwert $\lambda_4$ ist nur noch etwa $\frac{1}{10}$-mal so groß wie $\lambda_1$, und nahezu die Hälfte aller Singulärwerte ist kleiner als $\frac{1}{1000} \cdot \lambda_1$, so dass deren Vernachlässigung praktisch nicht mehr erkennbar ist. Das rechte Näherungsfoto belegt weniger als 5 % des Speicherplatzes der ursprünglichen Matrix $A$. Beachte auch, dass man dem linken Näherungsfoto ansieht, dass es Rang 1 hat: Alle Spalten der Matrix sind ein Vielfaches desselben Vektors, haben also von oben nach unten die gleiche Helligkeitsverteilung und sind nur insgesamt heller oder dunkler – wodurch das deutlich sichtbare Streifenmuster entsteht.

**Aufgabe 22.47** (Pseudoinverse Matrizen)**.**

(a) Zeige mit Hilfe der Singulärwertzerlegung, dass es zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine eindeutig bestimmte Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ gibt, so dass

$$ABA = A \quad \text{und} \quad BAB = B$$

gilt und $AB$ sowie $BA$ symmetrisch sind.

Ist $A$ quadratisch und invertierbar, so ist dann offensichtlich $B = A^{-1}$. Für eine allgemeine Matrix $A$, die nicht notwendig quadratisch ist bzw. vollen Rang hat, nennt man $B$ daher die *pseudoinverse Matrix* zu $A$.

(b) Berechne für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Singulärwertzerlegung und die pseudoinverse Matrix wie in (a).

**Aufgabe 22.48.** Es seien $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Man zeige:

(a) Die Matrix $A$ kann geschrieben werden als $A = QB$, wobei $Q \in \mathrm{O}(n)$ eine orthogonale und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv semidefinite symmetrische Matrix ist.

(b) In der Zerlegung aus (a) ist die Matrix $B$ eindeutig bestimmt. Ist darüber hinaus $A$ invertierbar, so ist auch $Q$ eindeutig bestimmt, und $B$ ist sogar positiv definit.

Wie kann man diese Aussage geometrisch interpretieren?

**Aufgabe 22.49.** Zu einer Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit $A \neq 0$ bezeichne $\sigma_A \in \mathbb{R}_{>0}$ ihren größten Singulärwert. Man zeige bezüglich der Normen zu den Standardskalarprodukten auf $\mathbb{K}^m$, $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^{m\times n}$:

(a) $\sigma_A = \max\left\{ \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\} \right\}$;

(b) $\sigma_A \leq \|A\|$.

Für welche Matrizen gilt hierbei die Gleichheit?

56

# Grundlagen der Mathematik 2: Analysis

## 23. Topologische Grundbegriffe

Wir haben nun unser Studium der linearen Algebra beendet und wenden uns wieder der Analysis zu. Unser Ziel für den Rest dieser Vorlesung wird es sein, die in den Kapiteln 5 bis 12 entwickelte Theorie für Funktionen in einer reellen Variablen – insbesondere die Differential- und Integralrechnung – auf den mehrdimensionalen Fall zu übertragen, also analoge Resultate z. B. auch für Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ zu finden. Da es bekanntlich die grundlegende Idee der Differentialrechnung ist, beliebige Funktionen durch lineare zu approximieren, werden unsere Ergebnisse zu linearen Abbildungen, die wir in den vorangegangenen Kapiteln zur linearen Algebra erzielt haben, dabei sehr nützlich sein.

### 23.A Normierte und metrische Räume

Erinnern wir uns an die eindimensionale Analysis zurück: Der zentrale Begriff, mit dem wir damals in Kapitel 5 begonnen haben, war der des Grenzwerts einer Folge. Wir haben dabei eine (reelle oder komplexe) Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen ein $a \in \mathbb{K}$ genannt, wenn in jeder $\varepsilon$-Umgebung

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{K} : |x-a| < \varepsilon\} \qquad (*)$$

von $a$ fast alle Folgenglieder $a_n$ liegen (siehe Definition 5.1 und Bemerkung 5.2). Wenn wir diese Definition auf den höherdimensionalen Fall übertragen wollen, brauchen wir dazu offensichtlich eine Verallgemeinerung der Betragsfunktion, mit der wir in $(*)$ den Abstand von $x$ zu $a$ messen konnten. In der Tat haben wir so etwas in Definition 21.13 bereits kennengelernt: die Norm bzw. Länge eines Vektors in einem Vektorraum mit Skalarprodukt. Wir wollen daher zuerst diesen Normbegriff genauer untersuchen. Wie schon in Bemerkung 21.21 erwähnt ist in der Analysis das Konzept einer Norm auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum sehr allgemein und erlaubt nicht nur die Normen von Skalarprodukten, die wir in Abschnitt 21.B kennengelernt haben. Vielmehr ist eine allgemeine Norm definiert als eine Abbildung, die jedem Vektor eine reelle Zahl zuordnet und die erwarteten Eigenschaften erfüllt – nämlich genau diejenigen, die wir in Satz 21.20 für Normen zu Skalarprodukten bereits bewiesen haben.

**Definition 23.1** (Normen und normierte Räume)**.** Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir nennen eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \|x\|$ eine **Norm** auf $V$, wenn für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

(a) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

(b) $\|x\| > 0$ für alle $x \neq 0$;

(c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**Dreiecksungleichung**).

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$ zusammen mit einer Norm $\|\cdot\|$ wird als **normierter Raum** bezeichnet. Wir schreiben ihn als $(V, \|\cdot\|)$, oder auch einfach nur als $V$, wenn die betrachtete Norm aus dem Zusammenhang klar ist.

**Bemerkung 23.2.**

(a) In jedem normierten Raum ist die Norm des Nullvektors nach Definition 23.1 (a) gleich $\|0_V\| = \|0_\mathbb{K} \cdot 0_V\| = 0_\mathbb{K} \cdot \|0_V\| = 0$. Eine Norm nimmt also nur reelle nicht-negative Werte an, und ist genau dann gleich 0, wenn der Vektor der Nullvektor ist.

(b) Genau wie bei Skalarprodukten in Bemerkung 21.14 (b) kann man offensichtlich auch eine Norm auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$ immer auf einen Unterraum $U \leq V$ einschränken, um auch $U$ zu einem normierten Raum zu machen.

**Beispiel 23.3.**

(a) Jeder $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$ mit Skalarprodukt, also jeder euklidische oder unitäre Raum, ist mit der Vorschrift $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ ein normierter Raum – dies haben wir in Satz 21.20 bewiesen. Wenn wir nichts anderes angeben, werden wir in Zukunft jeden Vektorraum mit Skalarprodukt (und nach Bemerkung 23.2 (b) auch jeden Unterraum davon) auf diese Art als normierten Raum ansehen.

Um Normen anschaulich darzustellen, zeichnet man in der Regel die sogenannte Einheitskugel $\{x \in V : \|x\| \leq 1\}$, also die Menge aller Vektoren, die bezüglich dieser Norm die Länge höchstens 1 haben. Wir haben bei der Hauptachsentransformation in Konstruktion 22.37 gesehen, dass diese Einheitskugel im Fall einer von einem Skalarprodukt bestimmten Norm ein gedrehtes Ellipsoid mit Mittelpunkt im Ursprung ist. Im Fall eines reellen zweidimensionalen Vektorraums ist dies im Bild unten dargestellt.

Der wichtigste Fall ist dabei natürlich $V = \mathbb{K}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Wenn wir nichts Gegenteiliges angeben, wollen wir $\mathbb{K}^n$ in Zukunft immer mit der hieraus resultierenden Norm

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

als normierten Raum betrachten. Man nennt dies die **euklidische Norm**. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist die Einheitskugel $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ dann natürlich die „gewöhnliche“ Kugel.

(b) Für $V = \mathbb{K}^n$ ist die **Maximumsnorm** definiert als

$$\|x\| := \max(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

In der Tat ist dies eine Norm: Die Eigenschaften (a) und (b) aus Definition 23.1 sind offensichtlich, und die Dreiecksungleichung folgt sofort aus der in $\mathbb{K}$, denn es ist

$$\|x+y\| = |x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\| + \|y\|,$$

wobei $i \in \{1, \ldots, n\}$ einen Index bezeichnet, für den in $\|x+y\| = \max(|x_1+y_1|, \ldots, |x_n+y_n|)$ das Maximum angenommen wird. Die zugehörige Einheitskugel

$$\{x \in \mathbb{K}^n : \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) \leq 1\} = \{x \in \mathbb{K}^n : |x_i| \leq 1 \text{ für alle } i = 1, \ldots, n\}$$

ist in diesem Fall ein achsenparalleler Würfel; er ist wieder im Bild unten eingezeichnet. Da wir hier kein Ellipsoid erhalten, sehen wir also auch schon, dass die Maximumsnorm keine Norm sein kann, die von einem Skalarprodukt kommt (siehe auch Aufgabe 23.5). Das Konzept eines normierten Raumes lässt also allgemeinere Normen zu als die, die wir in Abschnitt 21.B kennengelernt haben.

(c) Für $V = \mathbb{K}^n$ definieren wir die **Summennorm** durch

$$\|x\| := |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

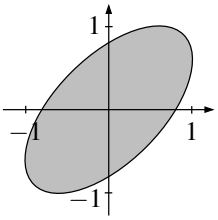
Auch hier sind die Bedingungen (a) und (b) in Definition 23.1 wieder offensichtlich, und die Dreiecksungleichung ergibt sich aus

$$\|x+y\| = |x_1+y_1| + \cdots + |x_n+y_n| \leq |x_1| + |y_1| + \cdots + |x_n| + |y_n| = \|x\| + \|y\|.$$

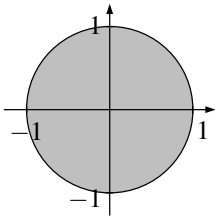
Die zugehörige Einheitskugel ist für $n = 2$ wieder im folgenden Bild dargestellt. Man kann sich ihre Form leicht dadurch überlegen, dass sie wegen der Beträge in der Definition der Norm symmetrisch zu beiden Achsen sein muss und im positiven Quadranten $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ durch die Ungleichung $x_1 + x_2 \leq 1$ gegeben ist.

Die Einheitskugel in $\mathbb{R}^2$ bezüglich der ...

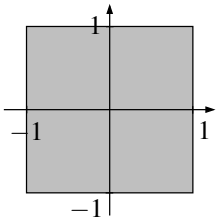
Norm zu einem allgemeinen Skalarprodukt



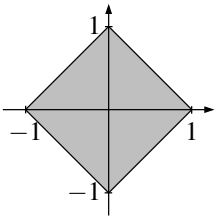

euklidischen Norm




Maximumsnorm




Summennorm




(d) Es sei wieder $V = \mathbb{K}^n$. Für eine reelle Zahl $p \geq 1$ kann man zeigen, dass durch

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}$$

eine Norm definiert wird, die sogenannte **$p$-Norm**. In der Tat sind die ersten beiden Eigenschaften von Definition 23.1 auch hier wieder klar, die Dreiecksungleichung ist jedoch etwas aufwendiger als für unsere bisher betrachteten Normen nachzurechnen (und benötigt die Bedingung $p \geq 1$). Da wir diese allgemeinen $p$-Normen in unserer Vorlesung nicht weiter benötigen, verzichten wir hier auf den Beweis. Ihr könnt ihn z. B. in [Fo1, Kapitel 16, Satz 8] finden.

Wir erwähnen die $p$-Norm hier nur deshalb, weil sie eine Verallgemeinerung unserer oben betrachteten Normen ist und sich daraus auch deren übliche Bezeichnungsweise ableitet: Offensichtlich ist die 1-Norm gerade die Summennorm und die 2-Norm die euklidische Norm. Für $p \to \infty$ hingegen ergibt sich die Maximumsnorm: Ist nämlich $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ ein Vektor, für den ohne Einschränkung das Maximum in $\|x\| = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ für $|x_1|$ angenommen wird, so ist

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = |x_1| \cdot \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{1 + \frac{|x_2|^p}{|x_1|^p} + \cdots + \frac{|x_n|^p}{|x_1|^p}} = |x_1| = \|x\|,$$

da der Ausdruck unter der Wurzel zwischen 1 und $n$ liegt und der Grenzwert für $p \to \infty$ somit durch $\sqrt[p]{1} \to 1$ und $\sqrt[p]{n} \to 1$ eingeschachtelt wird. Für $x \in \mathbb{K}^n$ bezeichnet man daher ...

- die Summennorm mit $\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|$,
- die euklidische Norm mit $\|x\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$,
- die Maximumsnorm mit $\|x\|_\infty := \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$.

(e) Alle oben betrachteten Normen gibt es analog auch auf dem Vektorraum $C^0([a,b])$ aller stetigen reellen Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$: So ist z. B. für eine solche Funktion $f$

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx, \quad \|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx}, \quad \|f\|_\infty := \max\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$$

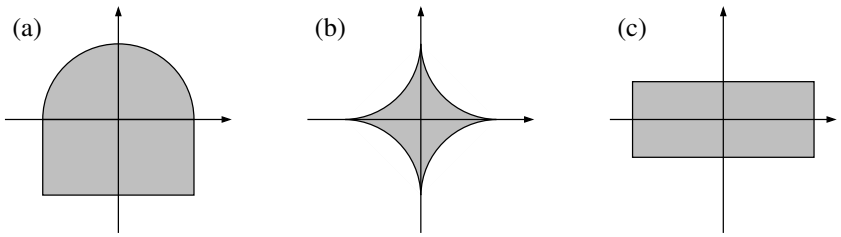
(das Maximum existiert nach Satz 8.25, und die Normeigenschaften beweist man analog zu den Fällen oben bzw. zu Konstruktion 21.16). Die 2-Norm $\|f\|_2$ ist dabei genau die Norm zum Standardskalarprodukt aus Konstruktion 21.16, und die Maximumsnorm $\|f\|_\infty$ haben wir in Aufgabe 8.41 (a) bereits in einem etwas allgemeineren Fall als *Supremumsnorm* kennengelernt.

(f) Auf den Matrizenräumen $\mathbb{K}^{m\times n}$ heißt die zum Standardskalarprodukt aus Beispiel 21.15 (c) gehörige Norm

$$\|A\| = \sqrt{\operatorname{Spur}\left(\overline{A}^{\mathsf{T}} A\right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2} \quad \text{für } A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

die **Frobenius-Norm**. Wir werden $\mathbb{K}^{m\times n}$ im Folgenden standardmäßig mit dieser Norm versehen, sofern wir nichts Gegenteiliges angeben. Beachte aber, dass diese Norm *nicht* mit $\|A\|_2$ bezeichnet wird, weil dieser Name bereits für eine andere Matrixnorm reserviert ist, die wir auch später in Definition 24.38 und Beispiel 24.40 (a) noch kennenlernen werden.

**Aufgabe 23.4.** Welche der folgenden Bilder können Einheitskugeln einer Norm auf $\mathbb{R}^2$ sein?




**Aufgabe 23.5.** Man zeige:

(a) In jedem Vektorraum $V$ mit Skalarprodukt gilt die *Parallelogrammgleichung*

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2) \quad \text{für alle } x,y\in V.$$

(b) Die Maximumsnorm auf $\mathbb{K}^n$ für $n\geq 2$ erfüllt die Parallelogrammgleichung nicht, und kann damit nach (a) also nicht die Norm zu einem Skalarprodukt sein.

**Bemerkung 23.6** (Vergleich von Normen)**.** In Beispiel 23.3 haben wir viele verschiedene Normen gesehen. Wie hängen diese miteinander zusammen? Oft ist es so, dass man Normen gegeneinander abschätzen kann: So gelten z. B. für die Maximumsnorm und die euklidische Norm auf $\mathbb{K}^n$ die Ungleichungen

$$\|x\|_\infty=\max(|x_1|,\dots,|x_n|)=|x_i|\leq\sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2}=\|x\|_2$$

$$\text{und}\quad \|x\|_2=\sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2}\leq\sqrt{|x_i|^2+\cdots+|x_i|^2}=\sqrt{n}\cdot|x_i|=\sqrt{n}\cdot\|x\|_\infty,$$

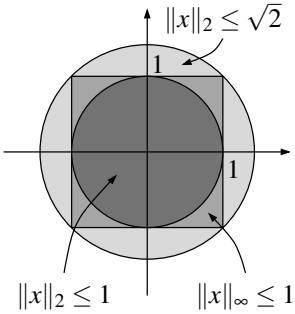
wobei $i\in\{1,\dots,n\}$ ein Index mit maximalem Wert von $|x_i|$ ist. Es gilt also für alle $x\in\mathbb{K}^n$

$$\|x\|_\infty\leq\|x\|_2\leq\sqrt{n}\cdot\|x\|_\infty,$$

d. h. wir haben die Folgerungen:

(a) Wenn $\|x\|_2\leq 1$ gilt, so ist $\|x\|_\infty\leq 1$.

(b) Wenn $\|x\|_\infty\leq 1$ gilt, so ist $\|x\|_2\leq\sqrt{n}$.




Dies kann man sich auch gut anschaulich vorstellen: Betrachten wir zu einer Norm $\|\cdot\|$ Kugeln $\{x\in\mathbb{K}^n:\|x\|\leq r\}$ mit einem anderen Radius als 1, so sind diese wegen der Linearitätseigenschaft aus Definition 23.1 (a) einfach nur skalierte Versionen der Einheitskugel, und die Ergebnisse (a) und (b) oben besagen genau, dass solche Kugeln wie im Bild rechts ineinander liegen: In jedem Kreis liegt noch ein Quadrat, und in jedem Quadrat liegt noch ein Kreis (mit geeigneten Radien).

Wir werden später (z. B. in Lemma 23.17 und Bemerkung 23.18) noch sehen, dass dies dazu führt, dass sich die beiden betrachteten Normen in vielerlei Hinsicht gleich verhalten. Man definiert daher:

**Definition 23.7** (Äquivalente Normen)**.** Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$ heißen **äquivalent**, wenn es Konstanten $a,b\in\mathbb{R}_{>0}$ gibt mit

$$a\,\|x\|\leq\|x\|'\leq b\,\|x\| \quad \text{für alle } x\in V.$$

Man prüft leicht nach, dass dies in der Tat eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen auf $V$ ist.

**Beispiel 23.8.**

(a) Ist $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$, so können wir daraus für ein gegebenes $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ eine skalierte Variante $\|\cdot\|'$ mit

$$\|x\|' := \lambda \cdot \|x\| \quad \text{für alle } x \in V$$

konstruieren, die ebenfalls eine Norm ist. Diese neue Norm $\|\cdot\|'$ ist natürlich zur ursprünglichen äquivalent (wobei in Definition 23.7 mit $a := b := \lambda$ sogar die Gleichheit gilt).

(b) Wie wir in Bemerkung 23.6 gesehen haben, ist die Maximumsnorm auf $\mathbb{K}^n$ zur euklidischen Norm äquivalent.

In der Tat werden wir in Satz 24.37 noch sehen, dass sogar *alle* Normen auf $\mathbb{K}^n$ zueinander äquivalent sind (was sehr praktisch ist, weil wir ab dann für die meisten Anwendungen die uns jeweils am einfachsten erscheinende Norm benutzen können, ohne etwas am Ergebnis zu ändern). Für den Moment bedeutet dies aber erst einmal nur, dass wir für ein Beispiel nichtäquivalenter Normen zwangsläufig einen unendlich-dimensionalen Vektorraum betrachten müssen:

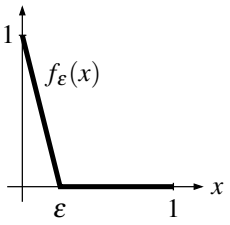
(c) Im Vektorraum $V = C^0([0,1])$ der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ mit den beiden Normen

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx \quad \text{und} \quad \|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$$

aus Beispiel 23.3 (e) betrachten wir für alle $\varepsilon \in (0,1)$ die Funktion $f_\varepsilon$ wie im Bild rechts. Dann gilt

$$\|f_\varepsilon\|_1 = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \|f_\varepsilon\|_\infty = 1,$$

und damit $\|f_\varepsilon\|_\infty = \frac{2}{\varepsilon}\|f_\varepsilon\|_1$. Für $\varepsilon \to 0$ sehen wir also, dass es kein $b \in \mathbb{R}_{>0}$ geben kann mit $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq b\|f_\varepsilon\|_1$, d. h. dass die beiden Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $C^0([0,1])$ nicht äquivalent sind.




Bevor wir zur angekündigten Anwendung des Längen- bzw. Abstandsbegriffs in der Analysis kommen, wollen wir das Konzept eines normierten Raumes aber erst noch etwas verallgemeinern. Eine recht große Einschränkung ist es in der Praxis nämlich, dass normierte Räume nach Definition stets Vektorräume (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) sein müssen. Um nur Abstände zwischen Punkten sinnvoll definieren zu können, benötigt man aber keine Vektorraumstruktur. Diese Idee führt zum folgenden Begriff eines metrischen Raumes, der lediglich den Abstand zweier Punkte, aber nicht die Länge eines Vektors definiert.

**Definition 23.9** (Metriken und metrische Räume)**.** Es sei $M$ eine Menge. Man nennt eine Abbildung $d\colon M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ (x,y) \mapsto d(x,y)$ (die man sich als *Abstandsfunktion* zwischen zwei Punkten vorstellen sollte; der hierfür übliche Buchstabe $d$ steht dabei für *Distanz*) eine **Metrik** auf $M$, wenn für alle $x,y,z \in M$ gilt:

(a) $d(x,y) = d(y,x)$ (**Symmetrie**);

(b) $d(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$;

(c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (**Dreiecksungleichung**).

Eine Menge $M$ zusammen mit einer Metrik $d$ heißt **metrischer Raum** und wird manchmal auch als $(M,d)$ geschrieben.

**Lemma 23.10.** *Jeder normierte Raum $(V, \|\cdot\|)$ ist mit der Abstandsfunktion $d(x,y) := \|x-y\|$ ein metrischer Raum.*

*Wenn wir nichts anderes spezifizieren, werden wir in Zukunft daher jeden normierten Raum auf diese Art als metrischen Raum auffassen.*

*Beweis.* Wir überprüfen die Eigenschaften aus Definition 23.9: Für alle $x,y,z \in V$ folgt nach Definition 23.1

- aus Teil (a): $d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |-1| \cdot \|y-x\| = d(y,x)$;
- aus Teil (b): $d(x,y) = \|x-y\| = 0$ genau dann, wenn $x-y=0$, also $x=y$;
- aus Teil (c): $d(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y)+d(y,z)$. □

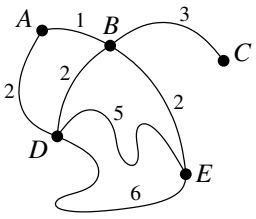
**Bemerkung 23.11.** Analog zu Skalarprodukten und Normen (siehe Bemerkung 21.14 (b) und Bemerkung 23.2 (b)) lassen sich auch Metriken auf beliebige Teilmengen einschränken. Wir werden daher jede Teilmenge eines metrischen Raumes in Zukunft standardmäßig auf diese Art wieder als metrischen Raum betrachten. Fassen wir alle unsere Konventionen zusammen, so werden wir also insbesondere jede Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ als metrischen Raum mit der *euklidischen Metrik*

$$d(x,y) = \|x-y\|_2 = \sqrt{|x_1-y_1|^2 + \cdots + |x_n-y_n|^2}$$

auffassen, sofern wir nichts Gegenteiliges angeben.

**Beispiel 23.12.**

(a) Wir betrachten die „Landkarte“ mit 5 Städten $A,B,C,D,E$ und Verbindungsstraßen wie im Bild rechts, wobei die (positiven) Zahlen an den Straßen deren Längen angeben sollen – man nennt ein solches Diagramm auch einen (zusammenhängenden) *gewichteten Graphen*. Für die Menge $M = \{A,B,C,D,E\}$ und $x,y \in M$ sei nun $d(x,y)$ die Länge eines kürzesten Weges von $x$ nach $y$. So ist z. B. $d(D,E) = 4$, da von $D$ nach $E$ der Weg über $B$ der kürzeste ist und eine Gesamtlänge von 4 hat.




Man sieht leicht ein, dass diese Abstandsfunktion $d$ dann eine Metrik auf $M$ definiert: Die Eigenschaften (a) und (b) aus Definition 23.9 sind offensichtlich, und (c) folgt aus der einfachen Tatsache, dass $d(x,y)+d(y,z)$ ja die Länge eines kürzesten Weges von $x$ über $y$ nach $z$ ist und diese natürlich mindestens gleich der Länge $d(x,z)$ eines kürzesten Weges von $x$ nach $z$ ist, bei dem man nicht notwendig über $y$ laufen muss.

Metrische Räume dieser Art spielen z. B. in der Optimierung eine große Rolle. In unserer Vorlesung werden sie nicht weiter vorkommen, sondern sollen hier nur als Beispiel dafür dienen, dass metrische Räume sehr allgemeine Objekte sind und auch „ganz anders aussehen“ können als normierte Vektorräume.

(b) Auf jeder Menge $M$ ist

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

offensichtlich eine Metrik, die sogenannte **diskrete Metrik**.

## 23.B Folgenkonvergenz in metrischen Räumen

Wie bereits angekündigt können wir nun analog zu Definition 5.1 Grenzwerte von Folgen in metrischen Räumen (und damit auch in normierten Räumen bzw. Vektorräumen mit Skalarprodukt) definieren.

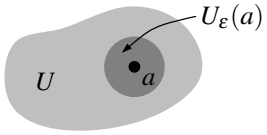
**Definition 23.13** (Kugeln, Umgebungen und Grenzwerte von Folgen)**.** Es seien $M$ ein metrischer Raum und $a \in M$.

(a) Zu $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt

$$U_r(a) := \{x \in M : d(x,a) < r\} \quad \text{die } \textbf{offene Kugel}, \text{ und}$$
$$K_r(a) := \{x \in M : d(x,a) \leq r\} \quad \text{die } \textbf{abgeschlossene Kugel}$$

um $a$ mit Radius $r$.

(b) Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt **Umgebung** von $a$, wenn es wie im Bild rechts ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(a) \subset U$ (insbesondere ist dann natürlich auch $a \in U$). Damit ist auch $U_\varepsilon(a)$ selbst eine Umgebung von $a$; man nennt sie die **$\varepsilon$-Umgebung** von $a$.




(c) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $M$. Dann heißt $a$ **Grenzwert** von $(a_n)_n$, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \colon d(a_n, a) < \varepsilon$$

(wobei wir die Bedingung $d(a_n,a) < \varepsilon$ natürlich auch als $a_n \in U_\varepsilon(a)$ schreiben können). Wie im Fall von Folgen in $\mathbb{K}$ werden wir gleich in Lemma 23.15 sehen, dass ein solcher Grenzwert $a$ eindeutig ist, sofern er existiert. Wir können ihn dann also *den* Grenzwert der Folge nennen und schreiben wie gewohnt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder „$a_n \to a$ für $n \to \infty$“. Existiert dieser Grenzwert, so heißt die Folge $(a_n)_n$ **konvergent**, andernfalls **divergent**.

57

**Bemerkung 23.14.**

(a) Es gibt mehrere äquivalente Umformulierungen der obigen Grenzwertdefinition. Am nützlichsten ist vermutlich das Kriterium

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0,$$

das wegen der Positivität der Metrik unmittelbar durch Vergleich mit Definition 5.1 (b) folgt und den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ im metrischen Raum $M$ damit direkt auf einen Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n,a)$ in $\mathbb{R}$ zurückführt. Eine andere äquivalente Formulierung von Definition 23.13 (c) mit Hilfe des Umgebungsbegriffs und der Notation „fast alle“ für „alle bis auf endlich viele“ ist offensichtlich genau wie in Bemerkung 5.2

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ \Leftrightarrow\ \text{In jeder } \varepsilon\text{-Umgebung von } a \text{ liegen fast alle Folgenglieder } a_n.$$

Dies kann man schließlich noch umformulieren als

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ \Leftrightarrow\ \text{In jeder Umgebung von } a \text{ liegen fast alle Folgenglieder } a_n.$$

Liegen nämlich in jeder Umgebung fast alle $a_n$, so natürlich insbesondere auch in jeder $\varepsilon$-Umgebung. Enthält umgekehrt jede $\varepsilon$-Umgebung von $a$ fast alle $a_n$, so auch jede Umgebung von $a$, da eine solche ja nach Definition noch eine $\varepsilon$-Umgebung von $a$ enthält.

(b) Wendet man Definition 23.13 auf einen normierten Raum $V$ an, so ist nach Lemma 23.10 also $d(x,y) = \|x-y\|$. In diesem Fall ist demnach z. B. $U_r(a) = \{x \in V : \|x-a\| < r\}$, und eine Folge $(a_n)_n$ in $V$ konvergiert genau dann gegen $a \in V$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \|a_n - a\| = 0$.

**Lemma 23.15** (Eindeutigkeit des Grenzwerts)**.** *In einem metrischen Raum hat jede Folge höchstens einen Grenzwert.*

*Beweis.* Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in einem metrischen Raum $M$, die gegen zwei Punkte $a,b \in M$ konvergiert. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung $d(a,b) \leq d(a,a_n) + d(a_n,b)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und daher folgt durch Grenzübergang $n \to \infty$

$$d(a,b) \leq \lim_{n\to\infty} d(a,a_n) + \lim_{n\to\infty} d(a_n,b) \overset{23.14\,(a)}{=} 0 + 0 = 0.$$

Also ist $d(a,b) = 0$, und damit nach Definition 23.9 (b) wie behauptet $a = b$. □

**Beispiel 23.16.** Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $a_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}$ für alle $n$.

(a) Versehen wir $\mathbb{R}^2$ standardmäßig mit der euklidischen Norm, so konvergiert die Folge nach Bemerkung 23.14 (b) gegen $0 \in \mathbb{R}^2$, denn es ist

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n - 0\|_2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = 0.$$

(b) Auch mit der Maximumsnorm aus Beispiel 23.3 (b) konvergiert die Folge gegen 0, denn

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n - 0\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \max\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

(c) In der diskreten Metrik aus Beispiel 23.12 (b) konvergiert die Folge jedoch nicht gegen 0: Hier ist

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, 0) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0,$$

da ja $a_n \neq 0$ für alle $n$ gilt. In der Tat konvergiert eine Folge in dieser Metrik genau dann gegen $a$, wenn fast alle Folgenglieder gleich $a$ sind. Da dies für die in diesem Beispiel betrachtete Folge für kein $a$ der Fall ist, ist diese Folge in der diskreten Metrik also divergent.

Die Konvergenz einer Folge in einem metrischen Raum hängt also im Allgemeinen von der gewählten Metrik ab. Wir wollen nun aber zeigen, dass dies bei äquivalenten Normen nicht der Fall ist. So hatten wir ja z. B. in Beispiel 23.8 (b) gesehen, dass die Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^2$ zur euklidischen Norm äquivalent ist, und dementsprechend haben wir oben in den Beispielen 23.16 (a) und (b) dasselbe Ergebnis erhalten. Diese Tatsache beruht auf der folgenden wichtigen Aussage.

**Lemma 23.17.** *Es seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei äquivalente Normen auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$. Dann gilt für alle $a \in V$ und $U \subset V$:*

$$U \text{ ist eine Umgebung von } a \text{ bezüglich } \|\cdot\|' \iff U \text{ ist eine Umgebung von } a \text{ bezüglich } \|\cdot\|,$$

*d. h. „die beiden Normen erzeugen den gleichen Umgebungsbegriff“.*

*Beweis.* Nach Voraussetzung gibt es eine Konstante $b \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\|x\|' \leq b\|x\|$ für alle $x \in V$. Im Folgenden bezeichnen wir die $\varepsilon$-Umgebungen eines Punktes $a \in V$ bezüglich $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ mit $U_\varepsilon(a)$ bzw. $U'_\varepsilon(a)$.

Es sei nun $U$ eine Umgebung von $a$ bezüglich $\|\cdot\|'$, d. h. es gilt $U'_\varepsilon(a) \subset U$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann ist aber auch $U_{\varepsilon/b}(a) \subset U$, denn für alle $x \in U_{\varepsilon/b}(a)$ gilt $\|x-a\|' \leq b\|x-a\| < b \cdot \frac{\varepsilon}{b} = \varepsilon$, also $x \in U'_\varepsilon(a) \subset U$. Damit ist $U$ auch eine Umgebung von $a$ bezüglich $\|\cdot\|$.

Die andere Richtung ergibt sich analog durch Vertauschen der Rollen der beiden Normen. □

**Bemerkung 23.18** (Topologie)**.** Wir hatten in Abschnitt 23.A bereits erwähnt, dass sich äquivalente Normen in vielerlei Hinsicht gleich verhalten. In Lemma 23.17 haben wir nun ein erstes und sehr wichtiges Beispiel dafür gesehen: Der von ihnen erzeugte Umgebungsbegriff ist der gleiche.

Damit stimmen bei äquivalenten Normen natürlich auch alle Eigenschaften von Objekten überein, die sich allein mit Hilfe des Umgebungsbegriffs definieren lassen. Derartige Eigenschaften, von denen wir im Folgenden noch viele kennenlernen werden, bezeichnet man als *topologische Eigenschaften*. Ein erstes Beispiel dafür ist die Folgenkonvergenz, denn nach Bemerkung 23.14 (a) konvergiert eine Folge ja genau dann gegen einen Punkt, wenn in jeder Umgebung dieses Punktes fast alle Folgenglieder liegen. So können wir nach Beispiel 23.8 (b) also z. B. für Fragen zur Folgenkonvergenz in $\mathbb{K}^n$ statt der euklidischen Norm auch die oft einfachere Maximumsnorm verwenden, da diese beiden Normen dort äquivalent sind.

In der Tat gibt es eine weitere Verallgemeinerung metrischer Räume: die sogenannten *topologischen Räume*, die ihr in der Vorlesung „Einführung in die Topologie“ des zweiten Studienjahres kennenlernen könnt. In ihnen gibt es keine Metrik mehr, aber noch einen Umgebungsbegriff. Demnach kann man dort dann zwar keine Abstände mehr messen, aber dennoch alle topologischen Eigenschaften wie z. B. die Folgenkonvergenz definieren und untersuchen.

Im konkreten Fall des normierten Raumes $\mathbb{K}^n$ ist die Untersuchung der Konvergenz von Folgen allerdings noch etwas einfacher: Wie man vielleicht schon vermutet, wollen wir jetzt kurz zeigen, dass man diese Konvergenz dort einfach koordinatenweise überprüfen kann.

**Lemma 23.19.** *Eine Folge $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}^n$ konvergiert (in der Standardnorm) genau dann gegen $a \in \mathbb{K}^n$, wenn jede Koordinatenfolge $(a_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $i = 1, \ldots, n$ in $\mathbb{K}$ gegen die $i$-te Koordinate $a_i$ von $a$ konvergiert.*

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} a^{(k)} = a &\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \|a^{(k)} - a\|_2 = 0 && \text{(Bemerkung 23.14 (b))}\\
&\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \sqrt{|a_1^{(k)} - a_1|^2 + \cdots + |a_n^{(k)} - a_n|^2} = 0\\
&\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \lim_{k\to\infty} |a_i^{(k)} - a_i| = 0 \text{ für alle } i = 1,\ldots,n\\
&\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} a_i^{(k)} = a_i \text{ für alle } i = 1,\ldots,n,
\end{aligned}$$

wobei in $(*)$ die Richtung „$\Leftarrow$“ die üblichen Grenzwertsätze in $\mathbb{R}$ sind, und die Richtung „$\Rightarrow$“ aus der Ungleichung $|a_i^{(k)} - a_i| \leq \sqrt{|a_1^{(k)} - a_1|^2 + \cdots + |a_n^{(k)} - a_n|^2}$ folgt. □

Als Nächstes wollen wir die in $\mathbb{K}$ aus Lemma 5.8 bekannte Aussage, dass konvergente Folgen beschränkt sind, auf metrische Räume übertragen. Dazu müssen wir aber natürlich den Begriff der Beschränktheit einer Menge oder Folge in einem metrischen Raum erst einmal definieren.

**Definition 23.20** (Beschränkte Mengen und Folgen)**.** Es sei $M$ ein nicht-leerer metrischer Raum.

(a) Eine Teilmenge $X \subset M$ heißt **beschränkt**, wenn sie in einer abgeschlossenen Kugel enthalten ist, also wenn es ein $a \in M$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $X \subset K_r(a)$, d. h. mit $d(x,a) \leq r$ für alle $x \in X$.

(b) Eine Folge in $M$ heißt **beschränkt**, wenn die Menge ihrer Folgenglieder in $M$ beschränkt ist.

Konventionsgemäß werden wir in $M = \emptyset$ die einzig mögliche Teilmenge $\emptyset$ auch als beschränkt definieren.

**Bemerkung 23.21.**

(a) Ist $X \subset M$ beschränkt, so gilt die Bedingung aus Definition 23.20 (a) sogar für alle $a \in M$: Ist nämlich $d(x,a) \leq r$ für alle $x \in X$, so gilt für einen beliebigen anderen Punkt $a' \in M$ auch

$$d(x,a') \leq d(x,a) + d(a,a') \leq r + d(a,a') = R \qquad \text{für alle } x \in X,$$

wobei wir $R := r + d(a,a')$ gesetzt haben.

Insbesondere können wir in einem normierten Raum $V$ also stets $a = 0$ wählen, und erhalten so die Aussage, dass eine Teilmenge $X \subset V$ genau dann beschränkt ist, wenn es ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $\|x\| \leq r$ für alle $x \in X$. Für den Fall $V = \mathbb{K}$ mit der gewöhnlichen Metrik stimmt dies dann offensichtlich mit unserer alten Definition 4.23 (b) der Beschränktheit überein.

(b) Wie wir in Aufgabe 23.25 sehen werden, ist die Beschränktheit einer Menge in einem metrischen Raum keine topologische Eigenschaft im Sinne von 23.18. Dennoch stimmt sie für zwei äquivalente Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem Vektorraum $V$ überein: Ist $\|x\|' \leq b\,\|x\|$ für eine Konstante $b \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $x \in V$, und ist $X \subset V$ beschränkt bezüglich $\|\cdot\|$, d. h. gibt es ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\|x\| \leq r$ für alle $x \in X$, so ist dann auch $\|x\|' \leq b\,\|x\| \leq br$ für alle $x \in X$, d. h. $X$ ist auch beschränkt bezüglich $\|\cdot\|'$.

**Lemma 23.22.** *In einem metrischen Raum ist jede konvergente Folge beschränkt.*

*Beweis.* Es sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a$. Nach Bemerkung 23.14 (a) gilt dann $d(a_n,a) \to 0$ für $n \to \infty$. Nach Lemma 5.8 ist die konvergente reelle Folge $(d(a_n,a))_n$ also beschränkt, d. h. es gibt ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $d(a_n,a) \leq r$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist auch $(a_n)_n$ beschränkt. □

Als einfache Folgerung können wir nun die aus Satz 5.13 bekannten Grenzwertsätze verallgemeinern – also die Aussage, dass Grenzwerte mit den üblichen Rechenoperationen vertauschen. Da es nach Definition aber in metrischen Räumen überhaupt keine Rechenoperationen und in normierten Vektorräumen nur Vektoraddition und Skalarmultiplikation gibt, müssen wir uns dabei natürlich auf diese Fälle beschränken.

**Satz 23.23** (**Grenzwertsätze** in normierten Räumen)**.** *Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei konvergente Folgen in einem normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$ mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Ferner sei $(\lambda_n)_n$ eine konvergente Folge in $\mathbb{K}$ mit $\lambda_n \to \lambda$. Dann gilt:*

(a) $a_n + b_n \to a + b$ *und* $a_n - b_n \to a - b$;

(b) $\lambda_n a_n \to \lambda a$.

*Beweis.*

(a) Der Beweis ist (bis auf das Ersetzen der Betragsstriche durch die Norm) wörtlich derselbe wie in Satz 5.13.

(b) Auch hier ist der Beweis analog zum eindimensionalen Fall: Es gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda_n a_n - \lambda a\| &= \|\lambda_n a_n - \lambda a_n + \lambda a_n - \lambda a\| \\ &\le \|(\lambda_n - \lambda) a_n\| + \|\lambda (a_n - a)\| && \text{(Dreiecksungleichung)} \\ &= \underbrace{|\lambda_n - \lambda|}_{(*)} \cdot \|a_n\| + |\lambda| \cdot \underbrace{\|a_n - a\|}_{(*)}. && \text{(Definition 23.1 (a))} \end{aligned}$$

Dabei sind die mit $(*)$ bezeichneten Terme nach Voraussetzung (reelle) Nullfolgen, und wegen der Konvergenz von $(a_n)_n$ sind die Normen $\|a_n\|$ nach Lemma 23.22 beschränkt. Wie im Beweis von Satz 5.13 (b) ergibt sich nun also wieder $\|\lambda_n a_n - \lambda a\| \to 0$, und damit $\lambda_n a_n \to \lambda a$. □

**Aufgabe 23.24.** Es sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellen Zahlenfolgen. Man zeige:

(a) Die Abbildung $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \min(|x-y|, 1)$ ist eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

(b) Die Abbildung

$$e\colon V \times V \to \mathbb{R},\ \big((a_k)_k, (b_k)_k\big) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d(a_k, b_k)}{2^k}$$

(mit $d$ wie in (a)) ist eine Metrik auf $V$.

(c) Eine Folge reeller Folgen $(a_k^{(n)})_k \in V$ mit $n \in \mathbb{N}$ konvergiert für $n \to \infty$ bezüglich der Metrik $e$ wie in (b) genau dann gegen $(a_k)_k \in V$, wenn sie „punktweise konvergiert“, also wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_k^{(n)} = a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

**Aufgabe 23.25.** Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ sind

$$d_1(x,y) := \begin{cases} \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{für } x \neq y, \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases} \qquad \text{und} \qquad d_2(x,y) := \min(\|x-y\|_2, 1)$$

Metriken auf $\mathbb{R}^2$ (das braucht ihr nicht zu zeigen).

(a) Skizziere die qualitativ verschiedenen Fälle, wie abgeschlossene Kugeln bezüglich dieser beiden Metriken aussehen können.

(b) Man zeige: Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ ist bezüglich $d_1$ genau dann beschränkt, wenn $A$ bezüglich der euklidischen Metrik beschränkt ist. Für $d_2$ gilt dies jedoch nicht.

(c) Man zeige: Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ ist bezüglich $d_2$ genau dann eine Umgebung eines Punktes $a \in \mathbb{R}^2$, wenn $A$ bezüglich der euklidischen Metrik eine Umgebung von $a$ ist. Für $d_1$ gilt dies jedoch nicht.

Insbesondere zeigt $d_2$ also, dass Beschränktheit kein topologischer Begriff ist: Diese Metrik liefert die gleichen Umgebungen wie die euklidische Metrik, aber nicht die gleichen beschränkten Mengen.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch kurz das Cauchy-Kriterium aus Satz 6.25 verallgemeinern, das immer dann für den Nachweis der Konvergenz einer Folge benötigt wird, wenn ihr Grenzwert vorher noch nicht bekannt ist. Die Definition einer Cauchyfolge kann dabei unmittelbar aus Definition 6.22 übertragen werden.

**Definition 23.26** (Cauchyfolgen)**.** Eine Folge $(a_n)_n$ in einem metrischen Raum $M$ heißt **Cauchyfolge**, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m,n \geq n_0 \colon d(a_m, a_n) < \varepsilon.$$

**Bemerkung 23.27.**

(a) Genau wie die Beschränktheit von Mengen bzw. Folgen ist auch das Konzept von Cauchyfolgen keine topologische Eigenschaft. Mit dem gleichen Argument wie in Bemerkung 23.21 (b) stimmt es für äquivalente Normen aber dennoch überein.

(b) Wie in Bemerkung 6.23 folgt auch in beliebigen metrischen Räumen sofort aus der Dreiecksungleichung, dass jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist. Im Gegensatz zu Satz 6.25 gilt die Umkehrung in allgemeinen metrischen Räumen aber nicht: In $M = \mathbb{R}_{>0}$ (mit der euklidischen Metrik) ist die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ eine Cauchyfolge, da sie in $\mathbb{R}$ gegen 0 konvergiert; ihr Grenzwert 0 liegt jedoch nicht in $M$, so dass sie in $M$ divergiert.

Da es in der Regel sehr wichtig ist zu wissen, ob Cauchyfolgen stets konvergieren und man somit die Konvergenz von Folgen mit dem Cauchy-Kriterium überprüfen kann, haben derartige metrische Räume einen besonderen Namen.

**Definition 23.28** (Vollständige Räume)**.**

(a) Ein metrischer Raum heißt **vollständig**, wenn in ihm jede Cauchyfolge konvergiert (und die Cauchyfolgen nach Bemerkung 23.27 (b) damit genau die konvergenten Folgen sind).

(b) Ein vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**.

**Satz 23.29.** *$\mathbb{K}^n$ ist (bezüglich der euklidischen Norm) ein Banachraum.*

*Beweis.* Nach Bemerkung 23.18 und 23.27 (a) dürfen wir auf $\mathbb{K}^n$ statt der euklidischen Norm die dazu äquivalente Maximumsnorm verwenden.

Es sei nun $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}^n$, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\|a^{(k)} - a^{(l)}\|_\infty < \varepsilon$, und damit auch $|a_i^{(k)} - a_i^{(l)}| < \varepsilon$ für alle $k,l \geq k_0$ und $i = 1,\dots,n$ gilt. Also sind die Koordinatenfolgen $(a_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $i$ Cauchyfolgen in $\mathbb{K}$ und damit nach Satz 6.25 konvergent gegen gewisse $a_i \in \mathbb{K}$. Nach Lemma 23.19 konvergiert dann aber auch die ursprüngliche Folge $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen den Vektor $a$ mit Koordinaten $a_1,\dots,a_n$. □

**Aufgabe 23.30.** Zeige die folgenden Eigenschaften der Frobenius-Norm:

(a) Für alle $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$ gilt $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

(b) Für alle $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ existiert $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ in $\mathbb{K}^{n\times n}$.

(c) Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\|A\| < 1$, so ist $E - A$ invertierbar, und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (E-A)^{-1}$.

**Aufgabe 23.31** (Beispiel für einen nicht-vollständigen normierten Raum)**.** Es sei $V = C^0([0,1])$ der Vektorraum der stetigen reellen Funktionen auf $[0,1]$. Man zeige:

(a) $(V, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.

(b) $(V, \|\cdot\|_2)$ ist kein Banachraum.

## 23.C Offene und abgeschlossene Mengen

Im Rest dieses Kapitels wollen wir nun noch einige wichtige topologische Eigenschaften einführen (die also nur vom Umgebungsbegriff in einem metrischen Raum abhängen). Die ersten von ihnen sind die einer offenen bzw. abgeschlossenen Menge, die eine direkte Verallgemeinerung der offenen und abgeschlossenen Intervalle bzw. Kugeln aus Notation 4.17 und Definition 23.13 (a) sind und anschaulich ausdrücken, ob eine Menge ihre Randpunkte mit enthält (siehe auch Bemerkung 23.41).

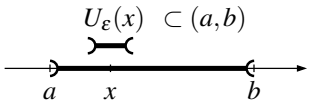
**Definition 23.32** (Offene und abgeschlossene Mengen)**.** Es sei $M$ ein metrischer Raum.

(a) Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt **offen**, wenn sie eine Umgebung von jedem ihrer Punkte ist, also wenn es zu jedem $a \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(a) \subset U$.

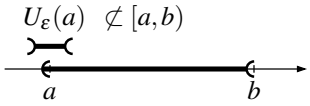
(b) Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt **abgeschlossen**, wenn $M \backslash A$ offen ist, also wenn es zu jedem $a \in M \backslash A$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(a) \subset M \backslash A$. Man bezeichnet die Menge $M \backslash A$ oft als das **Komplement** von $A$ in $M$ – muss dabei aber aufpassen, dass dies natürlich nicht mit der Definition 17.8 eines Komplements von Unterräumen übereinstimmt.

**Beispiel 23.33.**

(a) In $\mathbb{R}$ (mit der gewöhnlichen Metrik) sind offene Intervalle $(a,b)$ offen im Sinne von Definition 23.32: Um jeden Punkt $x$ eines solchen Intervalls finden wir eine $\varepsilon$-Umgebung (nämlich für ein beliebiges $\varepsilon \leq \min(x-a, b-x)$), die ganz in $(a,b)$ liegt. Ebenso sind die uneigentlichen Intervalle $(-\infty, b)$ und $(a, \infty)$ offen – in der Literatur werden sie daher im Gegensatz zu unserer Konvention in Notation 4.17 (a) manchmal auch zu den offenen Intervallen gezählt. Vereinigungen solcher Intervalle wie z. B. $(0,1) \cup (2, \infty)$ sind aus dem gleichen Grund ebenfalls offen. Dagegen sind die Intervalle $[a,b)$, $(a,b]$ und $[a,b]$ aufgrund der enthaltenen Randpunkte nicht offen, da es hier um die Punkte $x = a$ bzw. $x = b$, die innerhalb des Intervalls liegen, keine solche $\varepsilon$-Umgebung innerhalb des Intervalls mehr gibt.



$(a,b)$ ist offen



$[a,b)$ ist nicht offen

58

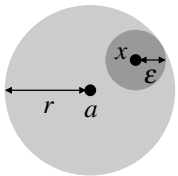
(b) Wiederum in $\mathbb{R}$ sind abgeschlossene Intervalle $[a,b]$ abgeschlossen, da ihre Komplemente $\mathbb{R} \backslash [a,b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ nach (a) offen sind. Ebenso sind die uneigentlichen Intervalle $(-\infty, b]$ und $[a, \infty)$ abgeschlossen, nicht aber die anderen Intervalltypen wie z. B. $(a,b)$, $(a,b]$ oder $(a, \infty)$. Wie bei den offenen Intervallen werden die uneigentlichen Intervalle $(-\infty, b]$ und $[a, \infty)$ in manchen Büchern daher auch zu den abgeschlossenen Intervallen gezählt – für die beschränkten abgeschlossenen Intervalle $[a,b]$ ist dann der Name „*kompaktes Intervall*“ üblich (siehe Beispiel 23.52).

Insbesondere sehen wir an diesem Beispiel schon, dass „abgeschlossen“ nicht das Gegenteil von „offen“ ist: Das Intervall $[a,b)$ ist z. B. weder offen noch abgeschlossen, da es einen Randpunkt $a$ enthält und den anderen $b$ nicht.

(c) In jedem metrischen Raum $M$ sind die leere Menge $\emptyset$ und der ganze Raum $M$ trivialerweise offen, und damit gleichzeitig auch abgeschlossen.

(d) In jedem metrischen Raum sind die offenen Kugeln $U_r(a)$ aus Definition 23.13 (a) offen: Ist $x \in U_r(a)$ beliebig, also $d(x,a) < r$, so ist wie im Bild rechts $U_\varepsilon(x) \subset U_r(a)$ mit $\varepsilon := r - d(x,a)$, denn für alle $y \in U_\varepsilon(x)$ gilt nach der Dreiecksungleichung

$$d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) < \varepsilon + d(x,a) = r.$$

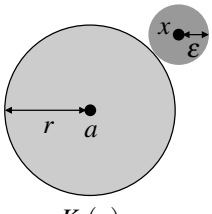


$U_r(a)$

Also ist $U_r(a)$ offen. Analog sieht man, dass jede abgeschlossene Kugel $K_r(a)$ abgeschlossen ist: Ist $x \in M \backslash K_r(a)$, also $d(x,a) > r$, so ist $U_\varepsilon(x) \subset M \backslash K_r(a)$ mit $\varepsilon := d(x,a) - r > 0$, denn für alle $y \in U_\varepsilon(x)$ gilt nun

$$d(y,a) \geq d(x,a) - d(x,y) > d(x,a) - \varepsilon = r,$$

d. h. $K_r(a)$ ist abgeschlossen. Insbesondere sind also einpunktige Mengen $\{a\} = K_0(a)$ als abgeschlossene Kugeln vom Radius 0 stets abgeschlossen.



$K_r(a)$

(e) Da in jeder $\varepsilon$-Umgebung eines beliebigen Punktes von $\mathbb{R}$ sowohl rationale als auch irrationale Zahlen liegen, ist weder die Menge der rationalen noch die der irrationalen Zahlen offen in $\mathbb{R}$. Mit anderen Worten ist $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen.

Die wichtigsten Eigenschaften offener und abgeschlossener Mengen sind die folgenden:

**Lemma 23.34** (Durchschnitte und Vereinigungen offener und abgeschlossener Mengen)**.** *In jedem metrischen Raum gilt:*

(a) *Durchschnitte endlich vieler offener Mengen sind offen.*

(b) *Vereinigungen beliebig vieler (also auch unendlich vieler) offener Mengen sind offen.*

(c) *Vereinigungen endlich vieler abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*

(d) *Durchschnitte beliebig vieler abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*

*Beweis.* Es sei $M$ ein metrischer Raum.

(a) Es seien $U_1, \dots, U_n \subset M$ offen und $a \in U_1 \cap \dots \cap U_n$. Dann ist $a \in U_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Da $U_i$ offen ist, gibt es zu jedem $i$ ein $\varepsilon_i > 0$ mit $U_{\varepsilon_i}(a) \subset U_i$. Mit $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ ist dann also $U_\varepsilon(a) \subset U_1 \cap \dots \cap U_n$ eine Umgebung von $a$, die ganz in $U_1 \cap \dots \cap U_n$ liegt. Also ist $U_1 \cap \dots \cap U_n$ offen.

(b) Es seien $I$ eine beliebige Indexmenge und $U_i \subset M$ für alle $i \in I$ offen. Ist nun $a \in \bigcup_{i \in I} U_i$, so ist also $a \in U_j$ für ein $j \in I$. Da $U_j$ offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subset U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Also ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

(c) Dies folgt nun durch Komplementbildung aus (a): sind $A_1, \dots, A_n \subset M$ abgeschlossen, also $M \backslash A_1, \dots, M \backslash A_n$ offen, so ist nach (a) auch

$$(M \backslash A_1) \cap \dots \cap (M \backslash A_n) = M \backslash (A_1 \cup \dots \cup A_n)$$

offen, und $A_1 \cup \dots \cup A_n$ damit abgeschlossen.

(d) ergibt sich analog aus (b): Sind $A_i \subset M$ abgeschlossen für alle $i$ in einer Indexmenge $I$, also $M \backslash A_i$ offen, so ist nach (b) auch

$$\bigcup_{i \in I} (M \backslash A_i) = M \backslash \bigcap_{i \in I} A_i$$

offen, d. h. $\bigcap_{i \in I} A_i$ ist abgeschlossen. □

**Bemerkung 23.35.** Die Beschränkung auf endlich viele Mengen in Lemma 23.34 (a) und (c) ist wesentlich: Nach Beispiel 23.33 (d) ist in einem metrischen Raum $M$ ja jede einpunktige Menge $\{a\}$ mit $a \in M$ abgeschlossen. Wären nun beliebige Vereinigungen abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen, so müsste dann ja jede Teilmenge $A \subset M$ (die ja immer Vereinigung aller ihrer Punkte ist) abgeschlossen sein – was im Allgemeinen offensichtlich falsch ist.

**Aufgabe 23.36.**

(a) Es sei $M = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0}\} \subset \mathbb{R}$, aufgefasst als metrischer Raum mit der euklidischen Metrik. Gib alle offenen und alle abgeschlossenen Teilmengen dieses metrischen Raumes $M$ an.

(b) Es sei $X \subset M$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes $M$. Nach Bemerkung 23.11 ist dann auch $X$ ein metrischer Raum mit der eingeschränkten Metrik.

Zeige, dass eine Menge $U \subset X$ genau dann offen in diesem metrischen Raum $X$ ist, wenn es eine im metrischen Raum $M$ offene Teilmenge $V \subset M$ gibt mit $U = V \cap X$.

Zum besseren Verständnis offener und abgeschlossener Mengen wollen wir jetzt noch das Konzept von Randpunkten exakt einführen, das wir oben ja schon zur Veranschaulichung dieser Begriffe verwendet haben. Auch andere verwandte Notationen haben wir bereits in Spezialfällen kennengelernt, wie z. B. dichte Teilmengen in Folgerung 4.35, den Abschluss einer Menge in Definition 8.1 und isolierte Punkte in Definition 10.1. Häufungspunkte haben wir bereits von Folgen in Definition 5.18 (c)

gesehen; ihren Zusammenhang mit den nun betrachteten Häufungspunkten von Mengen werden wir in Aufgabe 23.47 untersuchen.

**Definition 23.37** (Besondere Punkte in metrischen Räumen)**.** Es seien $M$ ein metrischer Raum, $a \in M$ ein Punkt und $X \subset M$ eine Teilmenge von $M$.

(a) Der Punkt $a$ heißt **innerer Punkt** von $X$, wenn $X$ wie in Definition 23.13 (b) eine Umgebung von $a$ ist. Die Menge aller inneren Punkte von $X$ wird mit $\mathring{X}$ bezeichnet und das **Innere** von $X$ genannt.

(b) Der Punkt $a$ heißt **Berührpunkt** von $X$, wenn jede Umgebung von $a$ einen Punkt aus $X$ enthält. Die Menge $\overline{X}$ aller Berührpunkte von $X$ wird der **Abschluss** von $X$ genannt.

Ist $\overline{X} = M$, so heißt $X$ **dicht** in $M$.

(c) Der Punkt $a$ heißt **Randpunkt** von $X$, wenn jede Umgebung von $a$ sowohl einen Punkt aus $X$ als auch einen aus dem Komplement $M \backslash X$ enthält. Die Menge aller Randpunkte von $X$ wird mit $\partial X$ bezeichnet und der **Rand** von $X$ genannt.

(d) Der Punkt $a$ heißt **Häufungspunkt** von $X$, wenn jede Umgebung von $a$ einen Punkt aus $X \backslash \{a\}$ enthält. Man nennt $a$ einen **isolierten Punkt** von $X$, wenn es eine Umgebung von $a$ gibt, die $a$ als einzigen Punkt von $X$ enthält.

**Bemerkung 23.38.** Nach der Definition 23.16 (b) einer Umgebung bedeutet Definition 23.37 (a), dass ein Punkt $a \in M$ genau dann ein innerer Punkt einer Teilmenge $X$ eines metrischen Raumes $M$ ist, wenn es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $U_\varepsilon(a) \subset X$. Mit der Definition 23.32 (a) einer offenen Menge ist dies auch äquivalent dazu, dass es eine offene Menge $U$ gibt mit $a \in U \subset X$ (also eine offene Umgebung von $a$).

Analog können wir auch in den Teilen (b), (c) und (d) von Definition 23.37 den Begriff „Umgebung von $a$“ durch „$\varepsilon$-Umgebung von $a$“ oder „offene Umgebung von $a$“ ersetzen, da jede Umgebung von $a$ eine offene $\varepsilon$-Umgebung von $a$ enthält.

**Beispiel 23.39.** Wir betrachten den metrischen Raum $M = \mathbb{R}$ (mit der gewöhnlichen Metrik).

(a) Für ein halboffenes Intervall $X = [a,b)$ mit $a < b$ ist wie erwartet das Innere $\mathring{X} = (a,b)$, der Abschluss $\overline{X} = [a,b]$ und der Rand $\partial X = \{a,b\}$. Jeder Punkt in $[a,b]$ ist ein Häufungspunkt von $X$; es gibt keine isolierten Punkte in $X$.

(b) Für die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen gilt $\mathring{\mathbb{Z}} = \emptyset$ und $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$. Der Rand ist $\partial\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, und jeder dieser Randpunkte ist auch ein isolierter Punkt von $\mathbb{Z}$. Es gibt keine Häufungspunkte von $\mathbb{Z}$.

(c) Mit der gleichen Begründung wie in Beispiel 23.33 (e) ist $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$ und $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, sowie $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Also liegt $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ (wie wir auch schon in Folgerung 4.35 gesagt hatten), und jede reelle Zahl ist ein Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$.

Die gerade definierten Mengen $\mathring{X}$, $\overline{X}$ und $\partial X$ erfüllen einige einfache anschauliche Eigenschaften, die mehr oder weniger direkt aus den Definitionen folgen und oft zu ihrer Berechnung benutzt werden können:

**Lemma 23.40.** *Für jede Teilmenge $X$ eines metrischen Raumes $M$ gilt:*

(a) *$\mathring{X}$ ist die Vereinigung aller offenen Mengen, die in $X$ enthalten sind, also*

$$\mathring{X} = \bigcup_{U \subset X \text{ offen}} U.$$

*Insbesondere ist $\mathring{X}$ also die größte offene Menge, die in $X$ enthalten ist; und $X$ ist genau dann offen, wenn $\mathring{X} = X$.*

(b) *$\overline{X}$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die $X$ enthalten, also*

$$\overline{X} = \bigcap_{A \supset X \text{ abgeschlossen}} A.$$

*Insbesondere ist $\overline{X}$ also die kleinste abgeschlossene Menge, die $X$ enthält; und $X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\overline{X} = X$.*

(c) $\mathring{X} = X \backslash \partial X$.

(d) $\overline{X} = X \cup \partial X$.

(e) $\partial X = \overline{X} \backslash \mathring{X}$. *Insbesondere ist $\partial X$ abgeschlossen.*

*Beweis.*

(a) Nach Definition 23.37 (a) bzw. Bemerkung 23.38 folgt für alle $a \in M$ sofort

$$a \in \mathring{X} \Leftrightarrow \text{ es gibt ein } U \text{ offen mit } a \in U \subset X \Leftrightarrow a \in \bigcup_{U \subset X \text{ offen}} U.$$

Insbesondere ist $\mathring{X}$ als Vereinigung offener Mengen nach Lemma 23.34 (b) also offen, und damit als Vereinigung *aller* offenen Teilmengen von $X$ auch die größte offene Teilmenge von $X$. Ist weiterhin $X$ offen, so ist $X$ selbst eine der Mengen, über die wir hier die Vereinigung bilden, und damit ist die Vereinigung $\mathring{X}$ dieser Mengen dann gleich $X$.

(b) zeigt man analog zu (a) durch Übergang zum Komplement: Für alle $a \in M$ gilt

$$\begin{aligned} a \in \overline{X} &\Leftrightarrow \text{ es gibt kein } U \text{ offen mit } a \in U \subset M \backslash X \\ &\Leftrightarrow a \notin \bigcup_{U \subset M \backslash X \text{ offen}} U \\ &\Leftrightarrow a \in \bigcap_{U \subset M \backslash X \text{ offen}} (M \backslash U) \\ &\Leftrightarrow a \in \bigcap_{A \supset X \text{ abgeschlossen}} A \qquad (\text{mit } A = M \backslash U). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\overline{X}$ damit nach Lemma 23.34 (d) die kleinste abgeschlossene Teilmenge, die $X$ enthält. Ist weiterhin $X$ selbst abgeschlossen, so ist $X$ eine der Mengen, über die hier der Durchschnitt gebildet wird, und somit ist dieser Durchschnitt (also $\overline{X}$) gleich $X$.

(c) Die Bedingung $a \notin \partial X$ bedeutet genau, dass es eine offene Menge $U$ mit $a \in U$ gibt, für die entweder $U \subset X$ oder $U \subset M \backslash X$ ist. Falls $a \in X$ gilt, kann hierbei wegen $a \in U$ natürlich nur die Alternative $U \subset X$ auftreten. Also ist $a \in X \backslash \partial X$ genau dann, wenn es eine offene Menge $U$ mit $a \in U \subset X$ gibt, also wenn $a \in \mathring{X}$ gilt.

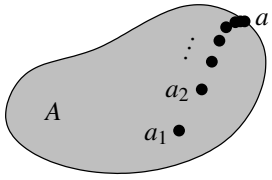
(d) „$\subset$“: Ist $a \in \overline{X}$ und $a \notin X$, so enthält jede offene Menge $U$ mit $a \in U$ nicht nur einen Punkt aus $X$, sondern auch den Punkt $a \in M \backslash X$. Also ist dann $a \in \partial X$.

Die Inklusionen $X \subset \overline{X}$ und $\partial X \subset \overline{X}$ für die Rückrichtung „$\supset$“ folgen sofort aus den Definitionen.

(e) Die Gleichung folgt sofort aus (c) und (d); der Rand $\partial X$ ist dann als Durchschnitt der nach (a) und (b) abgeschlossenen Mengen $\overline{X}$ und $M \backslash \mathring{X}$ abgeschlossen. □

**Bemerkung 23.41.** Insbesondere besagen die Teile (a) und (c) des Lemmas, dass eine Menge $X$ genau dann offen ist (also $\mathring{X} = X$ gilt), wenn $X = X \backslash \partial X$ ist, also sie keinen ihrer Randpunkt enthält – was am Anfang dieses Abschnitts ja gerade unsere anschauliche Vorstellung von offenen Mengen war. Analog besagen (b) und (d), dass die Menge $X$ genau dann abgeschlossen ist (also $\overline{X} = X$ gilt), wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.

Diese Charakterisierung abgeschlossener Mengen durch ihre Randpunkte lässt sich auch gut mit Hilfe von Grenzwerten von Folgen interpretieren. Haben wir nämlich eine konvergente Folge $(a_n)_n$, deren Glieder in einer Teilmenge $A$ eines metrischen Raumes liegen, so kann der Grenzwert dieser Folge anschaulich nur in $A$ oder wie im Bild rechts auf dem Rand von $A$, also letztlich in $\overline{A}$ liegen. Damit sollte $A$ also genau dann abgeschlossen sein, wenn dieser Grenzwert in jedem Fall wieder in $A$ liegt. Dies besagt der folgende Satz.



**Satz 23.42** (Folgenkriterium für Abgeschlossenheit)**.** *Eine Teilmenge $A$ eines metrischen Raumes $M$ ist genau dann abgeschlossen, wenn zu jeder konvergenten Folge $(a_n)_n$ mit $a_n \in A$ für (fast) alle $n$ ihr Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ebenfalls in $A$ liegt. (Man sagt in diesem Fall auch, dass $A$ „abgeschlossen unter Grenzwertbildung“ ist.)*

59

*Beweis.*

„⇒“: Es seien $A \subset M$ abgeschlossen und $(a_n)_n$ eine konvergente Folge, deren Glieder fast alle in $A$ liegen. Angenommen, der Grenzwert $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ läge in der offenen Menge $M\backslash A$. Dann wäre $M\backslash A$ nach Definition 23.32 (a) eine Umgebung von $a$, und damit müssten nach Bemerkung 23.14 fast alle $a_n$ in $M\backslash A$ liegen – im Widerspruch dazu, dass bereits fast alle $a_n$ in $A$ liegen. Also war unsere Annahme falsch, und es gilt $a \in A$.

„⇐“: Die Menge $A$ sei nun abgeschlossen unter Grenzwertbildung. Angenommen, $A$ wäre nicht abgeschlossen, also $M\backslash A$ nicht offen. Dann gäbe es einen Punkt $a \in M\backslash A$, um den keine $\varepsilon$-Umgebung vollständig in $M\backslash A$ liegt. Wir können also für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ einen Punkt $a_n$ in der $\frac{1}{n}$-Umgebung von $a$ wählen, der in $A$ liegt. Wegen

$$d(a_n, a) < \frac{1}{n} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty$$

ist $(a_n)_n$ dann im Widerspruch zur Annahme aber nach Bemerkung 23.14 eine konvergente Folge in $A$ mit Grenzwert $a \notin A$. Also ist $A$ abgeschlossen. □

**Folgerung 23.43** (Vollständigkeit von Teilmengen)**.** *Eine Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist genau dann selbst wieder vollständig, wenn sie abgeschlossen ist.*

*Beweis.* Es sei $A$ eine Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes $M$. Nach Definition 23.28 (a) ist $A$ genau dann vollständig, wenn jede Cauchyfolge in $A$ einen Grenzwert in $A$ hat. Da $M$ vollständig ist, konvergiert jede solche Cauchyfolge aber in jedem Fall mit einem Grenzwert in $M$. Also ist $A$ genau dann vollständig, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge mit Folgengliedern in $A$ ebenfalls in $A$ liegt, nach Satz 23.42 also genau dann, wenn $A$ abgeschlossen ist. □

**Aufgabe 23.44.** Man zeige:

(a) Die Menge $U = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > x_1 + 1\}$ ist offen in $\mathbb{R}^2$.

(b) Sind $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, so ist $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$.

(c) In $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Menge aller diagonalisierbaren Matrizen für $n \geq 2$ weder offen noch abgeschlossen.

**Aufgabe 23.45.** Es seien $A$ und $B$ zwei Teilmengen eines metrischen Raumes. Man zeige:

(a) Ist $A \subset B$, so auch $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ und $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(b) Es ist stets $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Gilt hier im Allgemeinen auch die Gleichheit?

**Aufgabe 23.46.** In einem metrischen Raum $M$ betrachten wir zu einem Punkt $a \in M$ und einem Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$ die offene Kugel $U_r(a) = \{x \in M : d(x,a) < r\}$. Man zeige:

(a) Für den Rand dieser Kugel gilt $\partial U_r(a) \subset \{x \in M : d(x,a) = r\}$.

(b) In einem normierten Raum gilt in (a) wie erwartet sogar die Gleichheit, in einem beliebigen metrischen Raum jedoch im Allgemeinen nicht.

**Aufgabe 23.47** (Häufungspunkte von Folgen und Mengen)**.** Es seien $M$ ein metrischer Raum, $a \in M$ und $X \subset M$. Wie in Definition 5.18 (c) nennt man $a$ einen *Häufungspunkt* einer Folge $(a_n)_n$ in $M$, wenn eine Teilfolge von $(a_n)_n$ gegen $a$ konvergiert. Zeige, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $a$ ist ein Häufungspunkt von $X$.

(b) Es gibt eine Folge in $X$, die nirgends den Wert $a$ annimmt, und die $a$ als Häufungspunkt hat.

(c) Es gibt eine Folge in $X$, die nirgends den Wert $a$ annimmt, und die gegen $a$ konvergiert.

(d) $a \in \overline{X \setminus \{a\}}$.

Die Äquivalenz „(a) $\Leftrightarrow$ (b)“ stellt also insbesondere eine Beziehung zwischen den Begriffen des Häufungspunktes einer Folge und einer Menge her.

**Aufgabe 23.48** (Ein topologisches Spiel)**.** Wir starten mit einer gegebenen Teilmenge $X$ eines metrischen Raumes $M$. Ausgehend von dieser einen Teilmenge dürfen wir jetzt neue Teilmengen von $M$ bilden, indem wir von $X$ oder bereits vorher konstruierten Mengen entweder den Abschluss oder das Innere bilden. Starten wir z. B. im metrischen Raum $M = \mathbb{R}$ mit der Teilmenge $X = \{0\} \cup (1,2]$, so ist deren Inneres gleich $(1,2)$, und davon wieder der Abschluss gleich $[1,2]$. Außerdem ist der Abschluss von $X$ gleich $\{0\} \cup [1,2]$. Man überprüft schnell, dass die Abschluss- oder Innerenbildung bei keiner dieser Mengen zu neuen Mengen führt. Ausgehend von der einen gewählten Menge $X$ konnten wir hier also insgesamt vier verschiedene Mengen erzeugen.

Wie viele verschiedene Mengen kann man so bei geschickter Wahl von $M$ und $X$ maximal erzeugen?

(Hinweis: Zeige zuerst, dass

(a) $AIAX \subset AX$ und $IAIX \supset IX$,

(b) $AIAIX = AIX$ und $IAIAX = IAX$,

wobei wir zur Übersichtlichkeit der Notation $AX$ für den Abschluss und $IX$ für das Innere von $X$ geschrieben haben. Die gesuchte Maximalzahl von Mengen lässt sich bereits in $M = \mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Metrik für ein geeignetes $X \subset \mathbb{R}$ erreichen.)

Falls ihr noch weiter über diese Aufgabe nachdenken wollt: Wie viele Mengen kann man maximal aus einer gegebenen Menge $X$ durch Abschluss- und Komplementbildung erzeugen?

## 23.D Kompaktheit

In Kapitel 8 haben wir einige wichtige Eigenschaften reeller stetiger Funktionen kennengelernt, die auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ definiert sind: Sie sind z. B. nach Satz 8.23 beschränkt, nehmen nach Satz 8.25 sogar ein Maximum und Minimum an, und sind nach Satz 8.50 auch gleichmäßig stetig. Alle diese Aussagen wären falsch, wenn wir den Definitionsbereich nur als beschränkt oder nur als abgeschlossen voraussetzen würden – wie die Beispiele der Funktionen $(0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ zeigen, die keine der drei genannten Eigenschaften erfüllen.

Für eine Teilmenge $D$ von $\mathbb{R}$ ist diese Kombination von Beschränktheit und Abgeschlossenheit in der Praxis also sehr wichtig. Der Grund dafür ist aus den Beweisen der obigen Sätze ersichtlich: Sie alle benötigen zu einer gegebenen Folge in $D$ die Existenz einer konvergenten Teilfolge mit Grenzwert in $D$. Ist nun $D$ beschränkt, so existiert nach dem Satz 6.21 von Bolzano-Weierstraß zunächst einmal eine konvergente Teilfolge, und ist $D$ abgeschlossen, so liegt der Grenzwert dieser Teilfolge nach Satz 23.42 dann auch in $D$.

Für die Verallgemeinerung dieser Aussagen auf normierte bzw. metrische Räume müssen wir daher die Existenz konvergenter Teilfolgen untersuchen. Wir übertragen dazu zunächst den Satz von Bolzano-Weierstraß ins Mehrdimensionale.

**Satz 23.49** (**Satz von Bolzano-Weierstraß**)**.** *In $\mathbb{K}^n$ (mit der Standardnorm) besitzt jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge.*

*Beweis.* Nach Bemerkung 23.18 können wir die Maximumsnorm verwenden. Ist dann eine Folge $(a^{(k)})_k$ beschränkt, gilt also $\|a^{(k)}\|_\infty \leq r$ für ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $k \in \mathbb{N}$, so ist damit auch $|a_i^{(k)}| \leq r$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $k \in \mathbb{N}$, d. h. es sind auch alle Koordinatenfolgen $(a_i^{(k)})_k$ beschränkt.

Nach dem Satz 6.21 von Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{K}$ können wir also nach evtl. Auswählen einer Teilfolge annehmen, dass die erste Koordinatenfolge $(a_1^{(k)})_k$ von $(a^{(k)})_k$ konvergiert. Aus dieser Teilfolge

wählen wir nun eine weitere Teilfolge aus, so dass auch die zweite Koordinatenfolge konvergiert. Setzen wir dieses Verfahren fort, so haben wir nach $n$ Schritten eine Teilfolge von $(a^{(k)})_k$ gefunden, von der jede Koordinatenfolge konvergiert, die also nach Lemma 23.19 in $\mathbb{K}^n$ konvergent ist. □

Mit dieser Vorarbeit können wir jetzt den zentralen Begriff dieses Abschnitts untersuchen:

**Definition 23.50** (Folgenkompaktheit)**.** Eine Teilmenge $A$ eines metrischen Raumes $M$ heißt **kompakt** bzw. **folgenkompakt**, wenn jede Folge in $A$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $A$ hat.

**Satz 23.51.** *Es sei $A$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes $M$.*

(a) *Ist $A$ kompakt, so ist $A$ beschränkt und abgeschlossen.*

(b) *Im Fall $M = \mathbb{K}^n$ (mit der Standardnorm) gilt auch die Umkehrung, d. h. $A$ ist genau dann kompakt, wenn $A$ beschränkt und abgeschlossen ist.*

*Beweis.*

(a) Wäre $A$ nicht beschränkt, dann gäbe es ein $a \in A$ und eine Folge $(a_k)_k$ in $A$ mit $d(a_k, a) \geq k$ für alle $k$. Dann ist aber jede Teilfolge von $(a_k)_k$ unbeschränkt, also divergent nach Lemma 23.22. Damit kann $A$ nicht kompakt sein.

Wäre $A$ hingegen nicht abgeschlossen, so gäbe es nach Satz 23.42 eine konvergente Folge $(a_k)_k$ in $A$, deren Grenzwert $a$ in $M \backslash A$ liegt. Dann konvergiert aber auch jede Teilfolge von $(a_k)_k$ gegen $a$, und damit also nicht gegen einen Punkt in $A$. Auch hier kann $A$ also nicht kompakt sein.

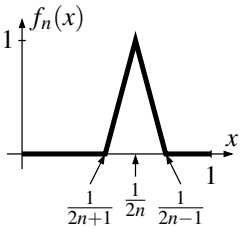
(b) Die Menge $A \subset \mathbb{K}^n$ sei beschränkt und abgeschlossen. Jede Folge in $A$ ist also zunächst beschränkt und besitzt damit nach dem Satz 23.49 von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge in $\mathbb{K}^n$. Der Grenzwert dieser Teilfolge liegt nun wegen der Abgeschlossenheit von $A$ nach Satz 23.42 ebenfalls in $A$. Also ist $A$ kompakt. □

**Beispiel 23.52.**

(a) Von den Intervallen in $\mathbb{R}$ wie in Notation 4.17 (a) sind nach Satz 23.51 (b) genau die Intervalle der Form $[a, b]$ kompakt. In der Literatur werden sie daher auch oft wie in Notation 4.17 (a) als *kompakte Intervalle* statt als *abgeschlossene Intervalle* bezeichnet.

(b) Abgeschlossene Kugeln $K_r(a) \subset \mathbb{K}^n$ mit $a \in \mathbb{K}^n$ und $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sind nach Definition beschränkt und nach Beispiel 23.33 (d) abgeschlossen, also kompakt. Genauso gilt dies nach Lemma 23.40 (e) auch für die Ränder $\partial K_r(a)$ dieser Kugeln.

(c) In unendlich-dimensionalen normierten Räumen (und damit erst recht in allgemeinen metrischen Räumen) ist die Aussage aus Satz 23.51 (b) falsch: In $V = C^0([0,1])$ mit der Maximumsnorm sei $A = K_1(0) = \{f \in C^0([0,1]) : \|f\|_\infty \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel, die wie in (b) natürlich auch beschränkt ist.




Sie ist aber nicht kompakt: Dazu betrachten wir für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die „Dreiecksfunktionen“ $f_n$ wie im Bild rechts; wegen $\|f_n\|_\infty = 1$ für alle $n$ ist $(f_n)_n$ eine Folge in $A$. Da sich die Dreiecke von $f_m$ und $f_n$ für $m \neq n$ nicht überlappen, besteht $f_m - f_n$ dann immer aus einem Dreieck nach oben und einem nach unten mit Höhe jeweils 1, d. h. es ist auch $\|f_m - f_n\|_\infty = 1$. Damit kann eine Teilfolge von $(f_n)_n$ aber niemals eine Cauchyfolge, und damit auch nicht konvergent sein. Also ist $A$ nicht kompakt.

In der Tat kann man zeigen, dass die (beschränkte) abgeschlossene Einheitskugel im Gegensatz zum Fall von $\mathbb{K}^n$ in *keinem* unendlich-dimensionalen normierten Raum kompakt ist. Das Studium von solchen unendlich-dimensionalen normierten Räumen ist der Inhalt der Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis“ des zweiten Studienjahres. Wir haben jetzt in den letzten Kapiteln mehrfach gesehen, dass in solchen allgemeinen Räumen zwar viele Sätze noch genauso gelten wie im endlich-dimensionalen Fall, andererseits aber an

entscheidenden Stellen auch große Unterschiede bestehen (siehe z. B. auch Beispiel 21.41 und Beispiel 21.50).

Wie bereits angekündigt werden wir später für stetige Funktionen auf kompakten Mengen ähnliche Eigenschaften zeigen, wie wir sie in Kapitel 8 für stetige Funktionen auf beschränkten abgeschlossenen Intervallen in $\mathbb{R}$ bewiesen haben (siehe Abschnitt 24.B), z. B. dass solche Funktionen ein Maximum und Minimum annehmen. Das folgende Lemma ist eine kleine Vorbereitung dafür.

**Lemma 23.53.** *Jede kompakte, nicht-leere Menge in $\mathbb{R}$ besitzt ein Maximum und Minimum.*

*Beweis.* Aus Symmetriegründen genügt es offensichtlich, den Fall des Maximums zu betrachten. Ist $A \subset \mathbb{R}$ kompakt, so ist $A$ nach Satz 23.51 (a) beschränkt und besitzt damit wegen $A \neq \emptyset$ nach dem Supremumsaxiom (siehe Definition 4.29) ein Supremum $s := \sup A$. Angenommen, es wäre $s \notin A$. Da $A$ kompakt und damit nach Satz 23.51 (a) abgeschlossen ist, gäbe es dann ein $\varepsilon > 0$ mit $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subset \mathbb{R} \backslash A$, d. h. $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \cap A = \emptyset$. Dann wäre aber nicht nur $s$, sondern auch $s-\varepsilon$ eine obere Schranke für $A$ – im Widerspruch zu $s = \sup A$.

Also war unsere Annahme falsch, und es ist $s \in A$, also $s = \max A$. □

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir nun noch eine oft benötigte alternative Charakterisierung der Kompaktheit untersuchen. Da sie sich sehr von unserer ursprünglichen Definition 23.50 unterscheidet, geben wir ihr zunächst einen anderen Namen – wir werden aber in Satz 23.58 sehen, dass es sich zumindest für Teilmengen von $\mathbb{K}^n$ um eine zur Folgenkompaktheit äquivalente Eigenschaft handelt.

**Definition 23.54** (Überdeckungskompaktheit)**.** Eine Teilmenge $A$ eines metrischen Raumes $M$ heißt **überdeckungskompakt**, wenn gilt: Sind $I$ eine beliebige Indexmenge und $U_i \subset M$ offene Teilmengen mit $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, so gibt es bereits endlich viele $i_1, \dots, i_k \in I$ mit $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$.

**Bemerkung 23.55.**

(a) Man sagt auch, dass eine solche Familie offener Mengen, die in ihrer Vereinigung die Menge $A$ enthalten, eine *offene Überdeckung* von $A$ ist. Dementsprechend wird die Bedingung der Überdeckungskompaktheit oft auch so formuliert: Jede offene Überdeckung von $A$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung (also eine Überdeckung aus endlich vielen der gegebenen Mengen).

Natürlich ist dies nur für Überdeckungen aus *unendlich vielen* offenen Mengen eine nichttriviale Bedingung.

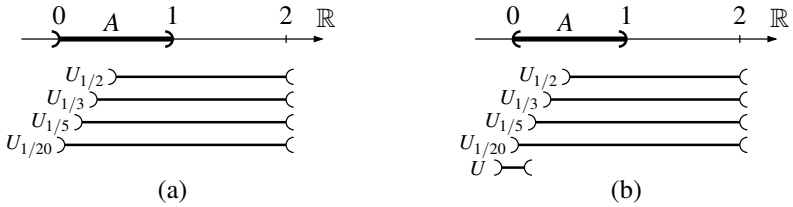
(b) Sowohl die Folgenkompaktheit aus Definition 23.50 als auch die Überdeckungskompaktheit aus Definition 23.54 sind offensichtlich topologische Eigenschaften im Sinne von Bemerkung 23.18.

**Beispiel 23.56.** Es sei $M = \mathbb{R}$.

(a) Betrachten wir das halboffene Intervall $A = (0,1]$, so bilden die unendlich vielen Intervalle $U_\varepsilon = (\varepsilon, 2)$ für alle $0 < \varepsilon < 1$, von denen wir im Bild unten links exemplarisch vier eingezeichnet haben, eine offene Überdeckung von $A$: Alle $U_\varepsilon$ sind offen, und ihre Vereinigung umfasst die gesamte Menge $A$, da es zu jedem $x \in A = (0,1]$ noch ein $\varepsilon$ gibt mit $0 < \varepsilon < x$, also mit $x \in U_\varepsilon$.

Treffen wir aus diesen offenen Mengen jedoch eine beliebige *endliche* Auswahl $U_{\varepsilon_1}, \dots, U_{\varepsilon_k}$, so überdecken diese endlich vielen Mengen sicher nicht mehr die ganze Menge $A$, denn es ist ja $U_{\varepsilon_1} \cup \dots \cup U_{\varepsilon_k} = U_\varepsilon$ mit $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$, und diese Vereinigung enthält z. B. nicht mehr die Zahl $\frac{\varepsilon}{2} \in A$. (Im Bild unten links enthalten die vier dort ausgewählten Intervalle z. B. nicht mehr die Zahl $\frac{1}{40} \in A$).

Wir finden in diesem Fall also keine endliche Teilüberdeckung zu der gegebenen offenen Überdeckung von $A$. Damit ist $A$ nicht überdeckungskompakt.




(b) Betrachten wir nun stattdessen das abgeschlossene Intervall $A = [0,1]$, so stellen wir zumindest fest, dass wir die Bedingung der Überdeckungskompaktheit dann nicht mehr so einfach widerlegen können: Die oben gewählten offenen Intervalle $U_\varepsilon$ für $0 < \varepsilon < 1$ bilden nun keine Überdeckung von $A$ mehr, da sie den Punkt $0 \in A$ nicht enthalten. Um daraus eine Überdeckung von $A$ zu machen, müssten wir noch eine offene Menge $U$ mit $0 \in U$ mit hinzunehmen – z. B. $U = (-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ wie im Bild oben rechts, so dass wir die offene Überdeckung $U \cup \bigcup_{0<\varepsilon<1} U_\varepsilon$ von $A$ erhalten. In diesem Fall ist es aber einfach, daraus eine endliche Teilüberdeckung von $A$ auszuwählen, nämlich z. B. $A \subset U \cup U_{1/20} = (-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}) \cup (\frac{1}{20}, 2)$.

Beachte jedoch, dass wir mit diesem Argument noch nicht gezeigt haben, dass $A$ überdeckungskompakt ist! Dazu hätten wir nämlich zu einer *beliebigen* offenen Überdeckung die Existenz einer endlichen Teilüberdeckung beweisen müssen – während wir eben ja nur eine ganz spezielle offene Überdeckung betrachtet haben. In der Tat ist $A$ aber überdeckungskompakt, wie wir gleich in Satz 23.58 sehen werden.

Analog zu Satz 23.51 (a) zeigen wir zunächst:

**Lemma 23.57.** *Jede überdeckungskompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist beschränkt und abgeschlossen.*

*Beweis.* Es sei $A$ eine überdeckungskompakte Teilmenge eines metrischen Raumes $M$. Natürlich können wir $M \neq \emptyset$ annehmen, da die zu zeigende Aussage sonst trivial ist.

$A$ ist beschränkt: Da mit einem fest gewählten Punkt $a \in M$ die offenen Kugeln $U_r(a)$ für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ offensichtlich den ganzen Raum $M$ und damit auch $A$ überdecken, können wir wegen der Überdeckungskompaktheit von $A$ endlich viele $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}_{>0}$ wählen mit

$$A \subset U_{r_1}(a) \cup \dots \cup U_{r_k}(a) = U_r(a),$$

wobei $r = \max(r_1, \dots, r_k)$. Nach Definition 23.20 (a) ist $A$ also beschränkt. 60

$A$ ist abgeschlossen, d. h. $M \backslash A$ ist offen: Es sei $a \in M \backslash A$. Diesmal betrachten wir die offenen Mengen

$$V_r(a) := M \backslash K_r(a) = \{x \in M : d(x,a) > r\}$$

für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$, die natürlich $M \backslash \{a\}$ und damit auch $A$ überdecken. Da $A$ überdeckungskompakt ist, gibt es also wieder endlich viele $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$A \subset V_{r_1}(a) \cup \dots \cup V_{r_k}(a) = V_r(a),$$

wobei $r = \min(r_1, \dots, r_k)$. Durch Komplementbildung erhalten wir daraus $U_r(a) \subset K_r(a) \subset M \backslash A$. Also ist $M \backslash A$ offen. □

**Satz 23.58 (Satz von Heine-Borel).** *Eine Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ ist genau dann überdeckungskompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

*Beweis.* Wir können wieder die zur euklidischen Norm äquivalente Maximumsnorm auf $\mathbb{K}^n$ verwenden. Außerdem können wir ohne Einschränkung $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ annehmen, da wir im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ den Raum $\mathbb{C}^n$ einfach als $\mathbb{R}^{2n}$ auffassen können.

Wir haben in Lemma 23.57 schon gesehen, dass eine überdeckungskompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen sein muss. Es sei nun also umgekehrt $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen. Wir zeigen mit einem Widerspruchsbeweis, dass $A$ dann überdeckungskompakt ist.

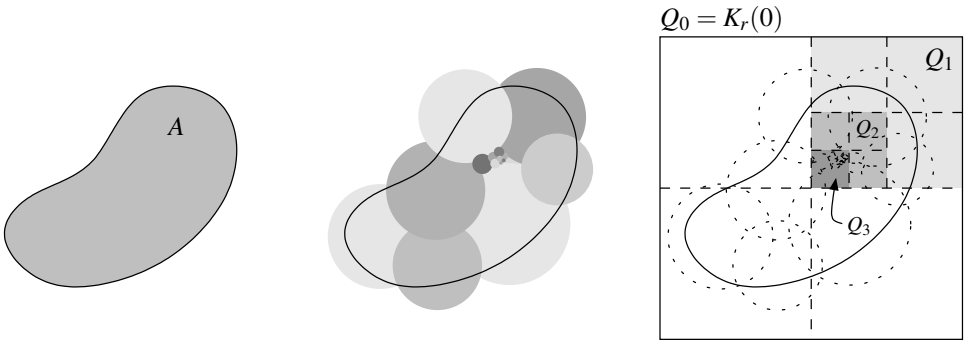
Es sei also $\bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung von $A$ ohne endliche Teilüberdeckung. Im Bild unten in der Mitte ist dies dadurch angedeutet, dass die offenen Mengen der Überdeckung an einer Stelle

sehr klein werden und damit evtl. sehr viele (bzw. unendlich viele) von ihnen benötigt werden, um $A$ dort zu überdecken.

Als beschränkte Menge ist $A$ in einer abgeschlossenen Kugel (in der Maximumsnorm), also in einem Würfel

$$Q_0 := K_r(0) = [-r,r]^n$$

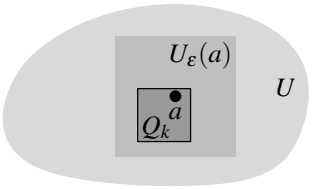
enthalten. Ausgehend von $Q_0$ konstruieren wir nun rekursiv wie im Bild unten rechts eine Folge $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von ineinander liegenden Würfeln mit Kantenlängen $2r \cdot 2^{-k}$, so dass auch $A \cap Q_k$ nicht durch endlich viele $U_i$ überdeckt werden kann: Ist $Q_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ bereits konstruiert, teilen wir diesen Würfel wie im Bild dargestellt an den Seitenmitten in $2^n$ Teilwürfel mit halber Kantenlänge. Von diesen gibt es nun mindestens einen Teilwürfel, den wir $Q_{k+1}$ nennen, für den der Schnitt mit $A$ nicht durch endlich viele $U_i$ überdeckt werden kann – denn ansonsten könnte ja auch $A \cap Q_k$ durch endlich viele $U_i$ überdeckt werden.




Die Menge $A$, ... eine offene Überdeckung von $A$ ... und die Würfel $Q_k$

Da die konstruierten Würfel in jeder Koordinate eine Intervallschachtelung bilden, gibt es nun nach Satz 5.39 genau einen Punkt $a \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} Q_k$.

Beachte, dass jede offene Umgebung $U$ von $a$ einen der Würfel $Q_k$ enthält: Als offene Umgebung enthält sie nämlich wie im Bild rechts zunächst eine $\varepsilon$-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ (in der Maximumsnorm), und diese dann wiederum für $2r \cdot 2^{-k} < \varepsilon$ den Würfel $Q_k$. Damit erhalten wir aber in jedem Fall einen Widerspruch, wenn wir nun überprüfen, ob $a$ in $A$ liegt oder nicht:




- Gilt $a \in A$, so liegt $a$ in einer der offenen Mengen $U_i$ der gegebenen Überdeckung von $A$. Wie wir gerade gesehen haben, enthält dann schon diese eine Menge $U_i$ einen der Würfel $Q_k$, ist also insbesondere eine Überdeckung von $A \cap Q_k$ – im Widerspruch zur Annahme, dass $A \cap Q_k$ keine endliche Teilüberdeckung durch die gegebenen Mengen besitzt.
- Gilt $a \notin A$, so liegt $a$ in der offenen Menge $\mathbb{R}^n \backslash A$, die nun also einen der Würfel $Q_k$ enthalten muss. Damit ist $A \cap Q_k = \emptyset$ – ebenfalls im Widerspruch dazu, dass $A \cap Q_k$ keine endliche Teilüberdeckung durch die gegebenen Mengen hat.

Dieser Widerspruch zeigt, dass $A$ überdeckungskompakt sein muss. □

**Bemerkung 23.59** (Folgen- und Überdeckungskompaktheit)**.** Nach Satz 23.51 (b) und 23.58 stimmen die Begriffe der Folgenkompaktheit und Überdeckungskompaktheit für Teilmengen von $\mathbb{K}^n$ also überein. In der Tat kann man zeigen, dass diese Äquivalenz sogar in beliebigen metrischen Räumen gilt [M, Satz 39.30] – für alle in dieser Vorlesung betrachteten Räume sind diese beiden Begriffe also völlig gleichwertig. Wir werden diese allgemeinere Aussage im Folgenden aber nicht benötigen und daher auch nicht beweisen.

In der Tat wird der Begriff der Kompaktheit in der Literatur meistens über die Überdeckungskompaktheit definiert. Wir haben uns hier für die Definition über die Folgenkompaktheit entschieden, da dies wohl das deutlich anschaulichere Konzept ist.

**Aufgabe 23.60.** Man zeige: Sind $K$ und $L$ zwei kompakte Teilmengen eines normierten Raumes, so ist auch deren Summe $K+L = \{a+b : a \in K, b \in L\}$ kompakt.

**Aufgabe 23.61.** Es seien $A$ und $K$ zwei Teilmengen eines metrischen Raumes $M$. Man zeige:

(a) Ist $A$ abgeschlossen und $K$ folgenkompakt, so ist auch $K \cap A$ folgenkompakt.

(b) Ist $A$ abgeschlossen und $K$ überdeckungskompakt, so ist auch $K \cap A$ überdeckungskompakt.

Die in Bemerkung 23.59 erwähnte, aber nicht bewiesene Äquivalenz zwischen Folgen- und Überdeckungskompaktheit in allgemeinen metrischen Räumen soll hierbei natürlich nicht benutzt werden.

**Aufgabe 23.62.**

(a) Es seien $K$ eine überdeckungskompakte Teilmenge eines metrischen Raumes $M$ und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $K$ in $M$. Man zeige:

$$\text{Es gibt ein } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \text{ so dass zu jedem } a \in K \text{ ein } i \in I \text{ existiert mit } U_\varepsilon(a) \subset U_i. \qquad (*)$$

(b) Finde ein Beispiel einer *endlichen* offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von $K = M = \mathbb{R}^n$ für eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so dass die Aussage $(*)$ falsch ist.

# 24. Stetigkeit in metrischen Räumen

Wie im eindimensionalen Fall kommen wir nach unserem Studium von Grenzwerten von Folgen im letzten Kapitel jetzt zur Stetigkeit, also zu Grenzwerten von Funktionen. Auch diese können wir wieder in allgemeinen metrischen Räumen betrachten.

## 24.A Stetige Abbildungen

Zur Definition stetiger Abbildungen erinnern wir uns noch einmal an die entsprechende Definition 8.3 in $\mathbb{K}$: Ist $f\colon D \to \mathbb{K}$ eine Funktion auf einer Teilmenge $D$ von $\mathbb{K}$ und $a$ ein Punkt im Abschluss $\overline{D}$ von $D$, so sagen wir, dass $f(x)$ für $x \to a$ gegen ein $c \in \mathbb{K}$ konvergiert, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in D\colon |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-c| < \varepsilon.$$

Wie im Fall von Grenzwerten von Folgen können wir dies unmittelbar auf metrische Räume übertragen, indem wir den Abstand zweier Punkte nun mit der Metrik messen:

**Definition 24.1** (Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit)**.** Es seien $M$ und $N$ metrische Räume, $D \subset M$ eine beliebige Teilmenge und $f\colon D \to N$ eine Abbildung.

(a) Ist $a \in \overline{D}$, so heißt ein Punkt $c \in N$ **Grenzwert** von $f$ in $a$, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in D\colon d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x),c) < \varepsilon,$$

also mit anderen Worten wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\colon f(D \cap U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(c)$$

(beachte dabei, dass $d(x,a)$ die Metrik in $M$, $d(f(x),c)$ dagegen die in $N$ ist). Wie im eindimensionalen Fall werden wir wieder in Bemerkung 24.5 (a) sehen, dass ein solcher Grenzwert eindeutig ist, falls er existiert, so dass wir dann von *dem* Grenzwert von $f$ in $a$ sprechen können. Wir schreiben dies dann als

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x) = c$$

oder auch als „$f(x) \to c$ für $x \to a$“, und sagen, dass $f(x)$ für $x \to a$ gegen $c$ **konvergiert**. Existiert ein solcher Grenzwert nicht, so heißt $f$ **divergent** in $a$.

(b) Liegt der Punkt $a$ sogar in $D$, so kommt als Grenzwert von $f$ in $a$ analog zu Bemerkung 8.4 nur $f(a)$ in Frage, da wir in der Grenzwertbedingung in (a) dann immer $x = a$ setzen können und somit $d(f(a),c) < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ gelten muss – es ist also $d(f(a),c) = 0$ und damit $c = f(a)$. Wenn $f(x)$ dann für $x \to a$ gegen $f(a)$ konvergiert, d. h. wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in D\colon d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x),f(a)) < \varepsilon$$

bzw.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\colon f(D \cap U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a))$$

gilt, so heißt $f$ **stetig** in $a$. Liegt $a$ nicht in $D$, so heißt $f$ **stetig fortsetzbar** nach $a$, wenn der Grenzwert $c = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert.

(c) Die Funktion $f$ heißt **stetig**, wenn sie in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

Im Fall $M = \mathbb{K}$ stimmt dies offensichtlich mit Definition 8.3 bzw. 8.5 überein, und auch für allgemeine metrische Räume ist die anschauliche Interpretation dieser Begriffe natürlich noch dieselbe: So ist eine Abbildung $f$ z. B. stetig, wenn „kleine Änderungen in der Variable $x$ auch nur kleine Änderungen der Funktionswerte $f(x)$ zur Folge haben“ (siehe Bemerkung 8.6). Wir werden in diesem Abschnitt sehen, dass auch die Sätze über stetige Funktionen sowie ihre Beweise noch sehr ähnlich zu denen aus Kapitel 8 sind.

**Bemerkung 24.2.** Nach Bemerkung 23.11 ist jede Teilmenge $D$ eines metrischen Raumes $M$ mit der eingeschränkten Metrik selbst wieder ein metrischer Raum. Da wir die Metrik auf $M$ für die Definition 24.1 (b) der Stetigkeit (also im Fall $a \in D$) auch nur für Punkte in $D$ benötigen, können wir für Stetigkeitsbetrachtungen in metrischen Räumen in Zukunft also ohne Einschränkung $M = D$ setzen und so die Notationen etwas vereinfachen: In diesem Fall ist eine Funktion $f\colon M \to N$ nach Definition 24.1 (b) genau dann in einem Punkt $a \in M$ stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $f(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a))$.

Bei der stetigen Fortsetzbarkeit ist eine solche Vereinfachung dagegen nicht möglich.

**Beispiel 24.3** (Stetigkeit der Metrik bzw. Norm)**.**

(a) In jedem metrischen Raum $M$ ist die Abstandsfunktion

$$f\colon M \to \mathbb{R},\ x \mapsto d(x,b)$$

zu einem fest gewählten Punkt $b \in M$ stetig: Es seien $a \in M$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben; wir wählen $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle $x \in M$ mit $d(x,a) < \varepsilon$ nach der Dreiecksungleichung

$$d(x,b) - d(a,b) \le d(x,a) < \varepsilon \qquad \text{sowie} \qquad d(a,b) - d(x,b) \le d(x,a) < \varepsilon,$$

und damit auch $|f(x) - f(a)| = |d(x,b) - d(a,b)| < \varepsilon$, da $|d(x,b) - d(a,b)|$ in jedem Fall eine der beiden Zahlen $d(x,b) - d(a,b)$ und $d(a,b) - d(x,b)$ ist. Also ist $f$ stetig in jedem Punkt $a \in M$.

(b) Ist $V$ ein normierter Raum, so ist nach (a) auch die Normfunktion

$$f\colon V \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\| = d(x,0)$$

stetig.

Wie in $\mathbb{K}$ gibt es auch für metrische Räume wieder die Möglichkeit, Grenzwerte von Funktionen auf solche von Folgen zurückzuführen:

**Satz 24.4** (**Folgenkriterium**)**.** *Es seien $M, N$ metrische Räume, $D \subset M$ und $f\colon D \to N$ eine Funktion.*

(a) ***(Folgenkriterium für Funktionsgrenzwerte)*** *Für $a \in \overline{D}$ und $c \in N$ gilt*

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \quad \Leftrightarrow \quad \textit{Für jede Folge } (x_n)_n \textit{ in } D \textit{ mit } x_n \to a \textit{ gilt } f(x_n) \to c.$$

(b) ***(Folgenkriterium für Stetigkeit)*** *Für $a \in D$ gilt*

$$f \textit{ ist stetig in } a \quad \Leftrightarrow \quad \textit{Für jede Folge } (x_n)_n \textit{ in } D \textit{ mit } x_n \to a \textit{ gilt } f(x_n) \to f(a).$$

*Beweis.* Der Beweis ist (bis auf die Ersetzung der Betragsstriche durch die Metrik) wörtlich genauso wie der von Satz 8.12. □

**Bemerkung 24.5.**

(a) Da es zu jedem Punkt $a \in \overline{D}$ eine Folge $(x_n)_n$ in $D$ mit $x_n \to a$ gibt und die Folge $(f(x_n))_n$ nach Lemma 23.15 höchstens einen Grenzwert besitzen kann, folgt aus Satz 24.4 unmittelbar, dass auch der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ von Funktionen im Fall der Existenz eindeutig ist.

(b) Da wir aus Bemerkung 23.18 schon wissen, dass Grenzwerte von Folgen eine topologische Eigenschaft sind, gilt dies nach Satz 24.4 nun auch für Grenzwerte bzw. die Stetigkeit von Funktionen.

**Beispiel 24.6** (Stetigkeit von Koordinatenabbildungen)**.** Für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $i = 1, \dots, n$ ist die Abbildung

$$f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ x \mapsto x_i,$$

die jedem Vektor seine $i$-te Koordinate zuordnet, stetig: Nach Bemerkung 24.5 (b) können wir dies in der zur euklidischen Norm äquivalenten Maximumsnorm überprüfen. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$ und $x, a \in \mathbb{K}^n$ mit $\|x - a\|_\infty < \delta := \varepsilon$, dass

$$|f(x) - f(a)| = |x_i - a_i| \le \|x - a\|_\infty < \varepsilon.$$

Wir wollen nun untersuchen, wie man die Stetigkeit konkret gegebener Abbildungen einfach überprüfen kann. Am wichtigsten ist dabei der Fall, in dem der Start- bzw. Zielraum eine Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ ist. Als erstes Resultat hierzu besagt das folgende Lemma, dass wir die Stetigkeit in diesem Fall koordinatenweise im Zielraum überprüfen können.

**Lemma 24.7** (Koordinatenweise Stetigkeit im Zielraum)**.** *Es seien $D$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes $M$ und*

$$f\colon D \to \mathbb{K}^m,\ x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

*eine Abbildung mit Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m\colon D \to \mathbb{K}$. Ist nun $a \in \overline{D}$ und $c \in \mathbb{K}^m$, so gilt genau dann $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$, wenn $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = c_i$ für alle $i = 1, \dots, m$ ist, wobei $c_i$ die Koordinaten von $c$ bezeichnet.*

*Für $a \in D$ ergibt sich also insbesondere, dass $f$ genau dann in $a$ stetig ist, wenn alle Koordinatenfunktionen $f_i\colon D \to \mathbb{K}$ es sind.*

*Beweis.* Es sei $(x_n)_n$ eine beliebige Folge in $D$, die gegen $a$ konvergiert. Nach dem Folgenkriterium aus Satz 24.4 (angewendet sowohl auf $f$ als auch auf $f_1, \dots, f_m$) genügt es zu zeigen, dass $f(x_n)$ genau dann gegen $c$ konvergiert, wenn $f_i(x_n)$ für alle $i = 1, \dots, m$ gegen $c_i$ konvergiert. Dies ergibt sich aber sofort aus Lemma 23.19. □

Wir können die Stetigkeit einer Abbildung nach $\mathbb{K}^m$ also sofort auf die Stetigkeit einer Abbildung nach $\mathbb{K}$ zurückführen. Können wir die Situation noch weiter vereinfachen und die Stetigkeit auch noch koordinatenweise im Startraum überprüfen, falls dieser eine Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ ist? Das folgende Beispiel zeigt, dass dies leider nicht der Fall ist.

**Beispiel 24.8.** Wir betrachten die im Bild unten rechts dargestellte Funktion

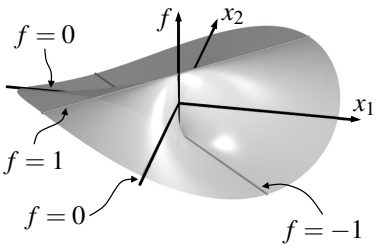
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Man kann sie sich leicht in Polarkoordinaten $(x_1, x_2) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ vorstellen, denn der gegebene Ausdruck ist dann nach Satz 9.14 gleich $\frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2} = 2\cos\varphi\sin\varphi = \sin 2\varphi$. Die Funktion $f$ ist also abgesehen vom Nullpunkt auf jeder Ursprungsgeraden konstant, z. B. auf den Koordinatenachsen gleich 0 und auf der durch $x_2 = x_1$ gegebenen Diagonalen (mit $\varphi = \frac{\pi}{4}$) gleich 1.

Daran sehen wir auch schon, dass $f$ z. B. nach dem Folgenkriterium aus Satz 24.4 (b) im Nullpunkt unstetig ist: Die Folge $\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)^\mathsf{T}\right)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ konvergiert zwar (entlang der Diagonale) gegen den Ursprung, aber es ist natürlich

$$f\begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \frac{2/n^2}{2/n^2} = 1 \not\to 0 = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In der Tat ist das Folgenkriterium oft nützlich, um die *Unstetigkeit* einer Funktion zu zeigen, da es hierfür ja genügt, eine einzige Folge anzugeben, die die Bedingung des Kriteriums verletzt.




Andererseits ist aber für jedes fest gewählte $x_2 \in \mathbb{R}$ die Funktion $x_1 \mapsto f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in *einer* Variablen $x_1$ stetig: Für $x_2 = 0$ ergibt sich einfach die Nullfunktion, und für alle anderen $x_2$ benötigen wir nur die erste Zeile in der Definition von $f$, die dann natürlich eine stetige Funktion in $x_1$ ist. Genauso gilt dies, wenn wir $x_1$ fest halten und $x_2$ als variabel betrachten.

Die Funktion $f$ auf $\mathbb{R}^2$ ist also im Nullpunkt nicht stetig, obwohl beide Funktionen in einer Variablen, die man durch Festhalten der jeweils anderen daraus erhält, dort stetig sind. Anschaulich

liegt das daran, dass man beim Festhalten jeweils einer Variablen nur untersucht, wie sich die Funktion verhält, wenn man sich *auf einer der Koordinatenachsen* dem Nullpunkt nähert, während man sich ihm für die Überprüfung der Stetigkeit *auf einem beliebigen Weg* nähern muss. Zusammen mit Lemma 24.7 sehen wir also:

> Die Stetigkeit einer Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ kann zwar koordinatenweise im Zielraum, aber nicht koordinatenweise im Startraum überprüft werden.

Dennoch wollen wir jetzt aber sehen, dass die „gewohnten Rechenregeln“ aus Kapitel 8 für Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten und Verkettungen stetiger Funktionen auch in unserem hier betrachteten allgemeineren Fall gelten.

**Lemma 24.9** (**Grenzwertsätze** für Funktionen)**.** *Es seien $D \subset M$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes $M$ und $f,g\colon D \to \mathbb{K}$ zwei Funktionen. Weiterhin sei $a \in \overline{D}$ ein Punkt, so dass die Grenzwerte von $f$ und $g$ in $a$ existieren. Dann gilt*

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x),$$

*und eine entsprechende Aussage auch für $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ und $\frac{f(x)}{g(x)}$ (letzteres natürlich nur falls $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$). Insbesondere sind für $a \in D$ also mit $f$ und $g$ auch $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ und $\frac{f}{g}$ in $a$ stetig (letzteres wiederum nur falls $g(a)\neq 0$).*

*Beweis.* Der Beweis läuft wörtlich genauso wie der von Satz 8.14 – nämlich indem man die Aussage mit Hilfe des Folgenkriteriums aus Satz 24.4 auf die entsprechenden Aussagen über Grenzwerte von Folgen in $\mathbb{K}$ (siehe Satz 5.13) zurückführt. □

61

**Lemma 24.10** (Verkettung stetiger Abbildungen)**.** *Es seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$ zwei Abbildungen zwischen metrischen Räumen $M,N,P$. Ist dann $a \in M$, so dass $f$ in $a$ und $g$ in $f(a)$ stetig sind, so ist auch $g\circ f$ stetig in $a$.*

*Beweis.* Der Beweis ist derselbe wie in Satz 8.16: Ist $(x_n)_n$ eine Folge in $M$ mit $x_n \to a$, so gilt $f(x_n) \to f(a)$ nach dem Folgenkriterium aus Satz 24.4 (b) wegen der Stetigkeit von $f$ in $a$, und dann genauso $g(f(x_n)) \to g(f(a))$ wegen der Stetigkeit von $g$ in $f(a)$. Also ist $g\circ f$ nach dem Folgenkriterium in $a$ stetig. □

**Beispiel 24.11.**

(a) Die in Beispiel 24.8 betrachtete Funktion ist nach Lemma 24.9 in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ stetig, da sie in einer Umgebung eines jeden solchen Punktes durch Addition, Multiplikation und Division aus den nach Beispiel 24.6 stetigen Koordinatenfunktionen $x_1$ und $x_2$ zusammengesetzt ist.

(b) Nach Lemma 24.7 und Lemma 24.9 ist jede *lineare* Abbildung $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \mapsto Ax$ mit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ stetig, da ihre Koordinatenfunktionen $x \mapsto a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n$ für alle $i = 1,\ldots,m$ es sind. Diese Aussage erscheint zwar selbstverständlich, ist aber für beliebige normierte Räume falsch: Für unendlich-dimensionale Vektorräume müssen lineare Abbildungen im Sinne von Definition 16.1 nicht notwendig stetig sein, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Aufgabe 24.12** (Stetigkeit linearer Abbildungen)**.** Es sei $V = C^0([0,1])$ der Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$. Zeige, dass die lineare Abbildung $f\colon V \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \varphi(0)$ zwar bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf $V$, aber nicht bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$ auf $V$ stetig ist.

**Aufgabe 24.13.** Sind die folgenden Funktionen stetig in den Nullpunkt fortsetzbar?

$$f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{(x_1+x_2)^3}{x_1^2+x_2^2}, \qquad g\colon \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_1^{x_2}.$$

**Aufgabe 24.14.** Zeige, dass die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2+x_2^4} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

zwar unstetig ist, ihre Einschränkung auf jede Gerade durch den Nullpunkt jedoch stetig ist.

**Aufgabe 24.15.**

(a) Es seien $M$ ein metrischer Raum und $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ zwei stetige Abbildungen. Zeige, dass dann auch die Abbildung $\max(f,g)\colon M \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max(f(x), g(x))$ stetig ist.

(b) Zeige, dass die Abbildung $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}),\ A \mapsto A^{-1}$ stetig ist.

## 24.B Eigenschaften stetiger Abbildungen

Nachdem wir jetzt wissen, wie wir von Abbildungen ihre Stetigkeit überprüfen können, kommen wir nun zu den Eigenschaften stetiger Funktionen. Als Erstes schauen wir uns dazu an, wie sich Umgebungen sowie offene und abgeschlossene Mengen unter stetigen Abbildungen verhalten. Unser erstes Ergebnis zeigt dabei noch einmal deutlich, dass die Stetigkeit von Funktionen eine topologische Eigenschaft ist (siehe Bemerkung 24.5 (b)).

**Lemma 24.16** (Charakterisierung stetiger Funktionen durch Umgebungen)**.** *Es seien $f\colon M \to N$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen und $a \in M$. Dann sind äquivalent:*

(a) *$f$ ist stetig in $a$.*

(b) *Für jede Umgebung $U \subset N$ von $f(a)$ ist $f^{-1}(U) \subset M$ eine Umgebung von $a$ (man sagt auch: „Urbilder von Umgebungen sind Umgebungen“).*

*Beweis.* Es gilt:

$f$ ist stetig in $a$

$\Leftrightarrow$ Für alle $\varepsilon$ gibt es ein $\delta$ mit $f(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a))$ (Bemerkung 24.2)

$\Leftrightarrow$ Zu jeder Umgebung $U$ von $f(a)$ gibt es ein $\delta$ mit $f(U_\delta(a)) \subset U$ $(*)$

$\Leftrightarrow$ Zu jeder Umgebung $U$ von $f(a)$ gibt es ein $\delta$ mit $U_\delta(a) \subset f^{-1}(U)$

$\Leftrightarrow$ Zu jeder Umgebung $U$ von $f(a)$ ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von $a$ (Definition 23.13 (b)),

wobei in $(*)$ die Folgerung "$\Leftarrow$" gilt, da jede $\varepsilon$-Umgebung eine Umgebung ist, und "$\Rightarrow$" gilt, da jede Umgebung von $f(a)$ eine $\varepsilon$-Umgebung von $f(a)$ enthält. □

Für die Stetigkeit einer gesamten Abbildung (also nicht nur in einem einzelnen Punkt) gibt es erstaunlicherweise das folgende sehr einfache Kriterium.

**Satz 24.17** (Charakterisierung stetiger Funktionen durch offene bzw. abgeschlossene Mengen)**.** *Für eine Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen metrischen Räumen sind äquivalent:*

(a) *$f$ ist stetig (in jedem Punkt von $M$).*

(b) *Für jede offene Menge $U \subset N$ ist $f^{-1}(U) \subset M$ offen (man sagt: „Urbilder offener Mengen sind offen“).*

(c) *Für jede abgeschlossene Menge $A \subset N$ ist $f^{-1}(A) \subset M$ abgeschlossen (man sagt: „Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen“).*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Äquivalenz (a) $\Leftrightarrow$ (b):

$f$ ist stetig $\overset{24.16}{\Leftrightarrow}$ Für alle $a \in M$ und alle Umgebungen $U$ von $f(a)$ ist $f^{-1}(U)$ Umgebung von $a$

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$ Für alle $a \in M$ und alle $U$ offen mit $f(a) \in U$ ist $f^{-1}(U)$ Umgebung von $a$

$\Leftrightarrow$ Für alle $U$ offen und alle $a \in f^{-1}(U)$ ist $f^{-1}(U)$ Umgebung von $a$

$\overset{23.32\,(a)}{\Leftrightarrow}$ Für alle $U$ offen ist $f^{-1}(U)$ offen,

wobei in $(*)$ die Folgerung „$\Rightarrow$“ gilt, weil jede offene Menge $U$ mit $f(a) \in U$ eine Umgebung von $f(a)$ ist, und „$\Leftarrow$“ gilt, da jede Umgebung von $f(a)$ eine offene Menge $U$ mit $f(a) \in U$ enthält.

Die Äquivalenz (b) $\Leftrightarrow$ (c) folgt direkt durch Übergang zum Komplement: Setzen wir $A = N \setminus U$, so ist $A$ genau dann abgeschlossen, wenn $U$ offen ist, und analog $f^{-1}(A) = f^{-1}(N \setminus U) = M \setminus f^{-1}(U)$ genau dann abgeschlossen, wenn $f^{-1}(U)$ offen ist. Dies zeigt unmittelbar die Äquivalenz der beiden Aussagen. □

**Beispiel 24.18** (Offene und abgeschlossene Bedingungen)**.** Sind $M$ ein metrischer Raum und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist die Menge

$$\{x \in M : f(x) > 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$$

als Urbild der offenen Menge $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{R}$ unter einer stetigen Abbildung nach Satz 24.17 offen in $M$. Ebenso gilt dies natürlich für die Mengen

$$\{x \in M : f(x) < 0\} \qquad \text{und} \qquad \{x \in M : f(x) \neq 0\}$$

als Urbilder von $\mathbb{R}_{<0}$ bzw. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dagegen ist die Menge

$$\{x \in M : f(x) \geq 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0})$$

als Urbild der abgeschlossenen Menge $\mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{R}$ unter einer stetigen Abbildung abgeschlossen in $M$, genauso wie die Mengen

$$\{x \in M : f(x) \leq 0\} \qquad \text{und} \qquad \{x \in M : f(x) = 0\}.$$

Mit dieser Beobachtung kann man in vielen Fällen sehr einfach herausfinden, ob eine gegebene Menge offen bzw. abgeschlossen ist: So sieht man z. B. sofort, dass die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^3 > \cos x_2\} \quad \subset \mathbb{R}^2$$

offen sein muss, da sie das Urbild von $\mathbb{R}_{>0}$ unter der stetigen Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1^3 - \cos x_2$ ist. Man sagt in diesem Sinne oft auch, dass „$>$“, „$<$“ und „$\neq$“ (jeweils mit reellwertigen stetigen Ausdrücken auf beiden Seiten) *offene Bedingungen* sind, während „$\geq$“, „$\leq$“ und „$=$“ *abgeschlossene Bedingungen* darstellen.

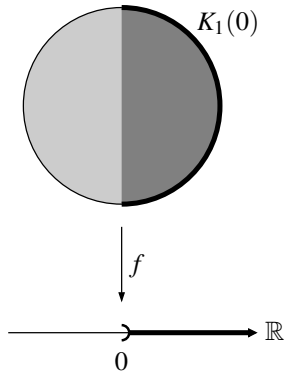
**Bemerkung 24.19** (Relativ offene bzw. abgeschlossene Mengen)**.** Es seien $M$ und $N$ metrische Räume, $D \subset M$ und $f\colon D \to N$ eine Abbildung. Nach Satz 24.17 ist $f$ genau dann stetig, wenn zu jeder offenen Menge $U \subset N$ das Urbild $f^{-1}(U)$ offen im Startraum $D$ ist.

Beachte jedoch, dass dies *nicht* heißen muss, dass $f^{-1}(U)$ auch offen in $M$ ist! In der Tat ist $f^{-1}(U)$ nach Aufgabe 23.36 (b) genau dann offen in $D$, wenn es eine in $M$ offene Teilmenge $V$ gibt mit $f^{-1}(U) = V \cap D$ – man sagt in diesem Fall auch manchmal, dass $f^{-1}(U)$ *relativ offen* in $D$ ist. Eine analoge Aussage gilt auch für (relativ) abgeschlossene Mengen.

Als anschauliches Beispiel hierfür können wir die stetige Abbildung

$$f\colon K_1(0) \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1$$

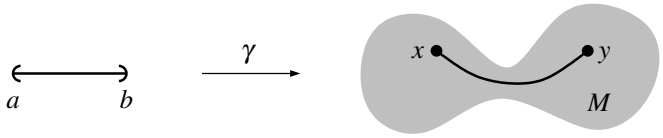
auf dem abgeschlossenen Einheitskreis $K_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ betrachten. Das Urbild der offenen Menge $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{R}$ unter $f$ ist in diesem Fall (wie im Bild dunkel eingezeichnet) der rechte Halbkreis, wobei vom Rand dieses Halbkreises der Bogen mit enthalten ist, der Durchmesser jedoch nicht. Diese Menge ist wegen der enthaltenen Randpunkte auf dem Halbkreisbogen natürlich nicht offen in $\mathbb{R}^2$ – sie ist aber (relativ) offen in $K_1(0)$, denn sie ist der Durchschnitt von $K_1(0)$ mit der nach Beispiel 24.18 offenen Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$.




Als Nächstes wollen wir untersuchen, ob wir eine Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes 8.21 für beliebige metrische Räume finden können, d. h. ob wir für gewisse Klassen von reellwertigen Funktionen sagen können, dass sie mit zwei Werten auch jede Zahl dazwischen annehmen müssen. Die entscheidende Frage ist hierbei, ob die Definitionsmenge „nur aus einem zusammenhängenden

Teil besteht“ – denn wenn sie wie z. B. die Menge $M = [0,1] \cup [2,3] \subset \mathbb{R}$ „aus zwei unverbundenen Teilen besteht“, können wir natürlich leicht eine stetige Abbildung $f\colon M \to \mathbb{R}$ konstruieren, die die Zwischenwertbedingung nicht erfüllt (in unserem Beispiel könnten wir dafür schon die Abbildung $f\colon M \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ wählen, da hierfür zwar 1 und 2, aber keine der Zahlen dazwischen im Bild von $f$ liegen). Die mathematisch korrekte Formulierung dieser Bedingung ist die folgende:

**Definition 24.20** (Wegzusammenhängende Räume)**.** Ein metrischer Raum $M$ heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in M$ eine stetige Abbildung $\gamma\colon [a,b] \to M$ eines reellen Intervalls $[a,b]$ nach $M$ gibt mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$. Man nennt $\gamma$ in diesem Fall einen **Weg** von $x$ nach $y$ – der Raum $M$ heißt also wegzusammenhängend, wenn sich je zwei Punkte in $M$ durch einen Weg verbinden lassen.




Die wichtigsten Beispiele wegzusammenhängender Räume sind durch die folgende Definition gegeben.

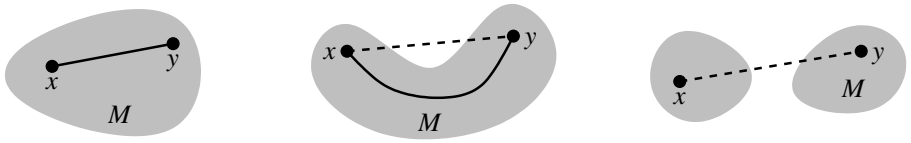
**Definition 24.21** (Konvexe Mengen)**.** Eine Teilmenge $M$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraums heißt **konvex**, wenn für alle $x, y \in M$ die **Verbindungsstrecke**

$$\overline{xy} := \{x + t(y-x) : t \in [0,1]\}$$

von $x$ nach $y$ ganz in $M$ liegt.

**Beispiel 24.22.**

(a) Jede konvexe Teilmenge $M$ eines normierten Raumes $V$ ist wegzusammenhängend, da in diesem Fall ja für alle $x, y \in M$ die Verbindungsstrecke $[0,1] \to M$, $t \mapsto x + t(y-x)$ ein Weg in $M$ von $x$ nach $y$ ist. Wie im Bild unten für $V = \mathbb{R}^2$ ist jedoch nicht jede wegzusammenhängende Teilmenge eines normierten Raumes konvex (die gestrichelten Linien zeigen jeweils Verbindungsstrecken, die nicht in $M$ liegen).




konvex, also wegzusammenhängend

wegzusammenhängend, aber nicht konvex

nicht wegzusammenhängend, also nicht konvex

(b) Jedes Intervall $M \subset \mathbb{R}$ aus Notation 4.17 (a) (offen, abgeschlossen, halboffen oder uneigentlich) ist konvex, und damit nach (a) wegzusammenhängend.

(c) Jede abgeschlossene Kugel $K_r(a)$ in einem normierten Raum ist konvex und damit wegzusammenhängend, denn für alle $x, y \in K_r(a)$ und $t \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned} \|x + t(y-x) - a\| &= \|(1-t)(x-a) + t(y-a)\| \\ &\leq |1-t| \cdot \|x-a\| + |t| \cdot \|y-a\| \leq (1-t) \cdot r + t \cdot r = r, \end{aligned}$$

und damit $\overline{xy} \subset K_r(a)$. Analog folgt dies auch für offene Kugeln.

(d) Die Menge $M = [0,1] \cup [2,3] \subset \mathbb{R}$ ist nicht wegzusammenhängend: Wäre $\gamma\colon [a,b] \to M \subset \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit $\gamma(a) = 1$ und $\gamma(b) = 2$, so müsste $\gamma$ nach dem Zwischenwertsatz 8.21 auch jeden Wert zwischen 1 und 2 annehmen – was aber nicht möglich ist, da diese Zahlen nicht in $M$ liegen.

Für wegzusammenhängende Räume erhalten wir nun wie erwartet eine Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes 8.21 in $\mathbb{R}$:

**Satz 24.23 (Zwischenwertsatz).** *Es sei $f\colon M \to N$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Ferner sei $M$ wegzusammenhängend. Dann gilt:*

(a) *Das Bild $f(M) \subset N$ ist ebenfalls wegzusammenhängend.*

(b) *Im Fall $N = \mathbb{R}$ nimmt $f$ mit je zwei Funktionswerten auch jeden Wert dazwischen an.*

*Beweis.* Es seien $x, y \in f(M)$ beliebig. Wir können dann $u, v \in M$ wählen mit $x = f(u)$ und $y = f(v)$. Da $M$ wegzusammenhängend ist, gibt es nun einen Weg $\gamma\colon [a,b] \to M$ von $u$ nach $v$. Die Abbildung $f \circ \gamma\colon [a,b] \to N$ ist dann ein Weg in $f(M)$ von $x$ nach $y$, woraus sich bereits die Behauptung (a) ergibt. Im Fall $N = \mathbb{R}$ folgt zusätzlich mit dem eindimensionalen Zwischenwertsatz 8.21, dass die Abbildung $f \circ \gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und damit auch $f$ mit $x$ und $y$ auch jede reelle Zahl dazwischen als Wert annehmen müssen. □

**Aufgabe 24.24.** Es sei $M$ ein metrischer Raum. Man zeige:

(a) Sind $a, b \in M$ und $A \subset M$ mit $a \in A$ und $b \notin A$, so enthält jeder Weg in $M$ von $a$ nach $b$ einen Punkt in $\partial A$.

(b) Ist $M$ wegzusammenhängend, so sind $\emptyset$ und $M$ die einzigen Teilmengen von $M$, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Die Konzepte der gleichmäßigen Konvergenz und Stetigkeit aus Abschnitt 8.C übertragen sich wie erwartet auf den Fall metrischer Räume. Mit dem gleichen Argument wie z. B. bei der Beschränktheit in Bemerkung 23.21 (b) stimmen auch sie in normierten Räumen zu äquivalenten Normen überein, obwohl sie keine topologischen Eigenschaften sind.

**Definition 24.25** (Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit)**.** Es sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Funktion $f_n\colon M \to N$ gegeben. Ist dann $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in M$, d. h. gilt

$$\forall x \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\colon d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon,$$

so nennt man die Funktionenfolge $(f_n)_n$ **punktweise konvergent** gegen $f$. Beachte, dass $n_0$ dabei nicht nur von $\varepsilon$, sondern auch vom betrachteten Punkt $x$ abhängen darf. Kann man $n_0$ jedoch auch unabhängig von $x$ wählen, d. h. gilt sogar

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in M\colon d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon,$$

so heißt die Funktionenfolge $(f_n)_n$ **gleichmäßig konvergent** gegen $f$.

(b) Die Abbildung $f$ heißt **gleichmäßig stetig**, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall a, x \in M\colon d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

(der entscheidende Punkt gegenüber der „normalen“ Stetigkeit ist also wie in Definition 8.44 auch hier, dass $\delta$ nur von $\varepsilon$, aber nicht vom betrachteten Punkt $a$ abhängen darf).

**Bemerkung 24.26.** Da Definition 24.25 völlig analog zum eindimensionalen Fall ist, übertragen sich auch unsere damals dazu erzielten Ergebnisse und ihre Beweise unmittelbar auf die neue Situation:

(a) Eine Folge von Funktionen $f_n\colon M \to \mathbb{K}$ auf einem metrischen Raum $M$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $f\colon M \to \mathbb{K}$, wenn $\|f_n - f\|_{\sup} := \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in M\}$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert (siehe Aufgabe 8.41 (a)).

(b) Konvergiert eine Folge stetiger Funktionen $f_n\colon M \to N$ auf einem metrischen Raum $M$ gleichmäßig gegen $f\colon M \to N$, so ist die Grenzfunktion $f$ ebenfalls stetig (siehe Satz 8.38).

(c) Ist eine Funktion $f\colon M \to N$ zwischen metrischen Räumen **Lipschitz-stetig**, d. h. gibt es eine **Lipschitz-Konstante** $L \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x,y)$$

für alle $x, y \in M$, so ist $f$ gleichmäßig stetig (siehe Lemma 8.48).

(d) Ist $f\colon M \to N$ eine stetige Funktion zwischen metrischen Räumen und ist $M$ kompakt, so ist $f$ sogar gleichmäßig stetig (siehe Satz 8.50). Dabei bedeutet die Kompaktheit des metrischen Raumes $M$, dass $M$ als Teilmenge von sich selbst im Sinne von Definition 23.50 kompakt ist.

62

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir schließlich noch einen oft nützlichen Satz zeigen, mit dem man die Existenz von Fixpunkten gewisser (stetiger) Abbildungen nachweisen kann. Da er im eindimensionalen Fall noch nicht besonders interessant ist, haben wir ihn damals in Kapitel 8 nicht in dieser Form bewiesen; am ehesten entspricht er vermutlich der Aussage von Aufgabe 8.30 (a).

**Satz 24.27 (Banachscher Fixpunktsatz).** *Es seien $M$ ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum und $f\colon M \to M$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass es ein $q \in [0,1)$ gibt mit*

$$d(f(x),f(y)) \leq q \cdot d(x,y)$$

*für alle $x,y \in M$ (eine solche Abbildung bezeichnet man auch als Kontraktion).*

*Dann hat $f$ genau einen Fixpunkt, d. h. es gibt genau ein $a \in M$ mit $f(a) = a$.*

*Beweis.* Um die Existenz eines Fixpunktes zu zeigen, konstruieren wir zu einem beliebigen Startpunkt $x_0 \in M$ rekursiv die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $M$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und zeigen, dass dies eine Cauchyfolge ist. Zu gegebenem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ wählen wir dazu ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{q^{n_0}}{1-q} d(x_1,x_0) < \varepsilon$ (was wegen $q < 1$ möglich ist). Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ induktiv

$$d(x_{n+1},x_n) = d(f(x_n),f(x_{n-1})) \leq q\, d(x_n,x_{n-1}) \leq \cdots \leq q^n\, d(x_1,x_0), \qquad (*)$$

und damit für alle $m \geq n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
d(x_m,x_n) &\leq d(x_m,x_{m-1}) + d(x_{m-1},x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1},x_n) && \text{(Dreiecksungleichung)}\\
&\leq (q^{m-1} + q^{m-2} + \cdots + q^n)\, d(x_1,x_0) && \text{(nach } (*)\text{)}\\
&\leq q^n \cdot \frac{1}{1-q} \cdot d(x_1,x_0) && \text{(geometrische Reihe)}\\
&< \varepsilon && \text{(Wahl von } n_0\text{)}.
\end{aligned}$$

Wegen der Vollständigkeit von $M$ konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also gegen ein $a \in M$.

Beachte, dass $f$ nach Voraussetzung wie in Bemerkung 24.26 (c) Lipschitz-stetig (mit Lipschitz-Konstante $q$) ist. Gehen wir in der Rekursionsgleichung $x_{n+1} = f(x_n)$ zum Grenzwert $n \to \infty$ über, so erhalten wir mit dem Folgenkriterium aus Satz 24.4 (b) also

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a),$$

d. h. $a$ ist ein Fixpunkt von $f$.

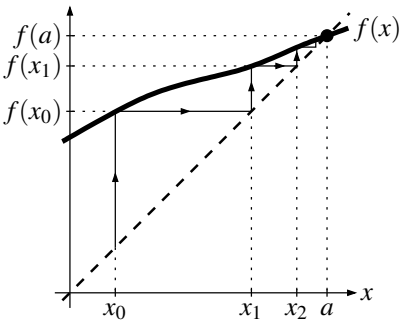
Es bleibt damit nur noch die Eindeutigkeit des Fixpunkts zu zeigen: Wäre $b \in M$ noch ein anderer Fixpunkt, so wäre $d(a,b) = d(f(a),f(b)) \leq q\, d(a,b)$, wegen $d(a,b) > 0$ erhalten wir dann also sofort den Widerspruch $1 \leq q$. □

**Beispiel 24.28.**

(a) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $|f'(x)| \leq q$ für ein $q \in [0,1)$ und alle $x \in \mathbb{R}$, so dass der Graph von $f$ wie im Bild rechts also überall flacher als der der (gestrichelt eingezeichneten) Identität verläuft. Nach dem Mittelwertsatz 10.23 (a) gibt es dann für alle $x,y \in \mathbb{R}$ ein $z$ zwischen $x$ und $y$ mit $f(x) - f(y) = f'(z) \cdot (x-y)$, und damit ist

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)| \cdot |x-y| \leq q\,|x-y|.$$

Also ist $f$ eine Kontraktion. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, hat $f$ damit nach Satz 24.27 genau einen Fixpunkt.



Das Bild zeigt auch sehr anschaulich die Konstruktion des Fixpunkts wie im Beweis des Satzes: Ausgehend von einem beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ bilden wir $f(x_0)$, nennen diesen Punkt $x_1$, bilden dann wieder $f(x_1)$ und nennen diesen Punkt $x_2$ usw., gehen also im Bild immer abwechselnd vertikal zum Graphen von $f$ und horizontal zum Graphen der Identität. Auf diese Art erhalten wir eine Folge, die gegen den Fixpunkt konvergiert.

(b) Die Konvergenz solcher rekursiv definierten Folgen hatten wir bereits in Abschnitt 5.B untersucht und dabei in der Regel das Monotoniekriterium verwendet. So konvergiert z. B. die reelle Folge $(x_n)_n$ mit $x_0 = 1$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach dem Heron-Verfahren aus Lemma 5.29 gegen $\sqrt{2}$ (siehe auch Beispiel 5.32). Der Banachsche Fixpunktsatz liefert hier wie in (a) einen alternativen Konvergenzbeweis, da man leicht zeigen kann, dass die Funktion $x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ das abgeschlossene Intervall $[1,2]$ in sich abbildet und ihre Ableitung dort betragsmäßig höchstens $\frac{1}{2}$ ist.

(c) Oft kann man den Banachschen Fixpunktsatz auch auf Funktionenräume anwenden, um die Existenz von Funktionen mit bestimmten Eigenschaften zu zeigen. Als Beispiel dafür wollen wir untersuchen, ob es eine differenzierbare Funktion $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}\sin\varphi(x) + \sin x \quad \text{für alle } x \in [0,1].$$

Solche Gleichungen, die die Ableitung einer gesuchten Funktion durch die Funktion selbst ausdrücken, nennt man *Differentialgleichungen*, sie kommen in der Praxis an vielen Stellen vor (siehe auch Aufgabe 20.20). Sie zu lösen ist in der Regel schwierig, und in der Tat kann man für die oben angegebene Differentialgleichung mit uns bekannten Funktionen keine exakte Lösung angeben. Mit dem Banachschen Fixpunktsatz können wir jedoch die Existenz einer Lösung beweisen, indem wir die Abbildung

$$f\colon C^0([0,1]) \to C^0([0,1]), \quad f(\varphi)(x) = \int_0^x \Big(\frac{1}{2}\sin\varphi(t) + \sin t\Big)\,dt$$

betrachten: Gibt es nämlich einen Fixpunkt von $f$, also eine stetige Funktion

$$\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \varphi(x) = \int_0^x \Big(\frac{1}{2}\sin\varphi(t) + \sin t\Big)\,dt \quad \text{für alle } x \in [0,1],$$

so folgt daraus durch Differenzieren dieser Gleichung nach dem Hauptsatz 12.21 der Differential- und Integralrechnung sofort die gewünschte Differentialgleichung für $\varphi$. Da $C^0([0,1])$ mit der Maximumsnorm nach Aufgabe 23.31 (a) vollständig ist, müssen wir also nur zeigen, dass $f$ bezüglich dieser Norm eine Kontraktion ist: Für alle $\varphi, \psi \in C^0([0,1])$ und $x \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned}
|f(\varphi)(x) - f(\psi)(x)| &= \left|\int_0^x \frac{1}{2}\big(\sin\varphi(t) - \sin\psi(t)\big)\,dt\right| \\
&\le \frac{1}{2}\int_0^x |\sin\varphi(t) - \sin\psi(t)|\,dt && \text{(Satz 12.13 (d))} \\
&\le \frac{1}{2}\int_0^x |\varphi(t) - \psi(t)|\,dt && \text{(Mittelwertsatz für sin wie in (a))} \\
&\le \frac{1}{2}\int_0^x \|\varphi - \psi\|_\infty\,dt \\
&\le \frac{1}{2}\|\varphi - \psi\|_\infty, && (x \le 1)
\end{aligned}$$

und damit wie benötigt $\|f(\varphi) - f(\psi)\|_\infty \le \frac{1}{2}\|\varphi - \psi\|_\infty$. Also ist $f$ ist eine Kontraktion mit $q = \frac{1}{2}$, und damit hat die gegebene Differentialgleichung nach Satz 24.27 eine Lösung.

In der Vorlesung „Einführung in die gewöhnlichen Differentialgleichungen“ des zweiten Studienjahres wird dieses Beispiel zu einem der zentralen Sätze ausgebaut, der in nahezu allen praktisch relevanten Fällen die Existenz von Lösungen von Differentialgleichungen sichert.

**Aufgabe 24.29.** Es seien $M$ ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum und $f\colon M \to M$ eine Abbildung. Zeige, dass $f$ einen eindeutigen Fixpunkt besitzt, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) $f$ ist surjektiv, und es gibt ein $q > 1$ mit $d(f(x), f(y)) \geq q\, d(x,y)$ für alle $x, y \in M$.

(b) $M$ ist kompakt, und es gilt $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$.

Zeige ferner anhand je eines Beispiels, dass auf die Surjektivität von $f$ bzw. die Kompaktheit von $M$ im Allgemeinen nicht verzichtet werden kann.

## 24.C Stetige Bilder kompakter Mengen

Am Anfang des letzten Abschnitts hatten wir gesehen, wie sich offene und abgeschlossene Mengen unter stetigen Abbildungen verhalten. Wir wollen dies nun auch für kompakte Mengen untersuchen. Auch sie haben eine Kompatibilitätseigenschaft mit stetigen Abbildungen – überraschenderweise allerdings nicht bezüglich Urbildern, sondern bezüglich Bildern. Der folgende Satz ist dabei die wahrscheinlich wichtigste Aussage zu kompakten Mengen überhaupt. Wir werden in diesem gesamten Abschnitt nichts weiter tun als einige der wichtigsten unmittelbaren Folgerungen daraus zu untersuchen.

**Satz 24.30** (Kompakte Mengen unter stetigen Abbildungen)**.** *Es sei $f\colon M \to N$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Ist dann $A \subset M$ kompakt, so auch $f(A) \subset N$ (man sagt: „Bilder kompakter Mengen sind kompakt“).*

*Beweis.* Wir müssen das Kriterium aus Definition 23.50 für die Menge $f(A)$ nachprüfen. Es sei also $(y_n)_n$ eine Folge in $f(A)$. Für alle $n$ gibt es dann Punkte $x_n \in A$ mit $y_n = f(x_n)$. Weil $A$ kompakt ist, gibt es nun eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$, die gegen einen Punkt $a \in A$ konvergiert. Nach dem Folgenkriterium für Stetigkeit aus Satz 24.4 (b) konvergiert dann aber auch $(y_{n_k})_k = (f(x_{n_k}))_k$ gegen $f(a) \in f(A)$. Also besitzt die ursprüngliche Folge $(y_n)_n$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $f(A)$, d. h. $f(A)$ ist kompakt. □

**Bemerkung 24.31.**

(a) In Gegensatz zu Lemma 24.16 und Satz 24.17 gilt in Satz 24.30 nicht die Umkehrung: Auch für die offensichtlich unstetige Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

sind sogar Bilder beliebiger Teilmengen von $\mathbb{R}$ immer kompakt (nämlich immer $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$ oder $\{0,1\}$).

(b) Ist $f\colon M \to N$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen, so haben wir in Lemma 24.16, Satz 24.17 und Satz 24.30 jetzt also gesehen:

| |
|---|
| *Urbilder* von Umgebungen unter $f$ sind Umgebungen. |
| *Urbilder* offener Mengen unter $f$ sind offen. |
| *Urbilder* abgeschlossener Mengen unter $f$ sind abgeschlossen. |
| *Bilder* kompakter Mengen unter $f$ sind kompakt. |

In der Tat gelten die jeweils anderen Aussagen (also mit „Bild“ und „Urbild“ vertauscht) im Allgemeinen nicht: Betrachten wir die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0 \qquad \text{und} \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^x,$$

so gilt in $\mathbb{R}$ offensichtlich:

- Das Intervall $U = (-1,1)$ ist eine offene Umgebung von 0, aber das Bild $f(U) = \{0\}$ ist weder offen noch eine Umgebung von 0.

- Die Menge $A = \mathbb{R}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$, aber das Bild $g(A) = \mathbb{R}_{>0}$ ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$.
- Die Menge $A = \{0\} \subset \mathbb{R}$ ist kompakt, aber das Urbild $f^{-1}(A) = \mathbb{R}$ ist nicht kompakt in $\mathbb{R}$.

Wir werden diese Unterschiede nun als Erstes geschickt ausnutzen, um einen Satz über die Existenz stetiger Umkehrabbildungen zu stetigen bijektiven Abbildungen zu beweisen.

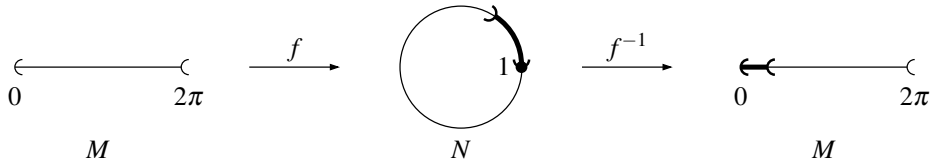
**Satz 24.32** (Stetigkeit von Umkehrabbildungen)**.** *Es sei $f\colon M \to N$ eine stetige und bijektive Abbildung zwischen metrischen Räumen. Ist $M$ kompakt, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon N \to M$ stetig.*

*Beweis.* Nach Satz 24.17 (c) genügt es zu zeigen, dass Urbilder abgeschlossener Mengen unter $f^{-1}$, also Bilder abgeschlossener Mengen unter $f$ wieder abgeschlossen sind. Es sei also $A \subset M$ abgeschlossen. Nach Aufgabe 23.61 (a) ist $A$ als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes $M$ dann ebenfalls kompakt. Damit ist nach Satz 24.30 aber auch $f(A)$ kompakt, insbesondere also abgeschlossen nach Satz 23.51 (a). □

**Beispiel 24.33.** Ohne die Zusatzvoraussetzung der Kompaktheit des Definitionsbereichs ist die Aussage von Satz 24.32 im Allgemeinen falsch: Es seien $M = [0, 2\pi)$, $N = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ der Rand des komplexen Einheitskreises, und $f$ die offensichtlich stetige und bijektive Abbildung

$$f\colon M \to N,\ x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$$

mit nicht kompakter Definitionsmenge $M$. In diesem Fall ist die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon N \to M$ im Punkt $1 \in N$ nicht stetig: Wie im Bild unten dick eingezeichnet ist das halboffene Intervall $[0, 1)$ eine Umgebung von $f^{-1}(1) = 0$ in $M$, aber sein Urbild unter $f^{-1}$, also $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} : 0 \leq x < 1\}$, ist keine Umgebung von 1 in $N$, da hierfür Punkte in $N$ unterhalb von 1 fehlen.




Mit kompakter Definitionsmenge $[0, 2\pi]$ hätte dieses Beispiel natürlich nicht funktioniert, da $f$ dann nicht mehr injektiv gewesen wäre.

**Aufgabe 24.34.** Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1$ die Projektion auf die erste Koordinate. Man beweise oder widerlege:

(a) Bilder offener Mengen unter $f$ sind offen.

(b) Bilder abgeschlossener Mengen unter $f$ sind abgeschlossen.

(c) Urbilder kompakter Mengen unter $f$ sind kompakt.

Dass stetige Abbildungen gemäß Satz 24.30 kompakte Mengen wieder auf kompakte Mengen abbilden, hat wie schon erwähnt viele weitreichende Konsequenzen. So erhalten wir z. B. die folgende wichtige Verallgemeinerung von Satz 8.25 zur Existenz von Maxima und Minima stetiger Funktionen.

**Folgerung 24.35** (**Satz vom Maximum und Minimum**)**.** *Es sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem nicht-leeren kompakten metrischen Raum $M$. Dann „nimmt $f$ auf $M$ ein Maximum und Minimum an“, d. h. die Menge $f(M) \subset \mathbb{R}$ hat ein Maximum und Minimum. Insbesondere ist $f$ damit also auf $M$ beschränkt.*

*Beweis.* Die Menge $f(M) \subset \mathbb{R}$ ist nicht leer und nach Satz 24.30 kompakt, besitzt nach Lemma 23.53 also ein Maximum und Minimum. □

Eine weitere einfache, aber überaus wichtige Folgerung hieraus ist die bereits in Beispiel 23.8 angekündigte Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{K}^n$. Nach dem Beweis dieser Aussage können wir dann also auf $\mathbb{K}^n$ für alle topologischen Konzepte (und ein paar weitere wie z. B. die Beschränktheit, siehe Bemerkung 23.21 (b)) jeweils eine beliebige Norm verwenden, ohne das Ergebnis zu verändern.

**Lemma 24.36** (Stetigkeit von Normen auf $\mathbb{K}^n$)**.** *Für eine beliebige Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{K}^n$ ist die Abbildung*

$$f\colon (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|$$

*stetig. (Beachte, dass wir $\mathbb{K}^n$ dabei wie üblich mit der euklidischen Norm als normierten Raum auffassen, und nicht mit der gegebenen Norm $\|\cdot\|$!)*

*Beweis.* Zunächst gilt für alle $x \in \mathbb{K}^n$

$$\|x\| = \|x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n\| \leq |x_1| \cdot \|e_1\| + \cdots + |x_n| \cdot \|e_n\| \leq b\|x\|_2 \quad \text{mit } b := \|e_1\| + \cdots + \|e_n\|,$$

und damit $\|x-y\| \leq b\|x-y\|_2$ für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$. Die Abbildung $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$, $x \mapsto x$ ist also wie in Bemerkung 24.26 (c) Lipschitz-stetig. Verkettung mit der nach Beispiel 24.3 (b) stetigen Abbildung $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ liefert damit sofort die Behauptung. □

63

**Satz 24.37** (Äquivalenz von Normen auf $\mathbb{K}^n$)**.** *Alle Normen auf $\mathbb{K}^n$ sind zueinander äquivalent.*

*Beweis.* Weil die Äquivalenz von Normen eine Äquivalenzrelation ist, genügt es zu zeigen, dass jede Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{K}^n$ zur euklidischen Norm äquivalent ist, also dass es zu einer solchen Norm $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit

$$a\|x\|_2 \leq \|x\| \leq b\|x\|_2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{K}^n. \tag{$*$}$$

Da man außerdem Skalare nach Definition 23.1 (a) aus beiden Normen herausziehen kann, reicht es dafür sogar schon, die Ungleichung $a \leq \|x\| \leq b$ für alle (euklidisch normierten) Vektoren in der Menge $A := \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_2 = 1\}$ zu zeigen.

Bezüglich der euklidischen Norm ist $A$ aber nach Beispiel 23.52 (b) kompakt. Die nach Lemma 24.36 stetige Normabbildung $\|\cdot\|$ nimmt damit auf $A$ nach Folgerung 24.35 ein Minimum $a$ und ein Maximum $b$ an – was sofort die behauptete Ungleichung $(*)$ zeigt. Dabei muss auch wirklich $a > 0$ sein, weil $\|x\| = 0$ nach Definition 23.1 (b) nur für $x = 0 \notin A$ gilt. □

Natürlich gilt die Äquivalenz aller Normen mit Satz 24.37 sogar auf beliebigen endlich-dimensionalen Vektorräumen, da diese stets zu einem $\mathbb{K}^n$ isomorph sind. Ein wichtiges Beispiel hierfür sind die Matrizenräume $\mathbb{K}^{m\times n} \cong \mathbb{K}^{mn}$. Möchte man mit Normen von Vektoren und Matrizen gleichzeitig arbeiten, ist es zur Vereinfachung der Rechnungen allerdings in der Regel geschickt, die dafür gewählten Normen aufeinander abzustimmen. In der Tat zeigen der folgende Satz und die anschließende Folgerung, dass es zu gewählten Vektornormen auf $\mathbb{K}^m$ und $\mathbb{K}^n$ immer eine besonders natürlich definierte passende Matrixnorm gibt, die neben den reinen Normeigenschaften noch weitere nützliche Rechenregeln erfüllt.

**Satz und Definition 24.38** (Matrixnormen)**.** *Es seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$. Für gewählte Normen auf $\mathbb{K}^m$ und $\mathbb{K}^n$ und eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ existiert dann das Maximum*

$$\|A\| := \max\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}\right\} = \max\{\|Ax\| : x \in \mathbb{K}^n \text{ mit } \|x\| = 1\}. \tag{$*$}$$

*Dies definiert eine Norm auf $\mathbb{K}^{m\times n}$. Man nennt sie die von den gegebenen (Vektor-)Normen auf $\mathbb{K}^m$ und $\mathbb{K}^n$ induzierte* ***Matrixnorm****. In der Regel wählt man für die beiden Vektornormen den gleichen Typ und verwendet dann für die induzierte Matrixnorm die gleiche Bezeichnung, es ist also z. B.*

$$\|A\|_2 := \max\{\|Ax\|_2 : x \in \mathbb{K}^n \text{ mit } \|x\|_2 = 1\} \quad \text{und} \quad \|A\|_\infty := \max\{\|Ax\|_\infty : x \in \mathbb{K}^n \text{ mit } \|x\|_\infty = 1\}.$$

*Beweis.* Zunächst einmal stimmen die beiden in $(*)$ genannten Mengen überein: Da wir jeden Vektor $x \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$ als $x = \lambda y$ mit $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ und $y \in \mathbb{K}^n$ mit $\|y\| = 1$ schreiben können, ist

$$\left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\} \right\} = \left\{ \frac{\|\lambda Ay\|}{\|\lambda y\|} : \lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}, y \in \mathbb{K}^n \text{ mit } \|y\| = 1 \right\}$$
$$\overset{23.1\,(a)}{=} \left\{ \|Ay\| : y \in \mathbb{K}^n \text{ mit } \|y\| = 1 \right\}.$$

An der hinteren Darstellung dieser Menge sehen wir auch, dass sie das Bild der (nach Beispiel 23.52 (b)) kompakten Menge $\{x \in \mathbb{K}^n : \|x\| = 1\}$ unter der (nach Beispiel 24.3 (b) und 24.11 (b)) stetigen Abbildung $x \mapsto \|Ax\|$ ist. Nach Folgerung 24.35 besitzt sie also ein Maximum, so dass der im Satz angegebene Ausdruck für $\|A\|$ existiert.

Die Normeigenschaften aus Definition 23.1 folgen direkt aus denen der gegebenen Vektornorm:

(a) Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ ist

$$\|\lambda A\| = \max\{\|\lambda Ax\| : \|x\| = 1\} = |\lambda| \cdot \max\{\|Ax\| : \|x\| = 1\} = |\lambda| \cdot \|A\|.$$

(b) Ist $A \neq 0$, so gibt es einen Vektor $x \in \mathbb{K}^n$ mit $Ax \neq 0$ (z. B. einen Einheitsvektor zu einer Nichtnullspalte von $A$), also mit $\|Ax\| > 0$, und dementsprechend ist auch $\|A\| > 0$.

(c) Für eine weitere Matrix $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gilt

$$\begin{aligned} \|A+B\| &= \max\{\|(A+B)x\| : \|x\| = 1\} \\ &\leq \max\{\|Ax\| + \|Bx\| : \|x\| = 1\} \\ &\leq \max\{\|Ax\| : \|x\| = 1\} + \max\{\|Bx\| : \|x\| = 1\} \\ &= \|A\| + \|B\|. \end{aligned}$$

□

**Folgerung 24.39** (Eigenschaften induzierter Matrixnormen)**.** *Für die von Vektornormen induzierte Matrixnorm aus Definition 24.38 gilt für alle $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$:*

(a) *(Verträglichkeit mit der Vektornorm) Für alle $x \in \mathbb{K}^n$ ist $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$;*

(b) *(Submultiplikativität) Für alle $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$ ist $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.*

*Beweis.*

(a) Für $x = 0$ ist diese Aussage trivial; für $x \neq 0$ folgt sie direkt aus der Definition der induzierten Matrixnorm, da dann ja stets $\|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ gilt.

(b) Nach Definition der induzierten Matrixnorm $\|AB\|$ gibt es ein $x \in \mathbb{K}^p$ mit $\|x\| = 1$ und

$$\|AB\| = \|ABx\| \overset{(a)}{\leq} \|A\| \cdot \|Bx\| \overset{(a)}{\leq} \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\| = \|A\| \cdot \|B\|.$$

□

**Beispiel 24.40.**

(a) Nach Aufgabe 22.49 (a) ist die von der euklidischen Norm induzierte Matrixnorm $\|A\|_2$ einer Matrix $A \neq 0$ gegeben durch den größten Singulärwert von $A$. Im Fall einer quadratischen, symmetrischen bzw. hermiteschen und positiv semidefiniten Matrix ist dies nach Beispiel 22.45 (a) also genau der größte Eigenwert von $A$. Da die Menge der Eigenwerte oft als das Spektrum der Matrix bezeichnet wird, nennt man $\|A\|_2$ auch die **Spektralnorm** von $A$.

Beachte, dass $\|A\|_2$ (trotz dieser Notation) damit also *nicht* die Frobenius-Norm aus Beispiel 23.3 (f) ist, also nicht die euklidische Norm, wenn man $\mathbb{K}^{m\times n}$ mit $\mathbb{K}^{mn}$ identifiziert!

(b) Wir wollen zeigen, dass die von der Maximumsnorm induzierte Matrixnorm einer gegebenen Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ die sogenannte **Zeilensummennorm**

$$\|A\|_\infty = \max\left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| : i = 1, \ldots, m \right\} \qquad (*)$$

ist: Für alle $x \in \mathbb{K}^n$ mit $\|x\|_\infty = 1$ gilt zunächst

$$\begin{aligned}\|Ax\|_\infty &= \max\left\{\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right| : i = 1,\dots,m\right\} \\ &\overset{(1)}{\leq} \max\left\{\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot |x_j| : i = 1,\dots,m\right\} \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \\ &\overset{(2)}{\leq} \max\left\{\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| : i = 1,\dots,m\right\}. \qquad (|x_j| \leq 1 \text{ für alle } j)\end{aligned}$$

Außerdem können wir für ein geeignetes $x$ bei (1) und (2) die Gleichheit erhalten:

- bei (1), indem wir für ein $i$ mit maximalem Wert von $\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot |x_j|$ bei allen $x_j$ das Vorzeichen (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. den Winkel in Polarkoordinaten (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) so wählen, dass alle $a_{i,j}x_j$ reell nicht-negativ sind;
- bei (2), indem wir alle $x_j$ vom Betrag 1 wählen.

Dies zeigt den behaupteten Ausdruck $(*)$ für $\|A\|_\infty = \max\left\{\|Ax\|_\infty : x \in \mathbb{K}^n \text{ mit } \|x\|_\infty = 1\right\}$.

(c) Für jede Matrixnorm gilt nach Definition 24.38 (bei gleicher zugrundeliegender Vektornorm im Start- und Zielraum)

$$\|E\| = \max\{\|x\| : x \in \mathbb{K}^n \text{ mit } \|x\| = 1\} = 1.$$

Da für die Frobenius-Norm offensichtlich $\|E_n\| = \sqrt{n}$ gilt, ist sie für $n \geq 2$ also insbesondere keine induzierte Matrixnorm zu einer Vektornorm – obwohl sie nach Aufgabe 23.30 die zusätzlichen Eigenschaften aus Folgerung 24.39 erfüllt.

**Aufgabe 24.41.** Es sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Man zeige:

(a) Die Menge $M := \left\{\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\right\}$ ist kompakt in $\mathbb{R}^2$.

(b) Die Menge $\mathrm{O}(n)$ aller orthogonalen Matrizen ist kompakt in $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(c) Die Menge aller indefiniten Matrizen ist offen im Raum aller symmetrischen $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$.

**Aufgabe 24.42** (Abstände von Mengen)**.** Wir definieren den *Abstand* zweier nicht-leerer abgeschlossener Teilmengen $A$ und $B$ eines metrischen Raumes $M$ als

$$d(A,B) := \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\} \quad \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Man zeige:

(a) Sind $A$ und $B$ kompakt, so ist dieses Infimum ein Minimum.

(b) Ist nur $A$ kompakt, aber $M$ vollständig, so ist dieses Infimum ebenfalls ein Minimum.

(c) Im Allgemeinen ist dieses Infimum kein Minimum, selbst wenn $A$ kompakt oder $M$ vollständig ist.

**Aufgabe 24.43** (Konvergenz von Mengen)**.** Zu einem gegebenen metrischen Raum $M$ sei $\mathscr{K}(M)$ die Menge aller nicht-leeren kompakten Teilmengen von $M$. Wir definieren die folgenden Abstandsfunktionen:

für $a \in M$ und $B \in \mathscr{K}(M)$ sei $\quad d(a,B) := \min\{d(a,b) : b \in B\}$ wie in Aufgabe 24.42 (a);

für $A, B \in \mathscr{K}(M)$ sei $\quad h(A,B) := \max\left(\max\{d(a,B) : a \in A\}, \max\{d(b,A) : b \in B\}\right)$.

Man zeige:

(a) Die Maxima in der Definition von $h$ existieren.

(b) Die Abbildung $h$ ist eine Metrik auf $\mathscr{K}(M)$. (Man nennt sie die *Hausdorff-Metrik*; sie misst, wie verschieden zwei Mengen voneinander sind.)

(c) Für $M = \mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik gilt $\lim\limits_{n\to\infty} K_{1+\frac{1}{n}}(0) = K_1(0)$ in $\mathscr{K}(M)$.

## 24.D Peano-Kurven

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir eine interessante Anwendung betrachten, in der viele wichtige Sätze dieses und des vorangegangenen Kapitels geschickt miteinander kombiniert werden, um ein sehr erstaunliches Resultat zu beweisen. Es handelt sich dabei nicht so sehr um ein Resultat, das für unser weiteres Studium der Analysis von großer Bedeutung wäre, sondern einfach nur um ein sehr „schönes“ Stück Mathematik, das so verblüffend ist, dass man es fast schon als Paradoxon bezeichnen könnte: Wir werden zeigen, dass es eine stetige Abbildung vom Einheitsintervall $[0,1] \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$ (also einen Weg in der Ebene im Sinne von Definition 24.20) gibt, deren Bild das *gesamte* „Einheitsquadrat“ $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ ist. Wir können also mit einem „eindimensionalen Objekt“ (nämlich dem Einheitsintervall) durch eine stetige Abbildung ein „zweidimensionales Objekt“ (das Einheitsquadrat) komplett ausfüllen. Spätestens hier sehen wir also, dass man mit der oft gehörten Interpretation einer stetigen Abbildung in einer Variablen als etwas, das man zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen, etwas vorsichtig sein muss.

In diesem Abschnitt bezeichne stets $I := [0,1] \subset \mathbb{R}$ das Einheitsintervall und $Q := I \times I = [0,1] \times [0,1]$ das Einheitsquadrat.

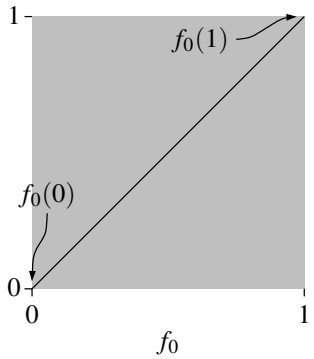
**Satz 24.44 (Peano-Kurve).** *Es gibt eine stetige surjektive Abbildung $f\colon I \to Q$. (Eine solche Abbildung wird als Peano-Kurve bezeichnet.)*

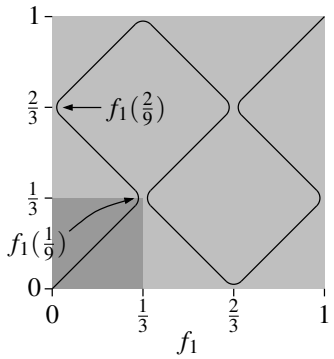
*Beweis.* Der Beweis dieses Satzes ist konstruktiv, gibt also eine mögliche Peano-Kurve explizit an. Sie wird als Grenzwert einer rekursiv definierten Folge von Funktionen $f_n\colon I \to Q$ konstruiert.

Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ wird dabei wie folgt gebildet: Die erste Funktion $f_0$ ist einfach die Gerade

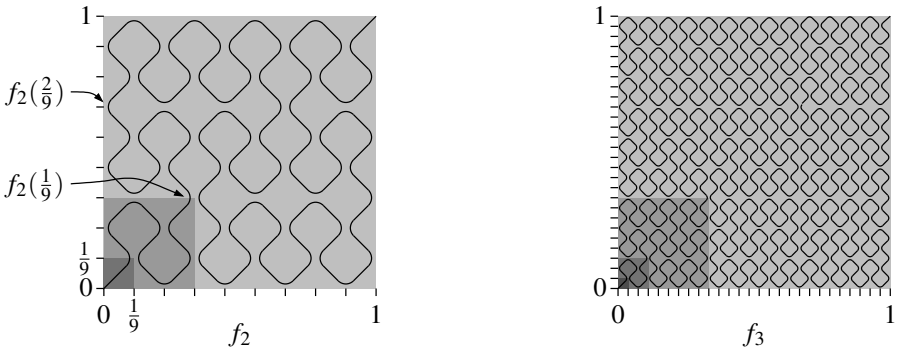
$$f_0\colon I \to Q,\ f_0(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix},$$

die das Einheitsquadrat auf der Diagonale von links unten nach rechts oben durchläuft. Für die nächste Funktion $f_1$ teilen wir $Q$ in 9 gleich große Teilquadrate entlang der horizontalen und vertikalen Linien bei $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$, und durchlaufen nun diese 9 Teilquadrate der Reihe nach entlang ihrer Diagonalen wie im Bild unten dargestellt. Der Weg $f_1$ besteht also aus 9 Geradenstücken, die alle „mit gleicher Geschwindigkeit“ durchlaufen werden – er ist im Bild an den Ecken nur deswegen abgerundet eingezeichnet, damit man seinen Verlauf besser erkennen kann.




Der nächste Weg $f_2$ entsteht nun aus $f_1$, indem wir jedes der 9 Geradenstücke von $f_1$ (wie etwa das in dem oben dunkel eingezeichneten Teilquadrat) durch einen Weg ersetzen, der selbst wieder wie $f_1$ aussieht. Entsprechend ersetzen wir dann jedes der Geradenstücke von $f_2$ durch einen Weg wie $f_1$, um $f_3$ zu erhalten. Setzen wir dieses Verfahren fort, so erhalten wir eine Folge $(f_n)_n$ von Wegen $f_n\colon I \to Q$. Die Wege $f_2$ und $f_3$ sind im folgenden Bild eingezeichnet.

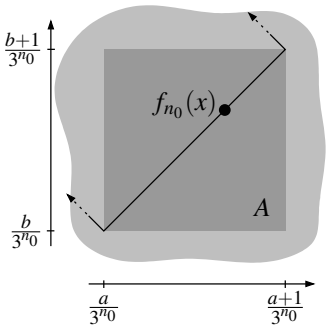



Wir wollen nun $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in I$ setzen und müssen uns dazu natürlich als Erstes davon überzeugen, dass dieser Grenzwert überhaupt existiert.

Es sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon$. Für ein beliebiges $x \in I$ liegt $f_{n_0}(x)$ nun wie im Bild rechts auf einem der Geradenstücke, die diagonal durch eines der Teilquadrate von $f_{n_0}$ laufen. Dieses Teilquadrat hat nach Konstruktion die Seitenlänge $\frac{1}{3^{n_0}}$ und ist von der Form

$$A = \left[\frac{a}{3^{n_0}}, \frac{a+1}{3^{n_0}}\right] \times \left[\frac{b}{3^{n_0}}, \frac{b+1}{3^{n_0}}\right] \quad \subset Q$$

für gewisse natürliche Zahlen $0 \leq a, b < 3^{n_0}$. Beachte, dass dann aber auch alle $f_n(x)$ mit $n \geq n_0$ in $A$ liegen, denn wir ändern den Teil des Weges $f_{n_0}$ in $A$ für $n \geq n_0$ ja nur noch *innerhalb von A* ab.




Für alle $n, m \geq n_0$ liegen $f_n(x)$ und $f_m(x)$ also in einem Quadrat mit Seitenlänge $\frac{1}{3^{n_0}}$, d. h. es ist

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_\infty \leq \frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon \qquad (*)$$

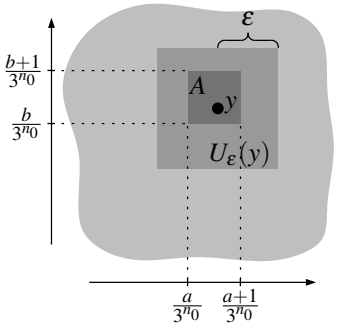
für alle $n, m \geq n_0$. Dies bedeutet genau, dass die Folge $(f_n(x))_n$ für festes $x$ eine Cauchyfolge in $Q$ ist. Als abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist $Q$ nach Satz 23.29 und Folgerung 23.43 nun aber vollständig – d. h. diese Cauchyfolge konvergiert für alle $x$ gegen einen Punkt in $Q$, und wir können unsere Funktion $f\colon I \to Q$ damit in der Tat wie gewünscht durch $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ definieren. Es bleibt jetzt nur noch zu zeigen, dass $f$ auch stetig und surjektiv ist.

Für die Stetigkeit nehmen wir den Grenzwert von $(*)$ für $m \to \infty$ und erhalten für alle $x \in I$

$$\|f_n(x) - f(x)\|_\infty \leq \frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon$$

(beachte, dass die Norm nach Beispiel 24.3 (b) stetig ist und wir den Grenzwert damit nach Satz 24.4 (b) in die Norm hineinziehen dürfen). Dies sagt uns noch einmal, dass $f_n(x)$ für $n \to \infty$ gegen $f(x)$ konvergiert – der entscheidende Punkt ist nun aber, dass unser oben gewähltes $n_0$ nur von $\varepsilon$ und nicht vom Punkt $x$ abhängt. Die Folge $(f_n)_n$ ist also sogar gleichmäßig konvergent. Nach Bemerkung 24.26 (b) ist die Grenzfunktion $f$ als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen damit stetig.

Für die Surjektivität erinnern wir uns daran, dass nach Satz 24.30 mit $I$ auch das Bild $f(I)$ unter der stetigen Abbildung $f$ kompakt ist. Nach Satz 23.51 (a) ist $f(I)$ also insbesondere abgeschlossen, d. h. das Komplement $\mathbb{R}^2 \backslash f(I)$ ist offen. Angenommen, $f$ würde nun nicht surjektiv auf das Einheitsquadrat $Q$ abbilden, d. h. es gäbe einen Punkt $y \in Q \backslash f(I)$. Da $\mathbb{R}^2 \backslash f(I)$ offen ist, gäbe es dann eine Umgebung $U_\varepsilon(y)$ von $y$, die ganz in $\mathbb{R}^2 \backslash f(I)$ liegt. Wir verwenden dabei wieder die Maximumsnorm, so dass diese Umgebung wie im Bild rechts ein (offenes) Quadrat mit Seitenlänge $2\varepsilon$ ist.



Wählen wir nun wieder unser $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon$, so muss dann mindestens ein Quadrat

$$A = \left[\frac{a}{3^{n_0}}, \frac{a+1}{3^{n_0}}\right] \times \left[\frac{b}{3^{n_0}}, \frac{b+1}{3^{n_0}}\right] \subset \mathbb{R}^2$$

der zu $f_{n_0}$ gehörigen Unterteilung von $Q$ ganz in $U_\varepsilon(y)$ liegen, enthält also ebenfalls keinen Punkt des Weges $f$. Dies ist aber ein Widerspruch, da $f$ nach unserer Konstruktion natürlich durch jedes solche Quadrat irgendwie hindurch läuft, also insbesondere einen Punkt in $A$ enthalten muss. Also war unsere Annahme falsch, und $f$ ist in der Tat surjektiv. □

Nachdem wir nun gezeigt haben, dass es eine stetige surjektive Abbildung $I \to Q$ gibt, würde man vielleicht vermuten, dass es umgekehrt auch eine stetige injektive Abbildung $Q \to I$ gibt. Wie wir jetzt sehen wollen, ist dies jedoch erstaunlicherweise falsch. Das gleiche Argument zeigt dann auch, dass keine *bijektive* Peano-Kurve existiert.

**Satz 24.45.**

(a) *Es gibt keine stetige injektive Abbildung $Q \to I$.*

(b) *Es gibt keine stetige bijektive Abbildung $I \to Q$ (also keine bijektive Peano-Kurve).*

*Beweis.*

(a) Angenommen, $f\colon Q \to I$ wäre stetig und injektiv. Mit $Q$ wäre dann nach Satz 24.30 und 24.23 (a) auch das Bild $f(Q) \subset I$ kompakt und wegzusammenhängend, also ein abgeschlossenes Intervall $[a,b]$. Damit ist die Einschränkung $f\colon Q \to [a,b]$ stetig und bijektiv.

Wir nehmen nun aus dem Intervall $[a,b]$ den Mittelpunkt $c := \frac{a+b}{2}$ heraus, und dementsprechend aus dem Quadrat $Q$ den Urbildpunkt $f^{-1}(c)$. Die dadurch entstehende Einschränkung $f|_{Q\setminus f^{-1}(c)}\colon Q\setminus f^{-1}(c) \to [a,b]\setminus\{c\}$ ist dann natürlich immer noch stetig (und bijektiv). Dies ist aber ein Widerspruch zum Zwischenwertsatz 24.23 (a), da $Q\setminus\{f^{-1}(c)\}$ immer noch wegzusammenhängend ist, $[a,b]\setminus\{c\}$ aufgrund des fehlenden Mittelpunkts jedoch nicht.

(b) Da $I$ kompakt ist, wäre nach Satz 24.32 mit einer stetigen bijektiven Abbildung $I \to Q$ auch ihre Umkehrung $Q \to I$ stetig und bijektiv, im Widerspruch zu (a). □

**Bemerkung 24.46.** In beiden Teilen von Satz 24.45 ist die Forderung der Stetigkeit wichtig:

(a) Da es nach Satz 24.44 eine surjektive Abbildung $f\colon I \to Q$ gibt, gibt es natürlich auch eine (unstetige) injektive Abbildung $Q \to I$: Wir können einfach jeden Punkt $x \in Q$ auf ein beliebiges Urbild von $x$ unter $f$ abbilden.

(b) Natürlich gibt es neben der surjektiven Peano-Kurve $I \to Q$ aus Satz 24.44 auch eine injektive Abbildung $I \to Q$ (z. B. die Abbildung $f_0$ aus dem Beweis dieses Satzes). Man kann zeigen, dass daraus folgt, dass es auch eine bijektive Abbildung $I \to Q$ gibt, also dass das Einheitsintervall und das Einheitsquadrat im Sinne von Definition 5.54 (a) gleichmächtig sind. Da es keine *stetige* bijektive Abbildung $I \to Q$ gibt, sind diese beiden Räume aus topologischer Sicht jedoch verschieden.

**Aufgabe 24.47.** Es sei $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Gibt es eine stetige, surjektive Abbildung …

(a) von $I$ nach $I \times I \times I \subset \mathbb{R}^3$;

(b) von $I$ nach $\mathbb{R}^2$;

(c) von $[0,1)$ nach $\mathbb{R}^2$;

(d) von $I$ in den abgeschlossenen Einheitskreis $K_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$?

(Hinweis: In allen Fällen oben, in denen eine solche Abbildung existiert, lässt sie sich explizit durch die Peano-Kurve $f\colon I \to I \times I$ aus Satz 24.44 ausdrücken, ohne diese aufwendige Konstruktion noch einmal zu wiederholen.)

# 25. Differenzierbarkeit im Mehrdimensionalen

Wie im eindimensionalen Fall in Kapitel 10 wollen wir uns nach der Stetigkeit von Abbildungen jetzt mit der Differenzierbarkeit beschäftigen. Wir erinnern uns dazu zunächst einmal daran, wie wir differenzierbare Funktionen damals definiert hatten: Hat $D$ keine isolierten Punkte, ist $f\colon D \to \mathbb{K}$ eine Funktion und $a \in D$, so heißt $f$ differenzierbar in $a$, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \in \mathbb{K} \qquad (*)$$

(der dann die Ableitung von $f$ in $a$ genannt wird) existiert. Die anschauliche Idee hinter dieser Definition war, dass dann für $x$ in der Nähe von $a$ die Approximation

$$f'(a) \approx \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \quad \text{und damit} \quad f(x) \approx f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$$

gilt, dass wir $f$ also in der Nähe von $a$ durch eine Gerade $x \mapsto f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$ mit Steigung $f'(a)$ annähern. Wollen wir diese Idee der linearen Approximierbarkeit nun auf andere Start- und Zielbereiche verallgemeinern, stellen wir zunächst fest:

- Um lineare Approximierbarkeit formulieren zu können, müssen wir offensichtlich wissen, was lineare Abbildungen zwischen den betrachteten Räumen überhaupt sind. In metrischen Räumen wäre dies z. B. nicht der Fall, da dort im Allgemeinen ja nicht einmal eine Addition bzw. Multiplikation definiert ist. Wir werden uns daher für die Untersuchung der Differenzierbarkeit auf normierte Räume (bzw. Teilmengen davon) beschränken müssen.
- Betrachten wir als Beispiel einmal als Start- und Zielraum die normierten Räume $\mathbb{K}^n$ bzw. $\mathbb{K}^m$, so ist nun die Idee der linearen Approximierbarkeit $f(x) \approx f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$ für $x \in \mathbb{K}^n$ in der Nähe eines gegebenen Punktes $a \in \mathbb{K}^n$ sinnvoll formulierbar, wenn wir dies als Gleichung im Zielraum $\mathbb{K}^m$ auffassen, $f'(a) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ eine Matrix ist und „$\cdot$“ das Matrixprodukt mit dem Vektor $x-a \in \mathbb{K}^n$ darstellt. Ableitungen werden im Mehrdimensionalen also zu Matrizen werden.
- Die Ableitungsmatrix $f'(a)$ wird uns dann von $a$ aus für jeden kleinen Schritt $x-a$ in einer beliebigen Richtung angeben, um welchen Wert $f'(a) \cdot (x-a)$ sich $f$ dabei ändert. Damit dies eindeutig bestimmt ist, muss man sich dem Punkt $a$ aber offensichtlich innerhalb des Definitionsbereichs überhaupt erst einmal aus jeder Richtung nähern können. Im Gegensatz zum Eindimensionalen werden wir im Folgenden daher nur offene Definitionsbereiche betrachten, also nicht über Differenzierbarkeit in Randpunkten sprechen.

Mit diesen Vorüberlegungen werden wir im folgenden Abschnitt nun die Ableitung im Mehrdimensionalen definieren und angeben, wie man sie berechnen kann.

## 25.A Differenzierbare Abbildungen

Wollen wir die Definition der Ableitung ins Mehrdimensionale übertragen, haben wir zunächst ein weiteres Problem: Wir können keinen Differenzenquotienten wie in $(*)$ in der Einleitung oben bilden, da wir hierzu durch den Vektor $x-a$ teilen müssten – was natürlich nicht möglich ist. Daher werden wir als Erstes nun die eindimensionale Definition so umschreiben, dass sie sich besser auf die neue Situation übertragen lässt.

**Lemma 25.1** (Differenzierbarkeit als lineare Approximierbarkeit)**.** *Es seien $D \subset \mathbb{K}$ offen, $f\colon D \to \mathbb{K}$ eine Abbildung und $a \in D$. Dann ist $f$ genau dann in $a$ differenzierbar mit Ableitung $c = f'(a) \in \mathbb{K}$, wenn es eine Funktion $r\colon D \to \mathbb{K}$ gibt mit*

(a) $f(x) = f(a) + c\,(x-a) + r(x)$ *für alle $x \in D$, und*

(b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{r(x)}{x-a} = 0.$

*Beweis.* Die Bedingung (a) besagt offensichtlich, dass $r$ die Funktion $r(x) = f(x) - f(a) - c\,(x-a)$ ist. Damit gelten die beiden Bedingungen (a) und (b) genau dann, wenn

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-c\,(x-a)}{x-a} = 0, \quad \text{also} \quad \lim_{x\to a} \left( \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - c \right) = 0$$

ist, d. h. wenn $f$ differenzierbar in $a$ mit Ableitung $c$ ist. □

**Bemerkung 25.2.** Man kann sich die Funktion $r$ in Lemma 25.1 als „Restfunktion“ vorstellen, also als Differenz zwischen der eigentlichen Funktion $f$ und ihrer Näherung $x \mapsto f(a) + c\,(x-a)$ bei $a$. Natürlich erhalten wir aus (a) am gegebenen Punkt $x = a$ in jedem Fall schon einmal $r(a) = 0$. Die Bedingung (b) besagt nun gerade, dass dieser Rest auch „in der Nähe des Punktes $a$ sehr klein“, die Näherung also dort sehr gut ist: Der Quotient $\frac{r(x)}{x-a}$ ist ja bei $a$ von der Form „$\frac{0}{0}$“, und die gegebene Bedingung besagt nun gerade, dass sich hier für $x \to a$ der Zähler $r(x)$ gegen den Nenner $x-a$ durchsetzt. Man sagt dafür auch, dass „die Restfunktion $r$ für $x \to a$ schneller als linear gegen 0 konvergiert“.

Auf den ersten Blick sieht es nun vielleicht so aus, als ob wir mit Lemma 25.1 im Hinblick auf eine Verallgemeinerung auf das Mehrdimensionale noch nicht viel erreicht haben, weil wir in (b) ja immer noch durch $x-a$ dividieren. Dies ist aber nicht so: Die gegebene Bedingung ist ja offensichtlich äquivalent zu $\lim\limits_{x\to a} \frac{r(x)}{|x-a|} = 0$, und dort können wir nun einfach die Betragsstriche durch die Norm ersetzen. Wir erhalten so die folgende Definition der Differenzierbarkeit, die sich von der obigen Bedingung nur dadurch unterscheidet, dass $c$ nun eine $m \times n$-Matrix und $x-a \mapsto c\,(x-a)$ damit eine allgemeine lineare Abbildung vom Startraum $\mathbb{K}^n$ in den Zielraum $\mathbb{K}^m$ (statt wie bisher von $\mathbb{K}$ nach $\mathbb{K}$) ist.

**Definition 25.3** (Differenzierbarkeit in $\mathbb{K}^n$)**.** Es seien $D \subset \mathbb{K}^n$ offen und $a \in D$. Eine Abbildung $f\colon D \to \mathbb{K}^m$ heißt **(total) differenzierbar** in $a$, wenn es eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und eine Abbildung $r\colon D \to \mathbb{K}^m$ gibt, so dass

(a) $f(x) = f(a) + A\,(x-a) + r(x)$ für alle $x \in D$, und

(b) $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} \dfrac{r(x)}{\|x-a\|} = 0.$

Wir werden in Folgerung 25.12 noch sehen, dass die Matrix $A$ (und damit auch $r$) in diesem Fall eindeutig bestimmt ist. Wir nennen sie dann die **(totale) Ableitung** von $f$ in $a$ und bezeichnen sie wie üblich mit $f'(a) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ (in der Literatur ist hierfür auch die Bezeichnung $Df(a)$ üblich, da Matrizen oftmals mit großen Buchstaben bezeichnet werden). Ebenfalls wie im Eindimensionalen werden wir im Grenzwert (b) die Bedingung $x \neq a$ in der Regel nicht hinschreiben, da sie wegen der Division durch $\|x-a\|$ offensichtlich ist.

Die Abbildung $f$ heißt **differenzierbar**, wenn sie in jedem Punkt $a \in D$ differenzierbar ist.

**Bemerkung 25.4.**

(a) Mit dem gleichen Argument wie z. B. bei der Beschränktheit in Bemerkung 23.21 (b) sieht man auch hier, dass Definition 25.3 nicht von der verwendeten Norm abhängt.

(b) Im eindimensionalen Fall $m = n = 1$ stimmt Definition 25.3 aufgrund von Lemma 25.1 offensichtlich mit der alten Definition 10.3 der Differenzierbarkeit überein, wenn wir die $1 \times 1$-Matrix $f'(a)$ als Element von $\mathbb{K}$ auffassen.

(c) Ist $f\colon D \to \mathbb{K}^m$ differenzierbar, so können wir die Ableitung ihrerseits wieder als Funktion

$$f'\colon D \to \mathbb{K}^{m\times n},\ x \mapsto f'(x)$$

auffassen. Beachte allerdings, dass diese Ableitungsfunktion im Gegensatz zum Eindimensionalen zwar die gleiche Startmenge $D$, aber nicht die gleiche Zielmenge wie die ursprüngliche Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}^m$ hat!

**Beispiel 25.5** (Differenzierbarkeit linearer Abbildungen)**.** Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ selbst bereits eine lineare Abbildung, also $f(x) = Ax$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, so gilt $f(x) = f(a) + A(x-a)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Die Bedingungen aus Definition 25.3 sind dann also mit der Nullfunktion als Restfunktion $r$ erfüllt. Also ist $f$ in diesem Fall differenzierbar mit (von $x$ unabhängiger) Ableitung $f'(x) = A$.

**Bemerkung 25.6** (Differenzierbarkeit in normierten Räumen)**.** Genau wie bei unserer Untersuchung linearer Abbildungen in Abschnitt 16.C haben wir den Begriff der Differenzierbarkeit hier zunächst einmal nur für Abbildungen zwischen (Teilmengen von) $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ definiert. Wie ihr euch vielleicht schon denken könnt, ist eine analoge Definition aber genauso in beliebigen normierten Räumen möglich, wobei die Ableitung dann statt einer Matrix eine lineare Abbildung zwischen den gegebenen Räumen ist: Sind $V$ und $W$ normierte Räume und $f\colon D \to W$ eine Abbildung auf einer offenen Teilmenge $D \subset V$, so nennt man $f$ in einem Punkt $a \in D$ *differenzierbar*, wenn es eine *stetige* lineare Abbildung $\Phi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ und eine Abbildung $r\colon D \to W$ gibt mit

(a) $f(x) = f(a) + \Phi(x-a) + r(x)$ für alle $x \in D$, und

(b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{r(x)}{\|x-a\|} = 0.$

Auch in diesem Fall heißt $\Phi$ dann die *Ableitung* $f'(a) \in \mathrm{Hom}(V,W)$ von $f$ in $a$.

Für $V = \mathbb{K}^n$ und $W = \mathbb{K}^m$ ist dies aufgrund des Isomorphismus $\mathbb{K}^{m\times n} \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ aus Folgerung 16.24 (a) offensichtlich äquivalent zu Definition 25.3. Auch für beliebige endlich erzeugte normierte Räume können wir diese neue Definition nach Wahl von Basen von $V$ und $W$ noch auf Definition 25.3 zurückführen, da diese Basen ja Identifikationen von $V$ und $W$ mit $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ erzeugen. Beachte aber, dass dieser verallgemeinerte Begriff der Differenzierbarkeit in nicht endlich erzeugten normierten Räumen in der Regel von den gewählten Normen abhängen wird, und dass die Stetigkeit der linearen Abbildung $f'(a) \in \mathrm{Hom}(V,W)$ dann auch eine echte Bedingung ist (siehe Aufgabe 24.12).

Für den Rest dieser Vorlesung werden wir der Einfachheit halber aber fast ausschließlich mit Abbildungen zwischen Teilmengen von $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ arbeiten, und können die Ableitung solcher Funktionen daher wie in Definition 25.3 als Matrizen schreiben.

Als Erstes wollen wir nun wie im Eindimensionalen (siehe Folgerung 10.7) als einfache Folgerung aus Definition 25.3 sehen, dass jede differenzierbare Funktion auch stetig ist.

**Lemma 25.7.** *Sind $D \subset \mathbb{K}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{K}^m$ eine in einem Punkt $a \in D$ differenzierbare Funktion, so ist $f$ auch stetig in $a$.*

*Beweis.* Erfüllt $f$ die Differenzierbarkeitsbedingung aus Definition 25.3, so gilt

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \Big( f(a) + f'(a) \underbrace{(x-a)}_{\to 0} + \underbrace{\frac{r(x)}{\|x-a\|}}_{\to 0} \underbrace{\|x-a\|}_{\to 0} \Big) = f(a)$$

und damit auch $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, d. h. $f$ ist stetig in $a$. □

Um Beispiele von differenzierbaren Funktionen und Ableitungen angeben zu können, müssen wir uns nun als Nächstes fragen, wie man Ableitungen überhaupt berechnen kann. Beachte, dass dies nicht offensichtlich ist, da Definition 25.3 die Ableitung im Gegensatz zum Eindimensionalen ja nicht über eine konkrete Formel, sondern als eine Matrix mit einer bestimmten Eigenschaft definiert – aber nichts darüber aussagt, wie man eine solche Matrix finden kann. Über das folgende Konzept der Richtungsableitungen können wir dieses Problem auf den uns bekannten eindimensionalen Fall zurückführen.

**Definition 25.8** (Richtungsableitungen und partielle Ableitungen)**.** Es seien $D \subset \mathbb{K}^n$ offen, $a \in D$ und $f\colon D \to \mathbb{K}^m$ eine Abbildung. Ferner wählen wir einen Vektor $v \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$.

(a) Existiert der Grenzwert

$$\partial_v f(a) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \quad \in \mathbb{K}^m,$$

so nennen wir ihn die **Richtungsableitung** von $f$ in $a$ in Richtung $v$. In der Literatur schreibt man hierfür manchmal auch $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$.

(b) Ist speziell $v = e_i$ der $i$-te Einheitsvektor für ein $i \in \{1,\dots,n\}$, so heißt die entsprechende Richtungsableitung

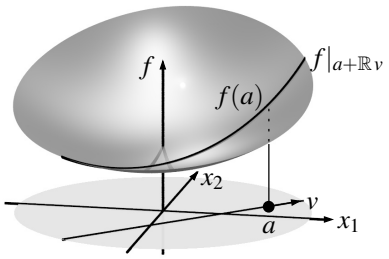
$$\partial_i f(a) := \partial_{e_i} f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_i)-f(a)}{t} \quad \in \mathbb{K}^m$$

die $i$-te **partielle Ableitung** von $f$ in $a$; hierfür ist auch die Schreibweise $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ üblich. Existieren alle diese partiellen Ableitungen (aber nicht notwendig alle Richtungsableitungen) von $f$ in $a$, so nennt man $f$ in $a$ **partiell differenzierbar**.

Die Funktion $f$ heißt *partiell differenzierbar*, wenn sie in jedem Punkt $a \in D$ partiell differenzierbar ist.

**Bemerkung 25.9.**

(a) Im Fall $m = 1$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist die Richtungsableitung leicht geometrisch zu interpretieren: Nach Definition 25.8 (a) ist sie einfach die gewöhnliche Ableitung der Funktion $t \mapsto f(a+tv)$ in einer Variablen $t$ im Punkt 0, also wie im Bild rechts die Steigung der Funktion $f$ im Punkt $a$, wenn man sie auf die Gerade $a+\mathbb{R}v$ durch $a$ mit Richtungsvektor $v$ einschränkt (und $t$ als Koordinate auf dieser Geraden wählt). Die Richtungsableitung $\partial_v f(a)$ gibt also an, wie stark sich $f$ ändert, wenn man sich von $a$ aus ein kleines Stück in Richtung $v$ bewegt.




(b) Im Gegensatz zur (totalen) Ableitung haben die Richtungsableitungen (und damit auch die partiellen Ableitungen) einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}^m$ den Vorteil, dass sie im Fall ihrer Existenz in jedem Punkt selbst wieder Funktionen $\partial_v f\colon D \to \mathbb{K}^m$ mit der gleichen Start- und Zielmenge wie $f$ sind (vergleiche Bemerkung 25.4 (c)).

(c) Im Fall $m = 1$ einer Abbildung mit Zielraum $\mathbb{K}$ lassen sich die partiellen Ableitungen von $f$ leicht mit unseren Rechenregeln aus Kapitel 10 berechnen: Es ist dann nämlich

$$\partial_i f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \left( f\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i+t \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right)$$

genau die gewöhnliche Ableitung von $f$ nach der Variable $x_i$ im Punkt $a_i$, wenn man die übrigen Variablen als konstant ansieht. Aber auch im allgemeinen Fall $m > 1$ ist die Berechnung der partiellen Ableitungen einfach: Da sich der Grenzwert aus Definition 25.8 dann nach Lemma 24.7 koordinatenweise berechnen lässt, ist $\partial_i f(a)$ einfach der Vektor mit Koordinaten $\partial_i f_j(a)$ für $j = 1,\dots,m$, wenn $f_1,\dots,f_m\colon D \to \mathbb{K}$ die Komponentenfunktionen von $f\colon D \to \mathbb{K}^m$ sind.

**Beispiel 25.10.** Um die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 \sin x_2 \end{pmatrix}$$

zu berechnen, müssen wir nach Bemerkung 25.9 (c) einfach nur die Komponentenfunktionen von $f$ nach $x_1$ bzw. $x_2$ differenzieren und dabei jeweils die andere Variable als Konstante ansehen. Wir erhalten also mit den üblichen Rechenregeln aus Kapitel 10

$$\partial_1 f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \sin x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \partial_2 f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \cos x_2 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist $f$ also partiell differenzierbar.

Die partiellen Ableitungen einer Funktion können in der Regel also sehr einfach berechnet werden. Um zu sehen, wie sie uns bei der Bestimmung der totalen Differenzierbarkeit bzw. der Ableitungsmatrix helfen, benötigen wir das folgende einfache Lemma.

**Lemma 25.11** (Richtungsableitungen differenzierbarer Funktionen)**.** *Es seien $D \subset \mathbb{K}^n$ offen, $f\colon D \to \mathbb{K}^m$ eine Funktion, und $a \in D$. Ist $f$ in $a$ differenzierbar, so existiert für jedes $v \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$ die Richtungsableitung $\partial_v f(a)$, und es gilt*

$$\partial_v f(a) = f'(a) \cdot v$$

*(wobei $f'(a) \cdot v$ das Matrixprodukt von $f'(a) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit $v \in \mathbb{K}^n$ ist).*

*Beweis.* Setzen wir die Darstellung $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)$ aus Definition 25.3 an der Stelle $x = a + tv$ in die Formel für die Richtungsableitung aus Definition 25.8 (a) ein, so erhalten wir

$$\partial_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a) + f'(a)(a+tv-a) + r(a+tv) - f(a)}{t} = f'(a) \cdot v + \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{r(a+tv)}{t}}_{(*)}.$$

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass der Grenzwert $(*)$ gleich 0 ist. Dies können wir z. B. mit dem Folgenkriterium tun: Es sei dazu $(t_n)_n$ eine beliebige Nullfolge in $\mathbb{K}\backslash\{0\}$, so dass $x_n := a + t_n v$ für alle $n$ in $D$ liegt. Dann gilt natürlich $x_n \to a$ für $n \to \infty$, und wegen $|t_n| = \frac{\|x_n - a\|}{\|v\|}$ haben wir

$$\lim_{n \to \infty} \frac{r(a+t_n v)}{|t_n|} = \|v\| \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{r(x_n)}{\|x_n - a\|} = 0$$

nach (dem Folgenkriterium aus Satz 24.4 angewendet auf) Bedingung (b) aus Definition 25.3. Wiederum mit dem Folgenkriterium bedeutet dies nun aber $\lim\limits_{t \to 0} \frac{r(a+tv)}{|t|} = 0$ und damit auch $(*) = 0$, was zu zeigen war. □

**Folgerung 25.12** (Differenzierbare Funktionen sind partiell differenzierbar)**.** *Es sei $D \subset \mathbb{K}^n$ offen. Ist eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}^m$ in einem Punkt $a \in D$ (total) differenzierbar, so ist $f$ dort auch partiell differenzierbar, und es gilt*

$$f'(a) = (\partial_1 f(a) \,|\, \cdots \,|\, \partial_n f(a)),$$

*d. h. die Spalten der Ableitungsmatrix $f'(a)$ sind gerade die partiellen Ableitungen von $f$. Insbesondere ist die Ableitung $f'(a)$ also eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Da die partiellen Ableitungen Spezialfälle der Richtungsableitungen sind, folgt die partielle Differenzierbarkeit sofort aus Lemma 25.11. Darüber hinaus ist die $i$-te Spalte der Matrix $f'(a)$ gerade $f'(a) \cdot e_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, nach Lemma 25.11 also gleich $\partial_{e_i} f(a) = \partial_i f(a)$. □

**Definition 25.13** (Jacobi-Matrix)**.** Ist die Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}^m$ mit Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_m\colon D \to \mathbb{K}$ in einem Punkt $a \in D$ partiell differenzierbar, so nennt man die Matrix

$$Jf(a) := (\partial_1 f(a) \,|\, \cdots \,|\, \partial_n f(a)) \;=\; (\partial_j f_i(a))_{i,j} \quad \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

aus Folgerung 25.12 die **Jacobi-Matrix** von $f$ im Punkt $a$. Folgerung 25.12 besagt also gerade, dass die Ableitung einer differenzierbaren Funktion gleich ihrer Jacobi-Matrix sein muss.

**Beispiel 25.14.**

(a) Die Jacobi-Matrix der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 \sin x_2 \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 25.10 existiert in jedem Punkt und ist gleich

$$Jf(x) = (\partial_1 f(x) \,|\, \partial_2 f(x)) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ \sin x_2 & x_1 \cos x_2 \end{pmatrix}.$$

Beachte jedoch, dass dies noch nicht zeigt, dass $f$ auch differenzierbar ist! In der Tat zeigt das folgende Beispiel, dass aus der partiellen Differenzierbarkeit im Allgemeinen noch nicht die totale Differenzierbarkeit folgt, da die partiellen Ableitungen nur das Verhalten von $f$ bei Annäherung entlang der Koordinatenrichtungen an den betrachteten Punkt berücksichtigt.

(b) Wir betrachten noch einmal die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2} & \text{für } (x_1,x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$$

aus Beispiel 24.8. Wir haben dort gesehen, dass $f$ im Nullpunkt nicht stetig, nach Lemma 25.7 also insbesondere auch nicht differenzierbar ist. Dennoch ist $f$ dort partiell differenzierbar: Da $f$ auf den Koordinatenachsen gleich 0 ist, ist natürlich

$$\partial_1 f(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\,e_1) - f(0)}{t} = 0,$$

und genauso $\partial_2 f(0) = 0$. Obwohl also die Jacobi-Matrix $Jf(0) = (0\ \ 0) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ existiert, existiert die Ableitung $f'(0)$ in diesem Fall nicht.

**Algorithmus 25.15** (Differenzierbarkeit einer Abbildung)**.** Mit Folgerung 25.12 können wir nun ein explizites Verfahren angeben, um zu bestimmen, ob eine gegebene Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}^m$ in einem Punkt $a \in D$ differenzierbar ist, und in diesem Fall die Ableitung zu berechnen:

(a) Berechne mit den eindimensionalen Methoden aus Abschnitt 10.A die partiellen Ableitungen von $f$ in $a$, und damit die Jacobi-Matrix $Jf(a) = (\partial_1 f(a) \,|\, \cdots \,|\, \partial_n f(a))$. Existiert eine dieser partiellen Ableitungen nicht, so sind wir fertig: Dann ist $f$ nach Folgerung 25.12 nicht differenzierbar in $a$.

(b) Existiert die Jacobi-Matrix $Jf(a)$, so kommt nach Folgerung 25.12 nur sie als Ableitungsmatrix $f'(a)$ in Frage. Damit muss die Restfunktion in Definition 25.3 (a) gleich $r(x) = f(x) - f(a) - Jf(a)\cdot(x-a)$ sein, und gemäß Definition 25.3 (b) ist $f$ genau dann in $a$ differenzierbar, wenn

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - Jf(a)\cdot(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Diesen Grenzwert können wir genau wie in Abschnitt 24.A bestimmen.

65

**Bemerkung 25.16** (Koordinatenweise Differenzierbarkeit im Zielraum)**.** Ist $f\colon D \to \mathbb{K}^m$ eine in einem Punkt $a \in D$ partiell differenzierbare Funktion mit Jacobi-Matrix $Jf(a)$ und Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_m\colon D \to \mathbb{K}$, so kann die Differenzierbarkeit von $f$ in $a$ in diesen Komponenten separat überprüft werden: Nach Algorithmus 25.15 ist $f$ nämlich genau dann in $a$ differenzierbar, wenn die dort in (b) angegebene Grenzwertbedingung gilt. Dieser Grenzwert kann nach Lemma 24.7 nun aber koordinatenweise in $\mathbb{K}^m$ überprüft werden – d. h. wir erhalten die äquivalenten Bedingungen

$$\lim_{x\to a} \frac{f_i(x) - f_i(a) - Jf_i(a)\cdot(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

für alle $i = 1, \ldots, m$, die genau besagen, dass alle Komponentenfunktionen in $a$ differenzierbar sind. Wie im Fall der Stetigkeit kann die Differenzierbarkeit jedoch nicht koordinatenweise im Startraum überprüft werden.

Auch wenn wir mit Algorithmus 25.15 jetzt eine Möglichkeit haben, eine Abbildung in mehreren Variablen auf Differenzierbarkeit zu prüfen, können die dafür nötigen Rechnungen in der Grenzwertbetrachtung (b) schnell sehr aufwendig werden. Wünschenswert wäre es daher, wenn wir genau wie im Eindimensionalen ein allgemeines Kriterium hätten, das uns auch ohne Rechnung sagt, dass „aus schönen Funktionen zusammengesetzte Abbildungen" immer differenzierbar sind. Ein solches Kriterium wollen wir jetzt beweisen. Da wir hierfür den nur im Reellen gültigen Mittelwertsatz 10.23 brauchen, beschränken wir uns ab jetzt auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

**Satz 25.17** (Stetig partiell differenzierbare Funktionen sind differenzierbar)**.** *Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, und $a \in D$. Wir setzen voraus, dass alle partiellen Ableitungen $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ in einer Umgebung von $a$ existieren und in $a$ stetig sind – man sagt dann auch, dass $f$ in $a$ **stetig partiell differenzierbar** ist.*

*Dann ist $f$ in $a$ auch differenzierbar (mit Ableitung $f'(a) = Jf(a)$).*

*Beweis.* Da sowohl die Stetigkeit als auch die Differenzierbarkeit nach Lemma 24.7 bzw. Bemerkung 25.16 koordinatenweise im Zielraum überprüft werden können, genügt es, den Fall $m = 1$ zu betrachten. Nach Algorithmus 25.15 müssen wir dann die Restfunktion

$$r(x) := f(x) - f(a) - Jf(a) \cdot (x-a) = f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a) \cdot (x_i - a_i) \tag{1}$$

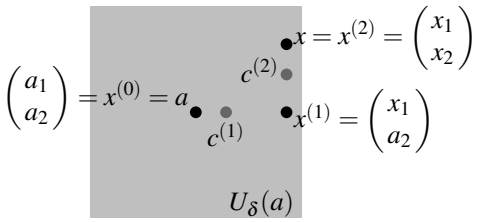
bilden und beweisen, dass $\lim\limits_{x \to a} \frac{r(x)}{\|x-a\|} = 0$ ist.

Wir zeigen dies direkt mit der Definition des Grenzwerts und verwenden dabei die Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^n$. Es sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $D$ offen und die partiellen Ableitungen nach Voraussetzung stetig sind, gibt es dann ein $\delta > 0$, so dass $U_\delta(a) \subset D$ gilt und

$$|\partial_i f(x) - \partial_i f(a)| < \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{für alle } x \in U_\delta(a) \text{ und } i = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Es sei nun $x \in U_\delta(a) \backslash \{a\}$ beliebig. Wie im Bild rechts definieren wir für $i = 0, \dots, n$ dann die Punkte

$$x^{(i)} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in U_\delta(a),$$




so dass also $x^{(0)} = a$ und $x^{(n)} = x$ gilt, und jedes $x^{(i)}$ aus $x^{(i-1)}$ entsteht, indem die $i$-te Koordinate von $a_i$ auf $x_i$ abgeändert wird.

Damit können wir die Restfunktion (1) nun als

$$r(x) = \sum_{i=1}^{n} \left( f(x^{(i)}) - f(x^{(i-1)}) - \partial_i f(a) \cdot (x_i - a_i) \right) \tag{3}$$

umschreiben, da sich in der Summe der ersten beiden Terme alle Funktionswerte außer $f(x)$ und $f(a)$ wegheben. Wenden wir nun den Mittelwertsatz 10.23 (a) für $i = 1, \dots, n$ auf die zwischen $a_i$ und $x_i$ definierten reellwertigen Funktionen einer reellen Variablen

$$g_i\colon t \mapsto f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ t \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{mit Ableitung} \quad g_i'\colon t \mapsto \partial_i f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ t \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

an, so erhalten wir $t_i$ zwischen $a_i$ und $x_i$ und damit wie im Bild oben rechts $c^{(i)}$ auf den Verbindungsstrecken von $a_i$ nach $x_i$ mit

$$f(x^{(i)}) - f(x^{(i-1)}) = g_i(x_i) - g_i(a_i) = g_i'(t_i)\,(x_i - a_i) = \partial_i f(c^{(i)}) \cdot (x_i - a_i).$$

Setzen wir dies in (3) ein und beachten dabei, dass die Punkte $c^{(1)}, \dots, c^{(n)}$ in $U_\delta(a)$ liegen, so folgt daraus nun

$$\begin{aligned} |r(x)| &= \left| \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f(c^{(i)}) - \partial_i f(a)) \cdot (x_i - a_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\partial_i f(c^{(i)}) - \partial_i f(a)| \cdot |x_i - a_i| \\ &\overset{(2)}{<} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} \cdot \|x-a\|_\infty = \varepsilon \cdot \|x-a\|_\infty \end{aligned}$$

und damit $\frac{|r(x)|}{\|x-a\|_\infty} < \varepsilon$, woraus der behauptete Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \frac{r(x)}{\|x-a\|_\infty} = 0$ folgt. □

**Bemerkung 25.18.**

(a) Insbesondere folgt aus Satz 25.17 also, dass alle Abbildungen differenzierbar sind, deren Komponentenfunktionen mit Hilfe der vier Grundrechenarten und Verkettungen aus stetig differenzierbaren Funktionen der Koordinaten des Startraums zusammengesetzt sind – denn für solche Abbildungen existieren ja nach den Rechenregeln aus Kapitel 10 dann alle partiellen Ableitungen und sind stetig. So ist z. B. die Funktion aus den Beispielen 25.10 und 25.14 (a) in jedem Punkt differenzierbar, und genauso die Abbildung aus den Beispielen 24.8 und 25.14 (b) in jedem Punkt mit Ausnahme des Nullpunkts.

(b) Die Umkehrung von Satz 25.17 gilt natürlich nicht – sie ist ja schon im Eindimensionalen falsch, da wir in Aufgabe 10.33 bereits gesehen haben, dass eine differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$ nicht stetig differenzierbar sein muss. Dieses Beispiel lässt sich auch problemlos auf den höherdimensionalen Fall übertragen:

**Aufgabe 25.19** (Differenzierbare Funktionen müssen nicht stetig partiell differenzierbar sein)**.** Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2)\,\sin \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

(total) differenzierbar ist, die partiellen Ableitungen von $f$ aber nicht stetig sind. Berechne auch die Ableitung $f'$!

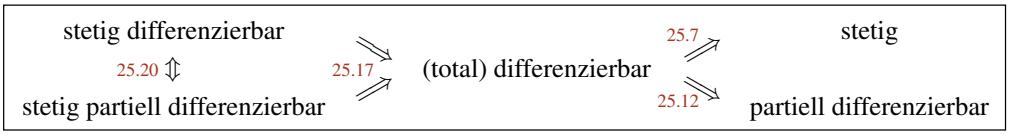
**Bemerkung 25.20** (Stetig differenzierbar = stetig partiell differenzierbar)**.** In Satz 25.17 haben wir eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ auf einer offenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ aus naheliegenden Gründen *stetig partiell differenzierbar* genannt, wenn ihre partiellen Ableitungen existieren und stetig sind.

Genauso natürlich ist allerdings der schon aus Definition 11.7 (b) bekannte Begriff einer **stetig differenzierbaren** Funktion, der besagt, dass $f$ (total) differenzierbar und die Ableitungsfunktion $f'\colon D \to \mathbb{R}^{m \times n}$ stetig ist. Erfreulicherweise sind diese beiden Begriffe aufgrund unserer bisherigen Resultate äquivalent zueinander: Sind $f_1, \dots, f_m\colon D \to \mathbb{R}$ die Komponentenfunktionen von $f$, so gilt

$$\begin{aligned} f \text{ ist stetig differenzierbar} &\Leftrightarrow f \text{ ist differenzierbar und } f'\colon D \to \mathbb{R}^{m\times n} \text{ ist stetig} \\ &\overset{24.7}{\Leftrightarrow} f \text{ ist differenzierbar und alle } \partial_j f_i\colon D \to \mathbb{R} \text{ sind stetig} \\ &\overset{(*)}{\Leftrightarrow} f \text{ ist partiell differenzierbar und alle } \partial_j f_i\colon D \to \mathbb{R} \text{ sind stetig} \\ &\Leftrightarrow f \text{ ist stetig partiell differenzierbar,} \end{aligned}$$

wobei in $(*)$ die Richtung „$\Rightarrow$“ Folgerung 25.12 und die Richtung „$\Leftarrow$“ unser gerade bewiesener Satz 25.17 ist. In der Regel verwendet man daher nur die einfachere der beiden Formulierungen und spricht von *stetig differenzierbaren* Funktionen.

Zusammenfassend haben wir damit nun also die folgenden Äquivalenzen bzw. Implikationen gezeigt (und gesehen, dass andere Implikationen zwischen diesen Begriffen nicht gelten):




**Aufgabe 25.21.** Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \left(1-\cos\frac{x_1^2}{x_2}\right)\cdot\sqrt{x_1^2+x_2^2} & \text{für } x_2 \neq 0, \\ 0 & \text{für } x_2 = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass alle Richtungsableitungen $\partial_v f(0)$ von $f$ im Nullpunkt (mit $v \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$) existieren und gleich 0 sind, aber dass $f$ dort trotzdem nicht differenzierbar ist.

**Aufgabe 25.22.**

(a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Zeige, dass die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^\mathsf{T} A x$$

differenzierbar ist, und berechne ihre Ableitung.

(b) Zeige, dass die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|$ für *keine* Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ mit $n > 0$ differenzierbar ist.

(c) Zeige, dass die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \mapsto \mathbb{R}^{n\times n},\ A \mapsto A^2$ differenzierbar ist, und berechne ihre Ableitung im Sinne von Bemerkung 25.6.

**Aufgabe 25.23.** Es sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Zeige, dass $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_1\, g(x)$ dann im Nullpunkt differenzierbar ist.

**Aufgabe 25.24.** Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, die im Nullpunkt differenzierbar ist.

Man zeige: Gilt $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$, so ist $f$ bereits eine lineare Abbildung.

**Aufgabe 25.25** (*Parameterintegrale*)**.** Es seien $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung auf einer offenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ sowie $[a,b]\times[c,d]$ ein in $D$ enthaltenes Rechteck. Man zeige:

(a) Die Integralfunktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ x_1 \mapsto \displaystyle\int_c^d f(x_1,x_2)\,dx_2$ ist stetig.

(b) Ist $f$ stetig partiell nach $x_1$ differenzierbar, so ist $F$ auf $(a,b)$ differenzierbar mit Ableitung $F'(x_1) = \displaystyle\int_c^d \partial_1 f(x_1,x_2)\,dx_2$ (d. h. Differentiation und Integration nach verschiedenen Variablen können vertauscht werden).

(c) $\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d f(x_1,x_2)\,dx_2\right) dx_1 = \int_c^d \left(\int_a^b f(x_1,x_2)\,dx_1\right) dx_2$ (siehe auch Folgerung **??**).

**Aufgabe 25.26** (*Exponentialfunktion für Matrizen*)**.** Es seien $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $v \in \mathbb{K}^n$. Man zeige:

(a) Der Grenzwert $\mathrm{e}^A := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ existiert in $\mathbb{K}^{n\times n}$.

(b) Die Funktion $f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}^n,\ t \mapsto \mathrm{e}^{At}v$ ist differenzierbar mit Ableitung $f'(t) = A\,\mathrm{e}^{At}v$.

Insbesondere ist $f$ damit also eine Lösung der *Differentialgleichung* $f' = Af$ mit der Anfangsbedingung $f(0) = v$ (siehe auch Aufgabe 20.20).

(Hinweis: Ihr dürft ohne Beweis benutzen, dass diese Exponentialfunktion für kommutierende Matrizen die übliche Funktionalgleichung erfüllt, also insbesondere dass $\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}\mathrm{e}^{At_0}$ gilt. Dies zeigt man genauso wie im eindimensionalen Fall in Folgerung 7.36, indem man das Cauchy-Produkt aus Satz 7.35 von Reihen in $\mathbb{K}$ auf Reihen von Matrizen verallgemeinert.)

## 25.B Eigenschaften differenzierbarer Abbildungen

In diesem Abschnitt wollen wir differenzierbare Abbildungen im Mehrdimensionalen etwas genauer untersuchen und beginnen dazu mit einer geometrischen Deutung für den Fall, dass der Start- oder Zielraum eindimensional ist.

**Bemerkung 25.27** (Geometrische Interpretation der Ableitung bei eindimensionalem Startraum)**.** Ist $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ mit $D \subset \mathbb{R}$ offen, so können wir $f$ als „Kurve in $\mathbb{R}^m$“ ansehen, da $f$ dann durch nur eine reelle Variable parametrisiert wird. Ist $f$ nun differenzierbar in einem Punkt $a \in D$, so ist

$$f(x) \approx h(x) := f(a) + f'(a)\,(x-a)$$

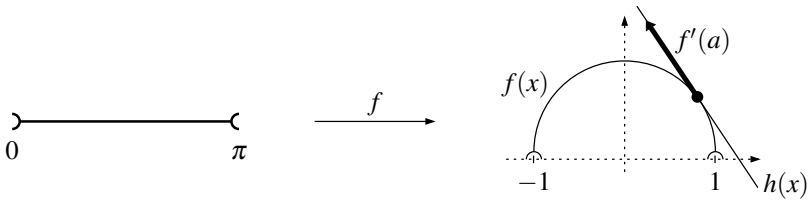
für $x$ in der Nähe von $a$. Offensichtlich ist $h$ die Parameterdarstellung einer Geraden in $\mathbb{R}^m$ mit Aufpunkt $f(a)$ und Richtungsvektor $f'(a) \in \mathbb{R}^{m\times 1} = \mathbb{R}^m$, und wir können uns diese Gerade als diejenige vorstellen, die die Kurve $f$ beim Parameterwert $a$ am besten approximiert. Mit anderen Worten ist $h$ gerade die *Tangente* an die Kurve $f$ im Punkt $a$. Ihr Richtungsvektor $f'(a)$, also die Ableitung von $f$ in $a$, wird daher als **Tangentialvektor** von $f$ in $a$ bezeichnet.

Als konkretes Beispiel können wir wie im Bild unten den Halbkreisbogen

$$f\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix} \quad \text{mit Ableitung} \quad f'\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \begin{pmatrix}-\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}$$

betrachten: Hier ist die Tangente an $f$ im Punkt $a \in (0,\pi)$ wie im folgenden Bild gleich

$$h(x) = \begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\sin a\\ \cos a\end{pmatrix} \cdot (x-a).$$




**Bemerkung 25.28** (Geometrische Interpretation der Ableitung bei eindimensionalem Zielraum)**.** Auch für eine differenzierbare Abbildung $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit offenem $D \subset \mathbb{R}^n$ können wir wieder mit unserer linearen Näherungsgleichung

$$f(x) \approx h(x) := f(a) + f'(a)\,(x-a)$$

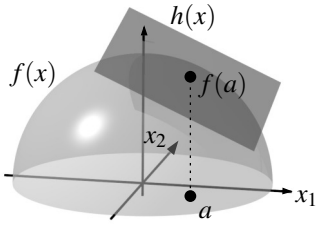
starten. In diesem Fall ist $f'(a)\,(x-a)$ jedoch ein Matrixprodukt einer $1\times n$-Matrix mit einer $n\times 1$-Matrix, und der Graph $\{(x,h(x)) : x \in \mathbb{R}^n\}$ von $h$ ist ein $n$-dimensionaler verschobener Unterraum in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, der den Funktionsgraphen von $f$ im Punkt $a$ möglichst gut annähert.

Im Bild rechts ist dies für die Abbildung

$$f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$$

mit Ableitung

$$f'(x) = \left(-\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \qquad -\frac{x_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}\right)$$




auf dem offenen Einheitskreis $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1\}$ dargestellt, die offensichtlich eine Halbkugeloberfläche beschreibt. Wir können die Näherungsfunktion $h$ hier als die *Tangentialebene* an den Graphen von $f$ auffassen; in höheren Dimensionen $n > 2$ nennt man den durch $h$ parametrisierten verschobenen Unterraum von $\mathbb{R}^n$ den **Tangentialraum** an den Graphen von $f$ im Punkt $a$.

Beachte, dass die Ableitung in diesem Fall ein Zeilenvektor $f'(a) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ ist, der damit zunächst einmal nicht wieder im Startraum $\mathbb{R}^n$ liegt. Man definiert daher im Fall eines eindimensionalen Zielraums in der Regel den **Gradienten** von $f$ als den transponierten Vektor

$$\operatorname{grad} f(a) := f'(a)^\mathsf{T} \quad \in \mathbb{R}^n,$$

so dass sich die obige Näherungsgleichung mit Hilfe des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$ auch als

$$f(x) \approx f(a) + \langle \operatorname{grad} f(a), x-a \rangle$$

schreiben lässt.

In der Tat ermöglicht dies auch noch eine weitere geometrische Interpretation der Ableitung bzw. des Gradienten bei eindimensionalem Zielraum: Mit der Konstruktion 21.22 des Winkels zwischen zwei Vektoren können wir auch

$$f(x) \approx f(a) + \|\operatorname{grad} f(a)\|_2 \cdot \|x-a\|_2 \cdot \cos\varphi$$

schreiben, wobei $\varphi$ den Winkel zwischen den Vektoren $x-a$ und $\operatorname{grad} f(a)$ bezeichnet. Bewegt man sich also von $a$ einen kleinen Schritt der (euklidischen) Länge $\varepsilon$ weg, d. h. geht man zu einem $x \in D$ mit $\|x-a\|_2 = \varepsilon$, so erzeugt dies in $f$ näherungsweise eine Änderung von

$$\|\operatorname{grad} f(a)\|_2 \cdot \varepsilon \cdot \cos\varphi,$$

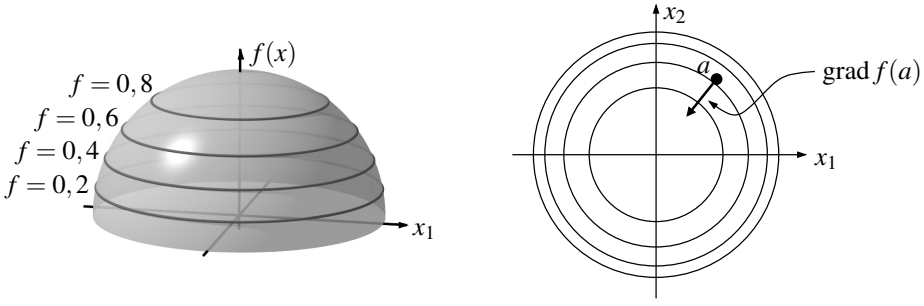
was (für festes $\varepsilon$) maximal wird für $\cos\varphi = 1$, d. h. für $\varphi = 0$, also wenn der gemachte Schritt $x-a$ und $\operatorname{grad} f(a)$ in dieselbe Richtung zeigen. Da die Änderung von $f$ in diesem Fall in etwa gleich $\|\operatorname{grad} f(a)\|_2 \cdot \varepsilon$ ist, können wir den Gradienten also wie folgt geometrisch interpretieren:

> Die *Richtung* von $\operatorname{grad} f(a)$ ist die Richtung des stärksten Anstiegs von $f$ im Punkt $a$.
> Der *Betrag* von $\operatorname{grad} f(a)$ ist die Stärke des Anstiegs von $f$ in dieser Richtung.

Das Bild unten zeigt diesen Sachverhalt für die eben als Beispiel betrachtete Funktion. Sowohl im dreidimensionalen Bild links als auch im zweidimensionalen Bild rechts sind wie auf einer Landkarte die sogenannten *Höhenlinien* von $f$ eingezeichnet – also die Kurven, auf denen $f$ konstant ist. Der dort eingezeichnete Gradient ist ein Vektor, der in unserem Fall mit

$$\operatorname{grad} f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \cdot x$$

direkt zum Nullpunkt hin zeigt – also in die Richtung, in der $f$ an dieser Stelle am stärksten ansteigt.




Wir wollen nun noch die Rechenregeln für Ableitungen aus Kapitel 10 so weit wie möglich auf den mehrdimensionalen Fall übertragen. Auch wenn wir unsere Berechnungen durch koordinatenweise Betrachtungen mit Hilfe der partiellen Ableitungen in den meisten Fällen bereits auf den eindimensionalen Fall zurückführen können, sind in der Praxis auch Rechenregeln nützlich, die direkt mit den Ableitungsmatrizen arbeiten und die koordinatenweise Berechnung der Ableitungen damit umgehen können.

Die folgende Aussage entspricht nahezu wörtlich der von Satz 10.8. Beachte aber, dass die Ableitungen jetzt *Matrizen* sind und keine einfachen Zahlen mehr. Wegen der neuen Definition der Differenzierbarkeit können die Beweise aus dem eindimensionalen Fall auch nicht einfach übernommen werden.

**Satz 25.29** (Rechenregeln für Ableitungen)**.** *Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f,g\colon D \to \mathbb{R}^m$ zwei Abbildungen, die in einem Punkt $a \in D$ differenzierbar sind. Dann gilt:*

(a) *$f \pm g$ ist differenzierbar in $a$ mit $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$.*

(b) *Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda f$ differenzierbar in $a$ mit $(\lambda f)'(a) = \lambda\, f'(a)$.*

*Im Fall $m = 1$, wenn Multiplikation und Division der Funktionen ebenfalls möglich sind, gilt zusätzlich:*

(c) ***(Produktregel)*** *$fg$ ist differenzierbar in $a$ mit $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*

(d) ***(Quotientenregel)*** *Ist $g(a) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar in $a$ mit $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.*

*Beweis.* Nach Definition 25.3 der Differenzierbarkeit können wir $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)$ und $g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + s(x)$ mit $\frac{r(x)}{\|x-a\|} \to 0$ und $\frac{s(x)}{\|x-a\|} \to 0$ für $x \to a$ schreiben.

(a) Addition der beiden Ausdrücke für $f(x)$ und $g(x)$ liefert

$$(f+g)(x) = (f+g)(a) + (f'(a) + g'(a))(x-a) + r(x) + s(x).$$

Wegen

$$\lim_{x\to a} \frac{r(x)+s(x)}{\|x-a\|} = \lim_{x\to a} \frac{r(x)}{\|x-a\|} + \lim_{x\to a} \frac{s(x)}{\|x-a\|} = 0$$

ergibt sich also wiederum mit Definition 25.3, dass $f'(a) + g'(a)$ die Ableitung von $f+g$ in $a$ ist. Die Aussagen für die Differenz $f-g$ sowie für $\lambda f$ in (b) zeigt man natürlich genauso. 66

(c) Hier ergibt die Multiplikation

$$\begin{aligned}(fg)(x) = (fg)(a) &+ (f'(a)g(a) + f(a)g'(a))(x-a) \\ &+ \underbrace{(f'(a)(x-a))(g'(a)(x-a))}_{\text{(A)}} + \underbrace{(\text{Terme mit } r(x) \text{ und / oder } s(x))}_{\text{(B)}}.\end{aligned}$$

Beachte, dass der Ausdruck $f'(a)(x-a)$ in (A) die Multiplikation einer $(1\times n)$-Matrix mit einer $(n\times 1)$-Matrix ist, die wir daher auch mit Hilfe des Gradienten und des Standardskalarprodukts als $\langle \operatorname{grad} f(a), x-a\rangle$ schreiben können (siehe Bemerkung 25.28). Analog gilt dies für $g'(a)(x-a)$, und damit folgt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung aus Satz 21.19

$$|(\text{A})| \le \|\operatorname{grad} f(a)\|_2 \cdot \|\operatorname{grad} g(a)\|_2 \cdot \|x-a\|_2^2, \quad \text{d. h.} \quad \frac{(\text{A})}{\|x-a\|_2} \to 0 \text{ für } x \to a.$$

Genauso gilt wegen der enthaltenen Faktoren $r(x)$ bzw. $s(x)$ natürlich $\frac{(\text{B})}{\|x-a\|} \to 0$ für $x \to a$. Also können wir hier (A)+(B) als Restterm auffassen, so dass mit Definition 25.3 folgt, dass $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ die Ableitung von $fg$ in $a$ ist.

Der Beweis von (d) verläuft ganz analog und soll daher hier nicht gegeben werden. □

Auch die Kettenregel (siehe Satz 10.10) überträgt sich wie erwartet ins Mehrdimensionale.

**Satz 25.30** (**Kettenregel**)**.** *Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ und $D' \subset \mathbb{R}^m$ offen. Ferner seien $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ und $g\colon D' \to \mathbb{R}^p$ Abbildungen mit $f(D) \subset D'$. Ist dann $f$ differenzierbar in $a \in D$ und $g$ differenzierbar in $f(a)$, so ist auch die Verkettung $g \circ f$ differenzierbar in $a$, und es gilt*

$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a),$$

*d. h. „die Ableitung einer Verkettung ist das Produkt der beiden Ableitungen“. (Beachte, dass es sich hierbei um ein Matrixprodukt einer $p\times m$-Matrix mit einer $m\times n$-Matrix handelt, das wie gewünscht eine $p\times n$-Matrix als Ableitung von $g\circ f$ liefert – insbesondere ist die Reihenfolge der beiden Faktoren hier also wichtig!)*

*Beweis.* Wegen der Differenzierbarkeit von $f$ in $a$ und $g$ in $f(a)$ gibt es nach Definition 25.3 Funktionen $r\colon D \to \mathbb{R}^m$ und $s\colon D' \to \mathbb{R}^p$ mit

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + r(x) \tag{1}$$

$$\text{und} \qquad g(y) = g(f(a)) + g'(f(a))\,(y-f(a)) + s(y) \tag{2}$$

sowie $\lim\limits_{x\to a} \frac{r(x)}{\|x-a\|} = 0$ und $\lim\limits_{y\to f(a)} \frac{s(y)}{\|y-f(a)\|} = 0$. Insbesondere können wir also die Funktion

$$\tilde{s}\colon D'\backslash\{f(a)\} \to \mathbb{R}^p,\ y \mapsto \frac{s(y)}{\|y-f(a)\|}$$

durch $\tilde{s}(f(a)) := 0$ zu einer stetigen Funktion auf ganz $D'$ fortsetzen und damit statt (2) auch

$$g(y) = g(f(a)) + g'(f(a))\,(y-f(a)) + \tilde{s}(y)\cdot\|y-f(a)\|$$

für alle $y \in D'$ schreiben. Setzen wir hier nun $y = f(x)$ ein, so ergibt sich mit (1)

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))\,(f(x)-f(a)) + \tilde{s}(f(x))\cdot\|f(x)-f(a)\| \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))\,f'(a)\,(x-a) + \underbrace{g'(f(a))\,r(x) + \tilde{s}(f(x))\cdot\|f'(a)\,(x-a)+r(x)\|}_{=:R(x)} \end{aligned}$$

für alle $x \in D$. Verwenden wir für die auftretenden Matrizen die von der gewählten Vektornorm induzierte Matrixnorm, so können wir den Restterm $R$ mit Folgerung 24.39 nun abschätzen durch

$$\frac{\|R(x)\|}{\|x-a\|} \le \|g'(f(a))\| \cdot \underbrace{\frac{\|r(x)\|}{\|x-a\|}}_{\to 0} + \underbrace{\|\tilde{s}(f(x))\|}_{\to 0} \cdot \|f'(a)\| \cdot \frac{\|x-a\|}{\|x-a\|} + \underbrace{\|\tilde{s}(f(x))\|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\|r(x)\|}{\|x-a\|}}_{\to 0},$$

wobei die markierten Terme für $x \to a$ gegen 0 konvergieren (beachte dabei für den Term $\tilde{s}(f(x))$, dass $f$ stetig in $a$ und $\tilde{s}$ stetig in $f(a)$ ist, so dass $\tilde{s}(f(x))$ mit $x \to a$ gegen $\tilde{s}(f(a)) = 0$ konvergiert). Also gilt $\lim\limits_{x\to a} \frac{\|R(x)\|}{\|x-a\|} = 0$ und damit auch $\lim\limits_{x\to a} \frac{R(x)}{\|x-a\|} = 0$. Die Aussage des Satzes folgt damit aus Definition 25.3. □

**Bemerkung 25.31.** Auch ohne sich den genauen Beweis von Satz 25.30 anzusehen, ist einfach zu verstehen, warum bei der Formel für die Ableitung einer Verkettung Matrixprodukte auftreten: Die Ableitungen können wir ja gerade als lineare Näherungen der gegebenen Funktionen betrachten – und lineare Funktionen werden nach Folgerung 16.24 (b) verkettet, indem man die zugehörigen Matrizen miteinander multipliziert. In Formeln bedeutet dies unter Vernachlässigung der Restterme folgendes: Können wir als lineare Näherungen

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) \quad \text{und} \quad g(f(x)) \approx g(f(a)) + g'(f(a))(f(x)-f(a))$$

schreiben, so ergibt sich daraus durch Einsetzen

$$g(f(x)) \approx g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(x-a),$$

d. h. $g'(f(a))f'(a)$ ist die Ableitung von $g \circ f$ in $a$. (Die genaue Behandlung der Restterme, also die Präzisierung des Zeichens „≈“, ist dann natürlich die eigentliche Arbeit beim Beweis.)

**Beispiel 25.32.**

(a) Wir betrachten noch einmal die geometrische Deutung der Ableitung bei eindimensionalem Zielraum aus Bemerkung 25.28. Es seien dazu $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, und $\gamma\colon (a,b) \to D$ eine differenzierbare Höhenlinie von $f$, d. h. so dass $f \circ \gamma\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ konstant ist. Dann ist die Ableitung dieser Verkettung natürlich in jedem Punkt $t \in (a,b)$ gleich 0, und wir erhalten somit nach Satz 25.30

$$0 = (f\circ\gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \big\langle \operatorname{grad} f(\gamma(t)), \gamma'(t) \big\rangle$$

mit dem Standardskalarprodukt. Also ist $\operatorname{grad} f(\gamma(t)) \perp \gamma'(t)$, d. h. der Gradient von $f$ steht in jedem Punkt senkrecht auf (dem Tangentialvektor) der Höhenlinie durch diesen Punkt. Diese Tatsache, die wir im Beispiel von Bemerkung 25.28 auch sofort im Höhenlinienbild

erkennen können, ist natürlich jedem bekannt, der schon einmal eine Landkarte mit Höhenlinien benutzt hat: Um möglichst schnell nach oben zu kommen, also in Richtung des Gradienten zu laufen, geht man am besten senkrecht zu den Höhenlinien.

(b) Es sei $f$ die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_1^x \frac{\sin(xt)}{t}\,dt.$$

Offensichtlich handelt es sich hierbei um eine Funktion mit eindimensionaler Start- und Zielmenge, wie wir sie schon vor langer Zeit betrachtet haben. Man kann zeigen, dass dieses Integral nicht mit den uns bekannten speziellen Funktionen aus Kapitel 9 berechenbar ist, so dass wir $f$ nicht auf einfachere Art hinschreiben können. Dennoch können wir aber die Ableitung von $f$ mit der *mehrdimensionalen* Kettenregel konkret bestimmen: Dazu schreiben wir $f = g \circ h$ mit

$$g\colon \mathbb{R}^2_{>0} \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \int_1^{x_1} \frac{\sin(x_2 t)}{t}\,dt \quad \text{und} \quad h\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}.$$

Dann lässt sich $g$ (und natürlich auch $h$) problemlos differenzieren: Nach dem Hauptsatz 12.21 der Differential- und Integralrechnung liefert die Ableitung des Integrals nach seiner Obergrenze gerade

$$\partial_1 g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{\sin(x_2 x_1)}{x_1}.$$

Die partielle Ableitung $\partial_2 g$ dagegen lässt sich nach Aufgabe 25.25 unter dem Integral berechnen, so dass wir dafür

$$\partial_2 g = \int_1^{x_1} \partial_2 \left( \frac{\sin(x_2 t)}{t} \right) dt = \int_1^{x_1} \cos(x_2 t)\,dt = \frac{1}{x_2}\left(\sin(x_2 x_1) - \sin x_2\right)$$

erhalten. Beide partiellen Ableitungen sind offensichtlich stetig, so dass $g$ nach Satz 25.17 differenzierbar ist. Damit ergibt die Kettenregel aus Satz 25.30

$$\begin{aligned} f'(x) = g'(h(x))\,h'(x) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\sin(x^2)}{x} & \dfrac{\sin(x^2) - \sin x}{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2\sin(x^2) - \sin x}{x}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 25.33.** Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $n \geq 2$ eine differenzierbare Funktion. Man zeige:

(a) Hängt $f$ nur von $\|x\|_2$ ab, ist also $f(x) = g(\|x\|_2)$ für eine differenzierbare Funktion $g\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ (man sagt auch: $f$ ist *kugelsymmetrisch*), so ist

$$\operatorname{grad} f(x) = \frac{g'(\|x\|_2)}{\|x\|_2} \cdot x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

(b) Gibt es umgekehrt eine Funktion $h\colon \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} f(x) = h(x) \cdot x$ für alle $x$, so ist $f$ kugelsymmetrisch. (Hinweis: Zeige, dass $f$ entlang eines beliebigen Weges auf einer Kugeloberfläche konstant ist.)

# 26. Höhere Ableitungen

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, wie man für Abbildungen zwischen mehrdimensionalen Räumen das Konzept der Differenzierbarkeit definieren und für differenzierbare Abbildungen die Ableitung berechnen kann. Analog zum eindimensionalen Fall ist eine der wichtigsten Anwendungen dieser Theorie, (lokale) Extremwerte von Funktionen zu bestimmen. Wir wollen in diesem Kapitel untersuchen, wie dies im Mehrdimensionalen funktioniert. Wie in Satz 11.18 werden wir dazu höhere Ableitungen und die Taylor-Formel benötigen, die wir daher zuerst behandeln müssen.

Um von Extremwerten überhaupt sprechen zu können, müssen wir natürlich Funktionswerte miteinander vergleichen können – was nur geht, wenn der Zielraum der betrachteten Funktionen die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist. „Mehrdimensional" bedeutet im Zusammenhang mit Extremwerten also nur, dass die *Definitionsmenge* unserer Abbildungen eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.

Hier ist zunächst einmal die exakte Definition von Extrema, die im Prinzip genauso ist wie im Eindimensionalen in Definition 10.18.

**Definition 26.1** (Extrema)**.** Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$. Man sagt, ...

(a) $f$ habe in $a$ ein **(globales) Maximum**, wenn $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in D$.

(b) $f$ habe in $a$ ein **lokales Maximum**, wenn es eine Umgebung $U$ von $a$ gibt mit $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in U$. Gilt sogar $f(a) > f(x)$ für alle $x \in U$ mit $x \neq a$, so nennt man das lokale Maximum **isoliert**.

Analog definiert man globale und lokale (isolierte) **Minima**. Hat $f$ in $a$ ein (globales, lokales, isoliertes) Maximum oder Minimum, so sagt man auch, dass $f$ dort ein (globales, lokales, isoliertes) **Extremum** hat.

Einfach zu sehen ist genau wie im Eindimensionalen (siehe Lemma 10.20), dass die (erste) Ableitung einer Funktion ein einfaches *notwendiges* Kriterium für ein lokales Extremum liefert, das nicht auf dem Rand der Definitionsmenge liegt:

**Lemma 26.2** (Notwendige Bedingung für Extrema)**.** *Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Hat $f$ dann in einem Punkt $a \in \mathring{D}$ im Inneren der Definitionsmenge ein lokales Extremum und ist $f$ dort differenzierbar, so gilt $f'(a) = 0$.*

*Wie im Eindimensionalen in Bemerkung 10.21 (a) werden Punkte $a \in \mathring{D}$ mit $f'(a) = 0$ als **kritische Punkte** bezeichnet.*

*Beweis.* Es sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Wegen $a \in \mathring{D}$ ist die reellwertige Funktion $g\colon t \mapsto f(a + te_i)$ einer reellen Variablen $t$ in einer Umgebung von 0 definiert, und hat dort natürlich ebenfalls ein lokales Extremum. Nach Lemma 10.20 ist also

$$0 = g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} = \partial_i f(a),$$

und damit wie behauptet $f'(a) = (\partial_1 f(a) \,|\, \cdots \,|\, \partial_n f(a)) = 0$. □

**Beispiel 26.3.** Wir wollen die (lokalen) Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) = (x_1 + x_2)^2 + e^{x_1^2}$$

finden. Nach Bemerkung 25.18 (a) ist $f$ differenzierbar mit

$$f'(x) = (2(x_1 + x_2) + 2x_1 e^{x_1^2} \quad 2(x_1 + x_2)).$$

Ein notwendiges Kriterium für ein lokales Extremum am Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ ist also

$$2(x_1 + x_2) + 2x_1 e^{x_1^2} = 0 \quad \text{und} \quad 2(x_1 + x_2) = 0,$$

was offensichtlich nur für $x_1 = x_2 = 0$, also im Nullpunkt erfüllt ist. In der Tat kann man in diesem Fall einfach sehen, dass im Nullpunkt ein (sogar globales) Minimum vorliegt, denn für alle $x \in \mathbb{R}^2$ ist ja

$$f(x) = (x_1 + x_2)^2 + e^{x_1^2} \geq 0 + 1 = 1 = f(0).$$

**Bemerkung 26.4.** Bis hierher funktioniert die Extremwertberechnung also genau wie im Eindimensionalen. Es stellen sich nun natürlich sofort die folgenden Fragen:

(a) Wie kann man von einem Punkt $a \in \mathring{D}$ mit $f'(a) = 0$ möglichst einfach überprüfen, ob dort wirklich ein lokales Extremum vorliegt, d. h. welche *hinreichenden* Kriterien für lokale Extrema gibt es? Wie bereits angekündigt werden wir hierfür höhere Ableitungen und eine mehrdimensionale Taylor-Entwicklung benötigen, die wir in diesem Kapitel untersuchen werden.

(b) Wie kann man Extrema am *Rand* der Definitionsmenge $D$ finden, wenn $D$ nicht offen ist? Betrachten wir z. B. die Funktion $f$ aus Beispiel 26.3 auf dem abgeschlossenen Einheitskreis $K_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$, so muss $f$ dort nach Folgerung 24.35 irgendwo ein Maximum annehmen – und da wir außer dem Minimum bei 0 keine weiteren Stellen gefunden haben, an denen die Ableitung von $f$ verschwindet, muss dieses Maximum auf dem Rand des Einheitskreises liegen. Im Gegensatz zum Eindimensionalen besteht dieser Rand jetzt aber nicht mehr nur aus zwei Punkten, sondern aus einem in diesem Fall selbst eindimensionalen Objekt, nämlich der Einheitskreislinie. Wir können also nicht mehr einfach alle Randpunkte in $f$ einsetzen, um das Maximum zu finden, sondern brauchen ein geschickteres Verfahren, um Randextrema zu finden. Dies wird der Inhalt von Abschnitt **??** sein.

## 26.A Die mehrdimensionale Taylor-Entwicklung

Zur Einführung höherer Ableitungen, die wir für die Taylor-Entwicklung benötigen werden, gibt es zwei ganz unterschiedliche Herangehensweisen:

**Bemerkung 26.5** (Höhere Ableitungen)**.** Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.

(a) Ist $f$ differenzierbar, so ist die Ableitung von $f$ nach den Bemerkungen 25.4 (c) und 25.6 eine Funktion $f'\colon D \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{m\times n}$, also selbst wieder eine Funktion zwischen (offenen Teilmengen von) normierten Räumen – für die wir ja definiert haben, was Differenzierbarkeit bedeutet. Es liegt also eigentlich nichts näher als zu sagen, dass $f$ zweimal differenzierbar heißt, wenn $f'$ selbst wieder differenzierbar ist, und $f''$ dann als die Ableitung von $f'$ zu definieren. Da $f'$ eine Abbildung von $D \subset \mathbb{R}^n$ nach $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist, ist $f''$ nach Bemerkung 25.6 dann eine Abbildung

$$f''\colon D \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)).$$

Dies kann man natürlich fortsetzen, und erhält (im Fall der Existenz) z. B. als dritte Ableitung von $f$ eine Abbildung

$$f'''\colon D \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))).$$

Alternativ könnte man hierfür die Tensorprodukte aus Abschnitt 21.E verwenden: Analog zu Beispiel 21.59 (b) kann man zeigen, dass $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, V)$ für jeden reellen Vektorraum $V$ auf natürliche Art isomorph zu $V \otimes (\mathbb{R}^n)^*$ ist, und dementsprechend könnte man für einen Punkt $a \in D$ z. B. $f''(a)$ als Element von $\mathbb{R}^m \otimes (\mathbb{R}^n)^* \otimes (\mathbb{R}^n)^*$ und $f'''(a)$ als Element von $\mathbb{R}^m \otimes (\mathbb{R}^n)^* \otimes (\mathbb{R}^n)^* \otimes (\mathbb{R}^n)^*$ auffassen.

So oder so – auch wenn dies eigentlich die natürlichste Art der Definition höherer Ableitungen im mehrdimensionalen Fall ist, sollte hieraus schon ersichtlich sein, dass es sich dabei allein schon von der Notation her nicht unbedingt um die bequemste Art handelt. Wir werden im Folgenden daher einen anderen Ansatz verfolgen:

(b) Da die Spalten der Ableitungsmatrix von $f$ gerade die partiellen Ableitungen sind, können wir zur Betrachtung $k$-facher Ableitungen auch einfach mehrfache partielle Ableitungen der Form $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f$ betrachten. Diese haben im Gegensatz zum Ansatz aus (a) den großen Vorteil, im Fall ihrer Existenz selbst wieder Funktionen von $D$ nach $\mathbb{R}^m$ zu sein – ihr Nachteil besteht lediglich darin, dass es nicht nur eine, sondern $n^k$ solcher $k$-fachen partiellen Ableitungen gibt, da wir bei jeder der $k$ Differentiationen wieder eine der $n$ Variablen auswählen müssen.

67

Man kann allerdings zumindest hoffen, dass es bei derartigen mehrfachen partiellen Ableitungen nicht auf die Reihenfolge der Ableitungen ankommt. Der folgende Satz besagt, dass dies in den meisten Fällen auch wirklich so ist.

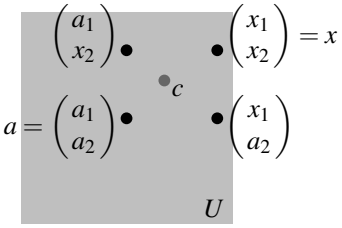
**Satz 26.6** (**Satz von Schwarz**: Vertauschbarkeit partieller Ableitungen)**.** *Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, für die die zweifachen partiellen Ableitungen $\partial_i \partial_j f$ für gewisse $i, j \in \{1, \dots, n\}$ auf $D$ existieren und in einem Punkt $a \in D$ stetig sind. Dann gilt $\partial_i \partial_j f(a) = \partial_j \partial_i f(a)$.*

*Beweis.* Wir können ohne Einschränkung $m = 1$ annehmen, da man sonst jede Komponentenfunktion von $f$ einzeln betrachten kann. Weiterhin können wir natürlich $i \neq j$ voraussetzen und alle Variablen außer $x_i$ und $x_j$ als konstante Parameter betrachten. Nach Umbenennung der Variablen können wir uns daher auf den Fall $n = 2$, $i = 1$ und $j = 2$ beschränken.

Da $D$ offen ist, können wir eine offene Kugel $U$ um $a$ in der Maximumsnorm wählen, die noch ganz in $D$ liegt. Für einen Punkt $x \in U$ mit $x_1 \neq a_1$ und $x_2 \neq a_2$ betrachten wir nun den „doppelten Differenzenquotienten“

$$Q(x) := \frac{f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} a_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}{(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)},$$

der sich aus den Funktionswerten von $f$ an den vier Eckpunkten des Rechtecks wie im Bild rechts ergibt. Wir wollen zeigen, dass $Q(x)$ für $x \to a$ sowohl gegen $\partial_1 \partial_2 f(a)$ als auch gegen $\partial_2 \partial_1 f(a)$ konvergiert, woraus dann die Behauptung folgt.




Dazu wenden wir zunächst den Mittelwertsatz 10.23 (a) auf die zwischen $a_2$ und $x_2$ definierte reellwertige Funktion

$$g\colon t \mapsto f\begin{pmatrix} x_1 \\ t \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} a_1 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad g'\colon t \mapsto \partial_2 f\begin{pmatrix} x_1 \\ t \end{pmatrix} - \partial_2 f\begin{pmatrix} a_1 \\ t \end{pmatrix}$$

an und erhalten ein $c_2$ zwischen $a_2$ und $x_2$ mit

$$Q(x) = \frac{g(x_2) - g(a_2)}{(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)} = \frac{g'(c_2)}{x_1 - a_1} = \frac{\partial_2 f\begin{pmatrix} x_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \partial_2 f\begin{pmatrix} a_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}{x_1 - a_1}.$$

Nun wenden wir den Mittelwertsatz erneut auf die zwischen $a_1$ und $x_1$ definierte Funktion

$$h\colon t \mapsto \partial_2 f\begin{pmatrix} t \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad h'\colon t \mapsto \partial_1 \partial_2 f\begin{pmatrix} t \\ c_2 \end{pmatrix}$$

an und erhalten so ein $c_1$ zwischen $a_1$ und $x_1$ mit

$$Q(x) = \frac{h(x_1) - h(a_1)}{x_1 - a_1} = h'(c_1) = \partial_1 \partial_2 f(c)$$

für ein $c \in U$ wie im Bild oben rechts, dessen Koordinaten zwischen $a_1$ und $x_1$ bzw. $a_2$ und $x_2$ liegen.

Mit $x \to a$ gilt nun auch $c \to a$, und damit erhalten wir wie behauptet wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $\partial_1 \partial_2 f$

$$\lim_{x \to a} Q(x) = \lim_{c \to a} \partial_1 \partial_2 f(c) = \partial_1 \partial_2 f(a).$$

Der Ausdruck $Q(x)$ ist aber symmetrisch in den beiden Koordinaten des Startraums, und daher ergibt sich mit genau dem gleichen Argument (nur indem man den Mittelwertsatz zuerst auf die erste und

dann auf die zweite Koordinate anwendet) auch $\lim_{x\to a} Q(x) = \partial_2\partial_1 f(a)$. Die Behauptung folgt damit aus der Eindeutigkeit des Grenzwerts. □

Die Vertauschbarkeit partieller Ableitungen ist also gewährleistet, wenn die partiellen Ableitungen existieren *und stetig sind*. Dass man auf diese Zusatzforderung der Stetigkeit leider nicht verzichten kann, zeigt die folgende Aufgabe:

**Aufgabe 26.7** (Partielle Ableitungen müssen nicht miteinander vertauschen)**.** Zeige, dass die partiellen Ableitungen $\partial_1\partial_2 f$ und $\partial_2\partial_1 f$ der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

zwar existieren, aber nicht übereinstimmen.

Um die Probleme solcher nicht miteinander vertauschbaren Ableitungen zu umgehen, wollen wir uns daher ab jetzt auf Abbildungen beschränken, deren partielle Ableitungen nicht nur existieren, sondern auch stetig sind.

**Definition 26.8** (Mehrfach stetig differenzierbare Funktionen)**.** Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung auf einer offenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$. Für $r \geq 0$ sagt man, $f$ sei **$r$-mal stetig differenzierbar** oder **$r$-mal stetig partiell differenzierbar**, wenn alle $r$-fachen partiellen Ableitungen $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_r} f$ für $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, n\}$ auf $D$ existieren und stetig sind. Man schreibt diese Ableitungen auch als

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}}$$

bzw. bei mehrfachen Ableitungen nach derselben Variablen in „Potenzschreibweise“, d. h. z. B. als

$$\partial_1^2 f \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$$

für die zweifache partielle Ableitung nach $x_1$. Im Fall $m = 1$ eines eindimensionalen Zielraums schreibt man die Menge aller $r$-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $D$ wie in Definition 11.7 als $C^r(D)$.

**Bemerkung 26.9.**

(a) In Bemerkung 25.20 hatten wir bereits gesehen, dass im Fall $r = 1$ die Begriffe „(einmal) stetig differenzierbar“ und „(einmal) stetig partiell differenzierbar“ zusammenfallen, wenn man sie auf die natürliche Art definiert. Man kann zeigen, dass dieselbe Aussage auch für höhere Ableitungen gilt, wenn man „$r$-mal stetig differenzierbar“ als Stetigkeit der $r$-ten Ableitung wie in Bemerkung 26.5 (a) und „$r$-mal stetig partiell differenzierbar“ wie in Definition 26.8 interpretiert. Da wir mit den höheren Ableitungen wie in Bemerkung 26.5 (a) hier nicht arbeiten werden, wollen wir dies hier allerdings nicht beweisen, und erwähnen diese Tatsache nur als Motivation dafür, dass wir die Begriffe „$r$-mal stetig differenzierbar“ und „$r$-mal stetig partiell differenzierbar“ oben als gleichwertig definiert haben.

(b) Ist $f$ eine $r$-mal stetig differenzierbare Funktion wie in Definition 26.8, so sind nicht nur die partiellen Ableitungen der Stufe $r$, sondern auch die aller Stufen $k \leq r$ stetig: Da die partiellen Ableitungen $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_r} f$ nach Voraussetzung stetig sind, sind die $(r-1)$-fachen partiellen Ableitungen $\partial_{i_2} \cdots \partial_{i_r} f$ stetig partiell differenzierbar, nach Satz 25.17 und Lemma 25.7 also auch total differenzierbar und damit stetig. Mit Induktion sind demnach dann auch alle niedrigeren partiellen Ableitungen stetig.

(c) Nach (b) und dem Satz 26.6 von Schwarz kommt es bei bis zu $r$-fachen partiellen Ableitungen einer $r$-fach stetig differenzierbaren Funktion nicht auf die Reihenfolge dieser Ableitungen an, da man in einem Ausdruck der Form $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f$ (mit $k \leq r$) durch fortgesetztes Vertauschen zweier benachbarter partieller Ableitungen jede andere Reihenfolge erzeugen kann.

**Aufgabe 26.10.** Es sei $f$ die in einer Umgebung des Ursprungs von $\mathbb{R}^2$ definierte reellwertige Funktion mit

$$f(x) = \frac{\cos(x_1^5 + x_2^5)}{1 - x_1^3 - x_2^3}.$$

Berechne mit einer geeigneten Potenzreihenentwicklung (und ohne Computer) die partielle Ableitung $\partial_1^{11} \partial_2^8 f(0)$.

Mit Hilfe dieser höheren Ableitungen können wir nun zur Verallgemeinerung der Taylor-Formel aus Satz 11.13 auf den mehrdimensionalen Fall kommen. Damit das darin auftretende Taylor-Polynom formal analog zum eindimensionalen Fall aussieht, führen wir dazu zunächst einige nützliche Schreibweisen ein, die die Vertauschbarkeit partieller Ableitungen ausnutzen.

**Notation 26.11** (Multi-Indizes)**.** Ein Element $I = (i_1, \dots, i_n)$ in $\mathbb{N}^n$ nennt man einen **Multi-Index**. Für derartige Multi-Indizes definieren wir die suggestiven Notationen

$$\begin{aligned} |I| &:= i_1 + \cdots + i_n, \\ I! &:= i_1! \cdots i_n!, \\ \partial^I &:= \partial_1^{i_1} \cdots \partial_n^{i_n}, \\ x^I &:= x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Zusätzlich wird im Folgenden die Konstruktion $I + e_j = (i_1, \dots, i_{j-1}, i_j + 1, i_{j+1}, \dots, i_n)$ auftreten, wobei $e_j$ mit $j \in \{1, \dots, n\}$ wie üblich für den $j$-ten Einheitsvektor steht.

Beachte, dass die Indizes $i_1, i_2, \dots$ hier eine andere Bedeutung haben als vorher: Während sie in Definition 26.8 die Variablen waren, nach denen differenziert wird, geben sie hier an, *wie oft* nach einer bestimmten Variablen differenziert wird.

**Definition 26.12** (Taylor-Polynom)**.** Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $r \in \mathbb{N}$, $f \colon D \to \mathbb{R}^m$ eine $r$-mal stetig differenzierbare Funktion, und $a \in D$. Dann heißt

$$T_{f,a}^r \colon D \to \mathbb{R}^m,\ x \mapsto \sum_{I : |I| \leq r} \frac{\partial^I f(a)}{I!} (x-a)^I$$

das **$r$-te Taylor-Polynom** von $f$ mit Entwicklungspunkt $a$.

Wir werden dieses Taylor-Polynom nahezu ausschließlich im Fall $m = 1$ eines eindimensionalen Zielraums betrachten – dies ist natürlich auch der für die Untersuchung von Extremwerten relevante Fall. Zunächst einmal können wir dann feststellen, dass es mit unserer alten Definition des eindimensionalen Taylor-Polynoms aus Definition 11.10 (a) übereinstimmt, wenn $n = 1$ ist (und $I$ damit aus nur einem Index besteht). Auch für allgemeine $n$ gibt die Zahl $|I|$ in den Summanden offensichtlich an, wie oft $f$ differenziert wird. Die Terme mit kleinem $|I|$ lassen sich auf die folgende Art mit Hilfe von Matrixprodukten auch anders schreiben:

**Definition 26.13** (Hesse-Matrix)**.** Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \colon D \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, also $f \in C^2(D)$. Dann heißt für $a \in D$ die (nach Satz 26.6 symmetrische) Matrix der zweiten partiellen Ableitungen

$$Hf(a) := (\partial_i \partial_j f(a))_{i,j} \quad \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

die **Hesse-Matrix** von $f$ in $a$.

**Bemerkung 26.14** (Alternative Schreibweise der Taylor-Polynome vom Grad höchstens 2)**.** Für die ersten Terme in den Taylor-Polynomen einer Funktion $f \in C^2(D)$ können die zugehörigen Multi-Indizes explizit angegeben werden:

(a) Für $|I| = 0$ ist nur $I = (0, \dots, 0)$ möglich; der zugehörige Term im Taylor-Polynom ist einfach der Funktionswert $f(a)$ am Entwicklungspunkt.

(b) Für $|I| = 1$ ist notwendigerweise $I = e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ mit der Eins an einer beliebigen Position $i \in \{1,\dots,n\}$. Die entsprechenden Summanden im Taylor-Polynom lassen sich also schreiben als

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial_i f(a)}{1!}\,(x_i - a_i) = f'(a)\cdot(x-a).$$

(c) Für $|I| = 2$ haben die Multi-Indizes die Form $I = e_i + e_j = (0,\dots,0,1,0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ mit Einsen an Positionen $i < j$ sowie $I = 2e_i = (0,\dots,0,2,0,\dots,0)$ mit einer 2 an Position $i$. Im Taylor-Polynom führt dies zu den Termen

$$\begin{aligned}\sum_{i<j} \frac{\partial_i\partial_j f(a)}{1!\cdot 1!}\,(x_i-a_i)(x_j-a_j) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial_i^2 f(a)}{2!}\,(x_i-a_i)^2 &= \frac{1}{2}\cdot\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i\partial_j f(a)\cdot(x_i-a_i)\cdot(x_j-a_j)\\ &= \frac{1}{2}(x-a)^{\mathsf{T}}\cdot Hf(a)\cdot(x-a).\end{aligned}$$

Das zweite Taylor-Polynom einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ an einem Entwicklungspunkt $a \in D$ ist also

$$T^2_{f,a}(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{1}{2}\,(x-a)^{\mathsf{T}}\cdot Hf(a)\cdot(x-a).$$

**Beispiel 26.15.** Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_1 \sin x_2$$

und wollen dazu das zweite Taylor-Polynom um $a = 0$ berechnen. Dazu benötigen wir die ersten und zweiten partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}&\partial_1 f(x) = \sin x_2,\ \ \partial_2 f(x) = x_1\cos x_2\\ \text{und}\quad &\partial_1^2 f(x) = 0,\ \ \partial_1\partial_2 f(x) = \cos x_2,\ \ \partial_2^2 f(x) = -x_1\sin x_2,\end{aligned}$$

im Nullpunkt also

$$f(0) = \partial_1 f(0) = \partial_2 f(0) = \partial_1^2 f(0) = \partial_2^2 f(0) = 0 \quad\text{und}\quad \partial_1\partial_2 f(0) = 1.$$

Das gesuchte Taylor-Polynom ist damit

$$\begin{aligned}T^2_{f,0}(x) &= \sum_{i_1+i_2\le 2} \frac{\partial_1^{i_1}\partial_2^{i_2} f(0)}{i_1!\,i_2!}\,x_1^{i_1}x_2^{i_2}\\ &= \underbrace{f(0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial_1^1 f(0)}{1!}}_{=0}x_1^1 + \underbrace{\frac{\partial_2^1 f(0)}{1!}}_{=0}x_2^1 + \underbrace{\frac{\partial_1^2 f(0)}{2!}}_{=0}x_1^2 + \underbrace{\frac{\partial_1^1\partial_2^1 f(0)}{1!\,1!}}_{=1}x_1^1x_2^1 + \underbrace{\frac{\partial_2^2 f(0)}{2!}}_{=0}x_2^2\\ &= x_1x_2.\end{aligned}$$

Alternativ ist wie in Bemerkung 26.14

$$f'(0) = (0\ \ 0) \quad\text{und}\quad Hf(0) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

und damit wieder

$$T^2_{f,0}(x) = 0 + (0\ \ 0)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\,(x_1\ \ x_2)\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = x_1x_2.$$

Das entscheidende Resultat über Taylor-Polynome ist nun, dass $T^r_{f,a}$ wie im Eindimensionalen als „beste Näherung“ der Funktion $f$ im Punkt $a$ durch ein Polynom vom Grad $r$ angesehen werden kann. Präzise ausgedrückt ist die Differenz $f(x) - T^r_{f,a}(x)$ wie in Satz 11.13 ein (in der Regel kleines) Restglied, das genauso aussieht wie der nächste Term der Ordnung $r+1$ der Taylor-Entwicklung, allerdings mit der Ableitung an einer Zwischenstelle berechnet statt am Entwicklungspunkt.

**Satz 26.16 (Taylor-Formel).** *Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $r \in \mathbb{N}$ und $f \in C^{r+1}(D)$. Ferner seien $a, x \in D$ zwei Punkte, deren Verbindungsstrecke $\overline{ax}$ ganz in $D$ liegt (dies ist z. B. für konvexes $D$ immer der Fall). Dann gibt es ein $c \in \overline{ax}$ mit*

$$f(x) - T^r_{f,a}(x) = \sum_{I:|I|=r+1} \frac{\partial^I f(c)}{I!}(x-a)^I.$$

68 *Wie in Satz 11.13 bezeichnet man diesen Ausdruck auch als das **Restglied** der Taylor-Entwicklung.*

*Beweis.* Da $\overline{ax}$ ganz in $D$ liegt, können wir die Funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(a+t(x-a))$ betrachten, die die Einschränkung von $f$ auf diese Verbindungsstrecke beschreibt. Wir werden nun zeigen, dass die eindimensionale Taylor-Formel aus Satz 11.13 angewendet auf $g$ an der Stelle 1 mit Entwicklungspunkt 0 exakt die Behauptung unseres Satzes ist.

Dazu müssen wir die höheren Ableitungen von $g$ berechnen: Wir zeigen für alle $t \in [0,1]$ mit Induktion über $k = 0, \dots, r+1$, dass

$$g^{(k)}(t) = k! \cdot \sum_{I:|I|=k} \frac{\partial^I f(a+t(x-a))}{I!}(x-a)^I. \qquad (*)$$

Der Induktionsanfang für $k = 0$, also $g^{(0)}(t) = g(t) = f(a+t(x-a))$, ist dabei trivial. Wir nehmen nun an, dass diese Formel für ein $k \in \{0, \dots, r\}$ gilt, und müssen diesen Ausdruck erneut nach $t$ differenzieren, um $g^{(k+1)}$ zu berechnen. Dazu bemerken wir zunächst, dass die Ableitung der Funktion $t \mapsto \partial^I f(a+t(x-a))$ nach der Kettenregel aus Satz 25.30 das Matrixprodukt der Ableitungen von $\partial^I f$ und $t \mapsto a+t(x-a)$ ist, also gleich

$$\sum_{j=1}^n \partial_j \partial^I f(a+t(x-a)) \cdot (x_j - a_j) = \sum_{j=1}^n \partial^{I+e_j} f(a+t(x-a)) \cdot (x_j - a_j).$$

Damit erhalten wir als Ableitung von $(*)$, wobei wir wieder $I = (i_1, \dots, i_n)$ schreiben,

$$\begin{aligned}
g^{(k+1)}(t) &= k! \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{I:|I|=k} \frac{\partial^{I+e_j} f(a+t(x-a))}{I!}(x-a)^{I+e_j} \\
&= k! \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{I:|I|=k+1 \\ i_j>0}} \frac{\partial^I f(a+t(x-a))}{(I-e_j)!}(x-a)^I && \text{(Indexverschiebung } i_j \to i_j - 1) \\
&= k! \cdot \sum_{I:|I|=k+1} \Bigg( \underbrace{\sum_{j:i_j>0} i_j}_{=|I|=k+1} \Bigg) \cdot \frac{\partial^I f(a+t(x-a))}{I!}(x-a)^I && \text{(Erweitern mit } i_j) \\
&= (k+1)! \cdot \sum_{I:|I|=k+1} \frac{\partial^I f(a+t(x-a))}{I!}(x-a)^I,
\end{aligned}$$

was die behauptete Formel $(*)$ mit Induktion zeigt. Damit folgt nun mit der eindimensionalen Taylor-Formel für $g$

$$f(x) - T^r_{f,a}(x) = g(1) - \sum_{k=0}^r \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \cdot 1^k = g(1) - T^r_{g,0}(1) \overset{11.13}{=} \frac{g^{(r+1)}(t)}{(r+1)!} \cdot 1^{r+1} \quad \text{für ein } t \in (0,1),$$

was wegen $(*)$ für $c := a+t(x-a)$ genau die Aussage des Satzes ist. □

Die wichtigsten Fälle in Satz 26.16 sind sicher $r = 0$ und $r = 1$. Während $r = 1$ zur im nächsten Abschnitt betrachteten Extremwertberechnung führt, ergibt sich für $r = 0$ einfach die mehrdimensionale Entsprechung des Mittelwertsatzes 10.23 (a):

**Folgerung 26.17 (Mittelwertsatz).** *Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gibt es für alle $a, x \in D$, so dass die Verbindungsstrecke $\overline{ax}$ ganz in $D$ liegt, eine Zwischenstelle $c \in \overline{ax}$ mit*

$$f(x) - f(a) = f'(c) \cdot (x-a).$$

*Beweis.* Mit der Schreibweise aus Bemerkung 26.14 (a) und (b) ist die behauptete Gleichung genau die Taylor-Formel aus Satz 26.16 für $r = 0$. □

**Bemerkung 26.18.** Bereits am Mittelwertsatz sieht man gut, dass die Voraussetzung einer Funktion mit nur eindimensionalem Zielraum in Satz 26.16 wesentlich ist: Ist $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m$ und sind $a, x \in D$ wie oben, so können wir zwar durch Anwendung des gerade gezeigten Mittelwertsatzes auf $f_1, \dots, f_m$ Punkte $c_1, \dots, c_m \in \overline{ax}$ mit

$$f_i(x) - f_i(a) = f_i'(c_i) \cdot (x - a)$$

finden – da die Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m$ nichts miteinander zu tun haben müssen, werden diese Punkte aber im Allgemeinen verschieden sein, so dass wir nicht erwarten können, ein gemeinsames $c \in \overline{ax}$ mit

$$f(x) - f(a) = f'(c) \cdot (x - a)$$

zu finden. Ganz explizit kann man dies z. B. an der Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \quad \text{mit Ableitung} \quad f'(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

sehen: Für $a = 0$ und $x = 2\pi$ ist $f(x) - f(a) = 0$, aber es gibt offensichtlich kein $c \in [0, 2\pi]$ mit $0 = f'(c) \cdot (2\pi - 0)$.

Der Mittelwertsatz (und allgemeiner die Taylor-Formel aus Satz 26.16) gilt also nur für Funktionen nach $\mathbb{R}$ – bzw. bei Funktionen nach $\mathbb{R}^m$ nur für die Komponentenfunktionen einzeln. Für mehrdimensionale Wertebereiche können wir lediglich wie folgt eine dem Mittelwertsatz ähnliche Abschätzung angeben, die wir später noch mehrfach benötigen werden.

**Folgerung 26.19.** *Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Funktion mit Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m$. Dann gilt für alle $a, x \in D$ mit $\overline{ax} \subset D$*

$$\|f(x) - f(a)\|_\infty \leq \|f'|_{\overline{ax}}\|_\infty \cdot \|x - a\|_\infty,$$

*wobei mit $\|f'|_{\overline{ax}}\|_\infty$ analog zu Beispiel 24.40 (b) „das Maximum der Zeilensummennorm von $f'$ auf der Strecke $\overline{ax}$“ gemeint ist, also*

$$\|f'|_{\overline{ax}}\|_\infty := \max\{\|f'(c)\|_\infty : c \in \overline{ax}\} = \max\left\{\sum_{j=1}^n |\partial_j f_i(c)| : i \in \{1, \dots, m\}, c \in \overline{ax}\right\}.$$

*Beweis.* Beachte zunächst, dass das angegebene Maximum existiert, da die nach Voraussetzung stetigen Funktionen $\sum_{j=1}^n |\partial_j f_i|$ auf der kompakten Menge $\overline{ax} \subset D$ gemäß Folgerung 24.35 ein Maximum annehmen.

Nach dem Mittelwertsatz aus Folgerung 26.17 gibt es nun für alle $i = 1, \dots, m$ einen Punkt $c_i \in \overline{ax}$ mit $f_i(x) - f_i(a) = f_i'(c_i) \cdot (x - a)$, also insbesondere mit

$$\begin{aligned} |f_i(x) - f_i(a)| &= \left|\sum_{j=1}^n \partial_j f_i(c_i) \cdot (x_j - a_j)\right| \leq \sum_{j=1}^n |\partial_j f_i(c_i)| \cdot |x_j - a_j| \leq \sum_{j=1}^n |\partial_j f_i(c_i)| \cdot \|x - a\|_\infty \\ &\leq \|f'|_{\overline{ax}}\|_\infty \cdot \|x - a\|_\infty. \end{aligned}$$

Mit der Definition der Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^m$ folgt daraus die behauptete Aussage. □

## 26.B Extremwerte

Als Nächstes betrachten wir nun den für Extremwertberechnungen wichtigen Fall $r = 1$ in der Taylor-Formel aus Satz 26.16, in dem das Restglied also aus den zweiten Ableitungen der betrachteten Funktion besteht. Wir hatten in Lemma 26.2 ja schon gesehen, dass an einem lokalen Extremum die Ableitung der betrachteten Funktion notwendigerweise gleich Null sein muss. Wie im eindimensionalen Fall in Satz 11.18 geben die zweiten Ableitungen auch hier nun an einer solchen Stelle oft Auskunft darüber, ob wirklich ein Extremum vorliegt und ob es sich dabei um ein Maximum oder Minimum handelt – und zwar abhängig davon, ob die Hesse-Matrix gemäß Definition 21.9 (b) und Bemerkung 21.10 (c) positiv definit, negativ definit oder indefinit ist.

**Satz 26.20 (Extremwertkriterium).** *Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Ferner sei $a \in D$ ein kritischer Punkt von $f$, also $f'(a) = 0$. Ist dann die Hesse-Matrix $Hf(a)$ ...*

(a) *positiv definit, so hat $f$ in $a$ ein isoliertes lokales Minimum.*

(b) *negativ definit, so hat $f$ in $a$ ein isoliertes lokales Maximum.*

(c) *indefinit, so hat $f$ in $a$ kein lokales Extremum.*

*Beweis.* Nach eventuellem Verkleinern von $D$ auf eine Kugel mit Mittelpunkt $a$ können wir nach Beispiel 24.22 (c) annehmen, dass $D$ konvex ist. Die Taylor-Formel aus Satz 26.16 für $r = 1$ in der Notation von Bemerkung 26.14 liefert dann zu jedem $x \in D$ ein $c \in \overline{ax} \subset D$ mit

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^\mathsf{T} \cdot Hf(c) \cdot (x-a).$$

Da nach Voraussetzung $f'(a) = 0$ gilt, müssen wir also untersuchen, ob der Ausdruck

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2}(x-a)^\mathsf{T} \cdot Hf(c) \cdot (x-a) \qquad (*)$$

für $x$ in einer Umgebung von $a$ immer positiv ist, immer negativ ist, oder wechselndes Vorzeichen hat.

(a) Nach dem Hurwitz-Kriterium aus Satz 21.42 ist die Hesse-Matrix $Hf(c)$ für ein $c \in D$ genau dann positiv definit, wenn

$$\det((\partial_i \partial_j f(c))_{i,j=1,\dots,k}) > 0 \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n.$$

Da $f$ nach Voraussetzung zweimal stetig differenzierbar ist, sind diese Determinanten nun stetige Funktionen in $c$, und damit ist die Menge

$$U := \{c \in D : Hf(c) \text{ ist positiv definit}\} = \bigcap_{k=1}^{n} \left\{c \in D : \det((\partial_i \partial_j f(c))_{i,j=1,\dots,k}) > 0\right\}$$

nach Lemma 23.34 (a) und Beispiel 24.18 als endlicher Durchschnitt offener Mengen offen und enthält nach Voraussetzung den Punkt $a$. Nach evtl. erneutem Verkleinern von $D$ können wir daher $D \subset U$ annehmen.

Dann ist $Hf(c)$ in $(*)$ aber stets positiv definit, und damit $f(x) - f(a) > 0$, d. h. $f(x) > f(a)$ für alle $x \neq a$. Also hat $f$ in $a$ ein isoliertes lokales Minimum.

(b) folgt genauso wie (a), indem wir die Bedingungen an $U$ gemäß Satz 22.32 (b) so abändern, dass sie der negativen Definitheit entsprechen.

(c) Wir zeigen zunächst, dass $f$ in $a$ kein lokales Maximum hat.

Da $Hf(a)$ indefinit ist, gibt es einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v^\mathsf{T} \cdot Hf(a) \cdot v > 0$. Wie in (a) sind die Einträge der Hesse-Matrix $Hf(c)$ stetige Funktionen in $c$, und damit ist die Menge

$$U := \{c \in D : v^\mathsf{T} \cdot Hf(c) \cdot v > 0\}$$

nach Beispiel 24.18 eine offene Umgebung von $a$. Wie oben können wir nach evtl. Verkleinern von $D$ also wieder $D \subset U$ annehmen. Dann ist in $(*)$ aber für alle $t > 0$, so dass $x := a + tv$ (und damit auch $c$) noch in $D$ liegt,

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2} t^2 v^\mathsf{T} \cdot Hf(c) \cdot v > 0,$$

und damit $f(x) > f(a)$. Also hat $f$ in $a$ kein lokales Maximum.

Natürlich zeigt man mit Hilfe eines Vektors $w \in \mathbb{R}^n$ mit $w^\mathsf{T} \cdot Hf(a) \cdot w < 0$ analog, dass $f$ in $a$ auch kein lokales Minimum hat. □

69

**Bemerkung 26.21.** Beachte, dass das Kriterium aus Satz 26.20 nicht in jedem Fall entscheiden kann, ob an einem kritischen Punkt wirklich ein Extremum vorliegt: Ist die Hesse-Matrix zwar nicht positiv oder negativ definit, aber semidefinit, so trifft keiner der drei Fälle von Satz 26.20 zu. In diesem Fall könnte man nun (analog zum Eindimensionalen in Satz 11.18) höhere als zweite Ableitungen von $f$ betrachten und dafür ähnliche Kriterien beweisen. Da diese höheren Ableitungen im Mehrdimensionalen aufgrund der Vielzahl der partiellen Ableitungen recht kompliziert zu untersuchen sind, werden wir dies hier aber nicht weiter ausführen.

**Bemerkung 26.22** (Geometrische Interpretation des Extremwertkriteriums)**.** Die Aussage von Satz 26.20 ist auch leicht anschaulich zu verstehen: Nach Bemerkung 26.14 erhalten wir aus der Taylor-Formel für $r = 2$ um einen Punkt $a$ mit $f'(a) = 0$ ja die Näherung

$$f(x) \approx f(a) + \frac{1}{2}(x-a)^{\mathsf{T}} \cdot Hf(a) \cdot (x-a).$$

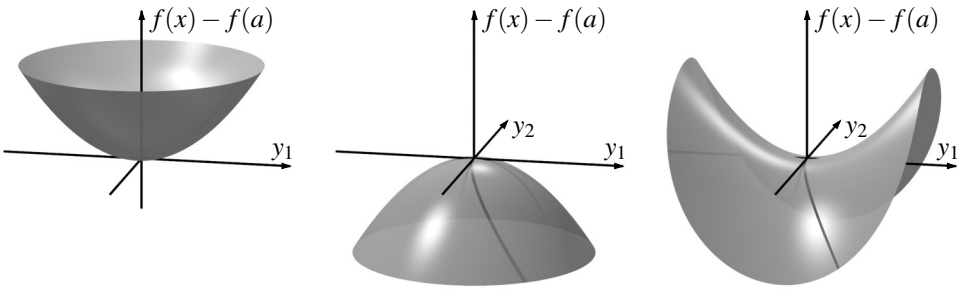
Zu der symmetrischen Hesse-Matrix $Hf(a)$ können wir nun nach dem Trägheitssatz von Sylvester aus Satz 22.35 bzw. Bemerkung 22.36 eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ finden, so dass

$$T^{\mathsf{T}} \cdot Hf(a) \cdot T = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{k},\underbrace{-1,\dots,-1}_{l},0,\dots,0) =: D$$

gilt, wobei $k$ und $l$ die Anzahl der positiven bzw. negativen Eigenwerte von $Hf(a)$ ist. Mit der linearen Koordinatentransformation $x = a + Ty$ wird die obige Näherungsformel dann zu

$$f(x) \approx f(a) + \frac{1}{2} y^{\mathsf{T}} \cdot D \cdot y = f(a) + \frac{1}{2}(y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_{k+l}^2).$$

Wie in den Bildern unten im zweidimensionalen Fall dargestellt, kann man hieraus leicht das lokale Verhalten von $f$ um $a$ ablesen: Im positiv definiten Fall $k = n$ ist die Differenz $f(x) - f(a)$ als Summe von Quadraten für $x \neq a$ positiv, und damit liegt dort dann ein lokales Minimum vor. Der Schnitt des Graphen von $f$ mit der $y_1$- oder $y_2$-Koordinatenachse ist in diesem Fall näherungsweise eine nach oben geöffnete quadratische Parabel. Für eine negativ definite Hesse-Matrix mit $l = n$ haben wir analog ein Maximum.



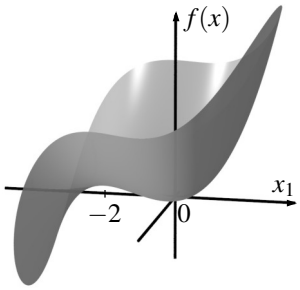

| $Hf(a)$ positiv definit | $Hf(a)$ negativ definit | $Hf(a)$ indefinit |
|---|---|---|
| $f(x) - f(a) \approx \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)$ | $f(x) - f(a) \approx \frac{1}{2}(-y_1^2 - y_2^2)$ | $f(x) - f(a) \approx \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2)$ |
| Minimum | Maximum | Sattelpunkt |

Im indefiniten Fall hat $f$ auf den verschiedenen Geraden durch $a$ manchmal ein Maximum und manchmal ein Minimum – man sagt auch, dass in diesem Fall ein **Sattelpunkt** vorliegt. Ist die Hesse-Matrix schließlich weder positiv definit, negativ definit noch indefinit, ist sie also z. B. einfach die Nullmatrix, so sagt die obige Näherung einfach $f(x) \approx f(a)$ für manche oder sogar alle $x$, und in diesem Fall müsste man sich diese „näherungsweise Gleichheit“ noch genauer anschauen, um entscheiden zu können, ob $f(x)$ nun etwas größer oder etwas kleiner ist als $f(a)$.

**Beispiel 26.23.** Wir wollen die (lokalen) Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_1^3 + 3x_1^2 + x_2^2$$

(siehe Bild rechts) berechnen. Dazu bestimmen wir zunächst gemäß Lemma 26.2 die kritischen Punkte als mögliche Kandidaten für Extrema, also die Stellen mit Ableitung Null: Es ist




$$f'(x) = (3x_1^2 + 6x_1 \quad 2x_2),$$

und damit $f'(x) = 0$ genau dann, wenn

$$3x_1(x_1+2) = 0 \quad \text{und} \quad 2x_2 = 0,$$

woraus sich die kritischen Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergeben.

Für unser Extremwertkriterium müssen wir jetzt die Hesse-Matrix berechnen: Es ist

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(x) & \partial_1\partial_2 f(x) \\ \partial_2\partial_1 f(x) & \partial_2\partial_2 f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1+6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Im Ursprung ist also

$$Hf\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

womit $Hf$ dort nach Beispiel 21.15 (a) positiv definit ist. Damit hat $f$ im Ursprung nach Satz 26.20 (a) ein isoliertes lokales Minimum (wie auch im Bild ersichtlich ist). Am anderen kritischen Punkt ist dagegen

$$Hf\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

und damit ist $Hf$ dort nach Beispiel 21.15 (a) indefinit. Es liegt an dieser Stelle nach Satz 26.20 (c) also kein lokales Extremum, sondern ein Sattelpunkt vor.

**Aufgabe 26.24.** Bestimme alle lokalen Minima und Maxima der Funktionen

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2$;

(b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_2(x_2 - \cos x_1 - 1) + \cos x_1$.

Gib zusätzlich von der Funktion $g$ das zweite Taylor-Polynom mit Entwicklungspunkt $\begin{pmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ an.

**Aufgabe 26.25.** Zeige, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x_2 - x_1^2)(x_2 - 2x_1^2)$ keine lokalen Extrema hat, dass die Einschränkung von $f$ auf jede Gerade durch den Ursprung aber ein lokales Minimum in 0 besitzt.

**Aufgabe 26.26.** Für gegebene Punkte $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Summe der Abstandsquadrate

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{i=1}^{k} \|x - a_i\|_2^2.$$

Bestimme alle lokalen und globalen Extrema von $f$.

**Aufgabe 26.27.** Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, für die die Hesse-Matrix an jedem Punkt positiv definit ist. Zeige, dass $f$ höchstens ein lokales Extremum besitzt.

# 27. Implizite Funktionen

Bevor wir uns ab dem nächsten Kapitel der Integration widmen, wollen wir zum Abschluss unseres Studiums differenzierbarer Abbildungen noch auf das in der Praxis sehr wichtige Thema der sogenannten impliziten Funktionen eingehen, bei dem es um die Auflösbarkeit von Gleichungen nach bestimmten Variablen geht. Die Idee dieser Situation lässt sich am besten an einem Beispiel erklären.

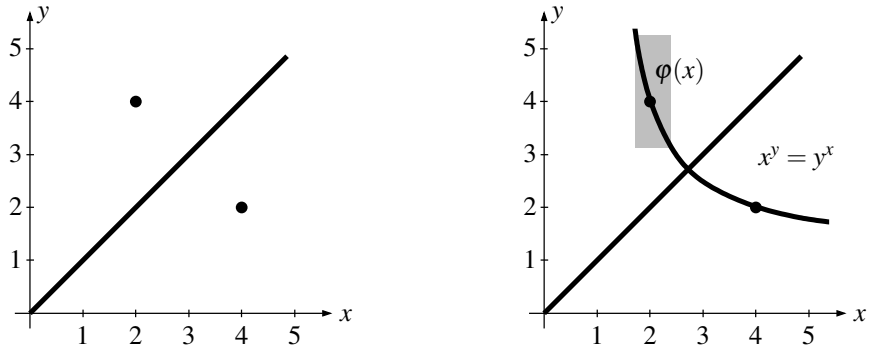
**Beispiel 27.1.** Für $x,y \in \mathbb{R}_{>0}$ wollen wir die Lösungsmenge der Gleichung $x^y = y^x$ untersuchen.

Wenn wir alle Lösungen einer solchen Gleichung in zwei Variablen bestimmen wollen, würden wir sie normalerweise vermutlich nach einer der Variablen – z. B. $y$ – auflösen wollen, um dann daraus für jeden Wert von $x$ die zugehörigen Werte von $y$ berechnen zu können. Allerdings lässt sich diese Gleichung mit den uns bekannten speziellen Funktionen aus Kapitel 9 leider nicht nach $y$ (und auch nicht nach $x$) auflösen, da beide Variablen sowohl in der Basis als auch im Exponenten auftreten. Um diese Gleichung zu untersuchen, brauchen wir also andere Methoden.

Als Erstes fällt uns vermutlich auf, dass wir schon ein paar Lösungen sehen können:

- $x = y$ für beliebige $x,y > 0$, sowie
- $(x,y) = (2,4)$ und $(x,y) = (4,2)$ (denn $2^4 = 4^2 = 16$),

also insgesamt die im folgenden Bild links eingezeichnete Punktmenge.




Dieses Bild sieht natürlich sehr merkwürdig aus: Ist z. B. der Punkt $(2,4)$ wirklich ein isolierter Punkt der Lösungsmenge, oder gibt es in einer Umgebung davon noch weitere Lösungen? Um dies zunächst einmal numerisch herauszufinden, könnten wir die Lösungsmenge der betrachteten Gleichung von einem Computer berechnen lassen, der einfach alle Punkte der Ebene abtastet und diejenigen Paare $(x,y)$ zeichnet, bei denen $x^y$ gleich bzw. sehr nahe bei $y^x$ ist. Das Ergebnis, das wir so erhalten würden, ist im Bild oben rechts dargestellt.

Danach sieht es so aus, als ob die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung aus zwei Zweigen besteht: den Punkten mit $y = x$, und einer weiteren Kurve, die sich als Graph einer (stetig differenzierbaren) Funktion schreiben lässt. In einer (im Bild oben grau eingezeichneten) Umgebung des Punktes $(2,4)$ kann man die gegebene Gleichung $x^y = y^x$ also z. B. anscheinend nach $y$ auflösen und als Funktionsgleichung $y = \varphi(x)$ schreiben – auch wenn wir diese Funktion nicht explizit angeben können. Man sagt, dass diese Funktion $\varphi$ *implizit* durch die Gleichung $x^y = y^x$ definiert ist. Am Kreuzungspunkt der beiden Zweige oben lässt sich die gegebene Gleichung jedoch nicht nach einer der beiden Variablen auflösen und z. B. $y$ als Funktion von $x$ schreiben, weil in einer Umgebung dieses Punktes ja für jeden Wert von $x$ *zwei* mögliche Werte $y$ mit $x^y = y^x$ existieren.

Ziel dieses Kapitels ist es, derartige Aussagen exakt zu beweisen. Dabei werden wir auch sehen, dass man mit solchen nicht nach einer Variablen aufgelösten Funktionsdefinitionen durchaus arbeiten

kann. So werden wir z. B. im obigen Bild den Schnittpunkt der beiden Zweige und die Ableitung der Funktion $\varphi$ im Punkt $(2,4)$ bestimmen können, auch ohne diese Funktion explizit zu kennen (siehe Beispiel **?? ??**).

## 27.A Lokale Umkehrfunktionen

Wir beginnen unser Studium impliziter Funktionen mit einem wichtigen Spezialfall: Sind $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ eine gegebene Funktion, so wollen wir untersuchen, ob wir die Gleichung $y = f(x)$ (mit $x \in D$ und $y \in \mathbb{R}^n$) nach $x$ auflösen, also eine Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ finden können. Im eindimensionalen Fall wissen wir dies bereits:

**Beispiel 27.2** (Umkehrbarkeit im Eindimensionalen)**.** Sind $D = (a,b)$ ein offenes Intervall und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist $f'$ zunächst einmal entweder überall positiv oder überall negativ, da $f'$ sonst nach dem Zwischenwertsatz 8.21 auch irgendwo den Wert 0 annehmen müsste. Also ist $f$ nach Folgerung 10.24 dann streng monoton und damit injektiv. Auf dem Bildbereich $f(D)$, der nach dem Zwischenwertsatz ebenfalls ein Intervall ist, existiert also eine Umkehrfunktion $f^{-1}$ von $f$, und diese ist nach Satz 10.11 ebenfalls differenzierbar mit Ableitung $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$. Mit anderen Worten ist die Gleichung $y = f(x)$ somit auf dem betrachteten Intervall nach $x$ auflösbar, nämlich durch die Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$.

**Bemerkung 27.3** (Ableitung einer Umkehrfunktion)**.** Die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion lässt sich sofort auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinern: Ist $f\colon D \to D'$ eine differenzierbare Funktion zwischen offenen Teilmengen $D$ und $D'$ von $\mathbb{R}^n$, und wissen wir bereits, dass $f$ bijektiv ist und eine ebenfalls differenzierbare Umkehrfunktion $f^{-1}\colon D' \to D$ besitzt, so erhält man durch Differenzieren der Gleichung $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in D$ mit der Kettenregel aus Satz 25.30 sofort $(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = E$, da die Ableitung von $x \mapsto x = Ex$ nach Beispiel 25.5 die Einheitsmatrix ist. Also muss die Matrix $f'(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar sein, d. h. es muss $\det f'(x) \neq 0$ gelten, und für die Ableitung von $f^{-1}$ ist analog zum Eindimensionalen die inverse Matrix

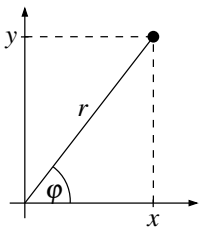
$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1}.$$

Wo wir im Eindimensionalen $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ vorausgesetzt haben, müssen wir nun also verlangen, dass die Matrix $f'(x)$ überall invertierbar ist. Überraschend ist dabei allerdings, dass die Invertierbarkeit von $f'(x)$ für $n > 1$ im Gegensatz zum eindimensionalen Fall in Beispiel 27.2 nicht mehr hinreichend für die Existenz einer Umkehrfunktion ist, wie das folgende einfache Beispiel zeigt.

**Beispiel 27.4** (Umkehrbarkeit der Polarkoordinaten)**.** Wir betrachten noch einmal die Polarkoordinatenabbildung in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

$$f\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(siehe Satz 9.27 und Definition 9.12), die dem Betrag und Winkel einer komplexen Zahl ihren Real- und Imaginärteil zuordnet. Dann ist die Ableitungsmatrix von $f$




$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{1}$$

und damit nach Satz 9.14 (b)

$$\det f' = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r > 0.$$

Die Ableitungsmatrix $f'$ ist also überall invertierbar. Trotzdem ist $f$ aber nicht injektiv, da die Addition von Vielfachen von $2\pi$ zum Winkel $\varphi$ nichts am Funktionswert ändert. Um eine bijektive Abbildung zu erhalten, müssen wir $f$ einschränken: Betrachten wir z. B. wie im Bild unten nur die Werte von $r$ und $\varphi$ mit $1 < r < 2$ und $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, so ist $f$ auf dieser offenen Teilmenge $U$ des Definitionsbereichs injektiv. Das Bild dieser Teilmenge unter $f$ ist der unten rechts im Bild dargestellte

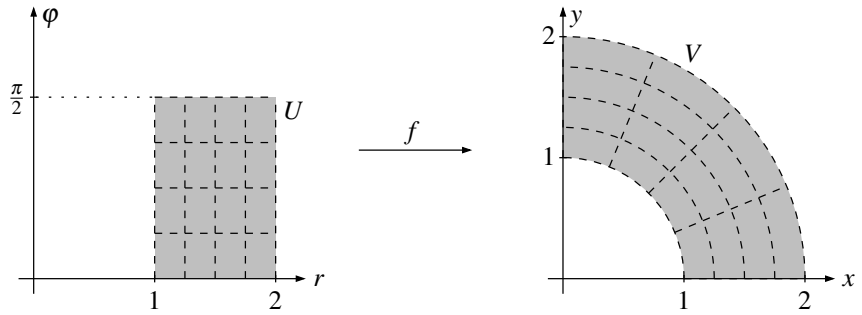
Viertelkreisring $V$, so dass die Einschränkung $f|_U : U \to V$ nun bijektiv ist und damit eine Umkehrabbildung $f^{-1} : V \to U$ besitzt. In der Tat können wir diese Umkehrabbildung auch sofort aus dem geometrischen Bild oben rechts ablesen: Man kann $r$ und $\varphi$ in diesem Winkelbereich offensichtlich mit den (stetig differenzierbaren) Formeln

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

aus $x$ und $y$ zurückgewinnen, so dass also

$$f^{-1} : V \to U,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arctan\frac{y}{x} \end{pmatrix} \tag{2}$$

dort die Umkehrfunktion ist.




Gemäß Bemerkung 27.3 können wir die Ableitung dieser Umkehrfunktion $g$ nun als die zu $f'$ inverse Matrix berechnen: Mit (1) und Beispiel 18.22 erhalten wir

$$(f^{-1})' = \frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} r\cos\varphi & r\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$

wie man durch Differenzieren der expliziten Formel (2) für $f^{-1}$ natürlich auch direkt bestätigen könnte.

Auch bei überall invertierbarer Ableitungsmatrix können wir also nur lokal (d. h. nach geeigneter Einschränkung des Definitionsbereichs auf eine offene Umgebung eines Punktes) erwarten, eine bijektive Abbildung zu erhalten. Dass dieses Phänomen erst bei einer Raumdimension $n > 1$ sichtbar wird, hat letztlich topologische Gründe: Wählen wir in unserem Beispiel einen zu großen Definitionsbereich wie z. B. $U = (1,2) \times (0,3\pi)$, so würde das Bild von $f|_U$ den Kreisring mit innerem Radius 1 und äußerem Radius 2 eineinhalbmal durchlaufen, so dass $f$ dort dann nicht mehr injektiv wäre – für solche „Schleifen“ um den Nullpunkt herum ist auf der eindimensionalen reellen Zahlengeraden aber „nicht genug Platz“.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir nun den technisch etwas aufwendigen, aber sicher nicht mehr unerwarteten Satz beweisen, dass eine stetig differenzierbare Abbildung mit invertierbarer Ableitungsmatrix stets lokal umkehrbar ist. Wir beginnen dazu mit dem folgenden Lemma, in dem wir einige spezielle Koordinatenwahlen getroffen haben, um den Beweis einfacher zu halten. Es enthält die eigentliche technische Arbeit, die für die Sätze in diesem Kapitel erforderlich ist – die weiteren Aussagen werden sich daraus dann durch geeignete Koordinatentransformationen als Anwendungen ergeben.

**Lemma 27.5** (Lemma über lokale Umkehrfunktionen)**.** *Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $0 \in D$, und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = E_n$.*

*Dann ist die Funktion $f$ lokal um den Ursprung umkehrbar, d. h. es gibt offene Umgebungen $U$ und $V$ von $0 \in \mathbb{R}^n$ mit $U \subset D$, so dass die Einschränkung $f|_U : U \to V$ bijektiv ist. Darüber hinaus ist die dann existierende Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$ ebenfalls differenzierbar in $0$ mit Ableitung $E_n$.*

*Beweis.* Die Beweisidee dieses Lemmas besteht darin, Urbilder unter $f$ als Fixpunkte einer geeigneten Hilfsfunktion umzuschreiben, und diese Fixpunkte dann mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes 24.27 zu untersuchen. Wir verwenden im Beweis durchgehend die Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^n$ und die davon induzierte Zeilensummennorm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ (siehe Beispiel 24.40 (b)).

Da $D$ nach Voraussetzung eine offene Umgebung von 0 ist und $f'$ stetig mit $f'(0) = E$, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(0) \subset D$, so dass

$$\|E - f'(x)\| < \frac{1}{2} \tag{$*$}$$

für alle $x \in U_\varepsilon(0)$ gilt. Es sei nun $y \in U_{\frac{\varepsilon}{4}}(0)$ zunächst fest. Um Urbilder von $y$ unter $f$ zu suchen, betrachten wir die (von $y$ abhängige) Hilfsfunktion

$$\varphi\colon D \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto x - f(x) + y,$$

so dass $f(x) = y$ genau dann gilt wenn $\varphi(x) = x$, die Urbilder von $y$ unter $f$ also genau die Fixpunkte von $\varphi$ sind. Um den Banachschen Fixpunktsatz anwenden zu können, zeigen wir nun, dass $\varphi$ auf der abgeschlossenen Kugel $K_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \subset D$ eine Kontraktion ist:

(a) Da $K_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$ in der offenen und nach Beispiel 24.22 (c) konvexen Menge $U_\varepsilon(0) \subset D$ liegt, gilt für alle $x, \tilde{x} \in K_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$

$$\|\varphi(x) - \varphi(\tilde{x})\| \overset{26.19}{\leq} \|\varphi'|_{\overline{x\tilde{x}}}\| \cdot \|x - \tilde{x}\| = \|(E - f')|_{\overline{x\tilde{x}}}\| \cdot \|x - \tilde{x}\| \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\|.$$

(b) Für alle $x \in K_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$ gilt

$$\|\varphi(x)\| \leq \|\varphi(x) - \varphi(0)\| + \|\varphi(0)\| \overset{\text{(a)}}{\leq} \frac{1}{2}\|x\| + \|y\| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

und damit auch $\varphi(x) \in K_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$.

Weil $K_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$ als abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ nach Satz 23.29 und Folgerung 23.43 vollständig ist, hat $\varphi$ nach Satz 24.27 dort also genau einen Fixpunkt, d. h. $y$ besitzt in $K_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$ genau ein Urbild unter $f$. Da für $\varphi(x) = x$ aus (b) außerdem $\|x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ folgt, liegt dieses Urbild sogar in der offenen Kugel $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$. Insgesamt ist damit die eingeschränkte Abbildung

$$f\colon \underbrace{U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \cap f^{-1}(U_{\frac{\varepsilon}{4}}(0))}_{=:U} \to \underbrace{U_{\frac{\varepsilon}{4}}(0)}_{=:V}$$

bijektiv. Da $U$ und $V$ nach Lemma 23.34 (a) und Satz 24.17 (b) offen sind, zeigt dies die behauptete Existenz einer lokalen Umkehrabbildung.

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass $f^{-1}$ im Nullpunkt mit Ableitung $E$ differenzierbar ist. Wir prüfen dies wie in Algorithmus 25.15 nach: Ist $y = f(x)$, also $\varphi(x) = x$, so folgt $\|x\| \leq \frac{1}{2}\|x\| + \|y\|$ und damit $\|x\| \leq 2\|y\|$ aus (b), und damit wie gewünscht

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(0) - Ey}{\|y\|} = \frac{x - f(x)}{\|y\|} = -\underbrace{\frac{f(x) - f(0) - Ex}{\|x\|}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\|x\|}{\|y\|}}_{\leq 2} \to 0$$

für $y \to 0$, da mit $y \to 0$ wegen $\|x\| \leq 2\|y\|$ auch $x \to 0$ folgt und $f$ in 0 differenzierbar mit Ableitung $E$ ist. □

70

# Literatur


[B] A. Beutelspacher, *Lineare Algebra*, Vieweg-Verlag (2003)

[BF] M. Barner, F. Flohr, *Analysis 1*, de Gruyter Lehrbuch (2000)

[E] H.-D. Ebbinghaus et al., *Zahlen*, Springer-Verlag (1988)

[Fi] G. Fischer, *Lineare Algebra*, Vieweg-Verlag (2002)

[Fo1] O. Forster, *Analysis 1*, Vieweg-Verlag (2011)

[Fo2] O. Forster, *Analysis 2*, Vieweg-Verlag (2010)

[G] A. Gathmann, *Algebraische Strukturen*, Vorlesungsskript RPTU Kaiserslautern (2023), https://agag-gathmann.math.rptu.de/ags

[GK] G.-M. Greuel, T. Keilen, *Lineare Algebra I und II*, Vorlesungsskript TU Kaiserslautern (1999), www.math.uni-tuebingen.de/~keilen/download/LectureNotes/linearealgebra.pdf

[J] K. Jänich, *Lineare Algebra*, Springer-Verlag (2010)

[K1] K. Königsberger, *Analysis 1*, Springer-Verlag (2003)

[K2] K. Königsberger, *Analysis 2*, Springer-Verlag (2003)

[M] T. Markwig, *Grundlagen der Mathematik*, Vorlesungsskript TU Kaiserslautern (2011), www.math.uni-tuebingen.de/~keilen/download/LectureNotes/grundlagen11.pdf

# Index


$A^*$ 296
$A^\mathsf{T}$ 178
$A_b$ 268
$A_b^B$ 269
$A^{B,C}$ 209
$A_f$ 204
$A_f^B$ 234
$A_f^{B,C}$ 206
$A_s^B$ 274
Abb$(D,K)$ 159
Abb$(D,W)$ 160
Abbildung 16
  adjungierte 296
  alternierende 223
  bestimmt divergente 97
  bijektive 18
  bilineare 267, 288
  diagonalisierbare 242
  differenzierbare 119, 353
  duale 287
  gleichmäßig stetige 104, 341
  identische 17
  injektive 18
  lineare 196
  mehrfach differenzierbare 133, 369
  mehrfach partiell differenzierbare 369
  multilineare 223
  normale 297
  orthogonal diagonalisierbare 299
  orthogonale 292
  partiell differenzierbare 355
  selbstadjungierte 297
  stetig differenzierbare 133, 359, 369
  stetig partiell differenzierbare 358, 369
  stetige 92, 334
  surjektive 18
  total differenzierbare 353
  unitär diagonalisierbare 299
  unitäre 292
Abbildungsmatrix 204, 206
  eines Endomorphismus 234
abelsche Gruppe 25
abgeschlossene Bedingung 339
abgeschlossene Kugel 317
abgeschlossene Menge 323
abgeschlossenes Intervall 41
Abgeschlossenheit
  eines Unterraums 161
Ableitung 119, 353
  eines Polynoms 122, 198
  höhere 133, 367
  partielle 355
  totale 353
Abschluss 91, 325
absolut konvergente Reihe 80
Absolutbetrag 80
Abstand
  von Mengen 348
  von Punkten 316
abzählbar unendliche Menge 63
abzählbare Menge 63
Additionstheoreme 112
Additivität des Integrals 145
adjungierte Abbildung 296
adjungierte Matrix 296
Ähnlichkeit
  von Matrizen 234
Äquivalenz
  von Aussagen 8
  von Matrizen 210
  von Normen 315
Äquivalenzklasse 23
Äquivalenzrelation 23
affiner Unterraum 215
algebraische Vielfachheit 239
alternierende Abbildung 223
alternierende Reihe 79
angeordneter Körper 39
Antisymmetrie
  einer Relation 40
antisymmetrische Bilinearform 306
antisymmetrische Matrix 306
arccos$x$ 115
archimedische Ordnung 45
arcsin$x$ 115
arctan$x$ 115
arithmetische Vielfachheit 239
Arkuskosinus 115
Arkussinus 115
Arkustangens 115
Assoziativität
  der Matrixmultiplikation 179
  der Skalarmultiplikation 157
  der Verkettung 20
  in Gruppen 25
aufgespannter Unterraum 162
Aussage 7
  äquivalente 8
  zusammengesetzte 8
Aussageform 7
Austauschlemma 169
Austauschsatz von Steinitz 170
Axiom 6
Axiomensystem
  von Zermelo und Fraenkel 13

$b_A$ 268
$b_A^B$ 269
Banachraum 322
Banachscher Fixpunktsatz 342
Basis 166, 175
  duale 284
Basisauswahl 169, 193

Basisergänzung 170, 193
Basiswechselmatrix 209
Bernoullische Ungleichung 42
Berührpunkt 91, 325
beschränkte Folge 51, 56, 320
  nach oben 56
  nach unten 56
beschränkte Funktion 98
beschränkte Menge 43, 320
bestimmt divergent 97
bestimmt divergente Folge 59
bestimmt divergente Funktion 97
Betrag
  einer komplexen Zahl 67
  einer Zahl 41
Bidualraum 287
bijektive Abbildung 18
Bild
  einer Matrix 180, 188, 192
  einer Menge 19
  eines Elements 16
  eines Morphismus 199
bilineare Abbildung 288
Bilinearform 267
  antisymmetrische 306
  indefinite 271
  negativ definite 271
  negativ semidefinite 271
  positiv definite 270
  positiv semidefinite 271
  symmetrische 270
Binomialkoeffizienten 37
  verallgemeinerte 156
binomische Formel 38
BLF($V$) 267
Blockdiagonalmatrix 253
Blockmatrixmultiplikation 179
Bogenmaß 111
Bolzano-Weierstraß 328
  für $\mathbb{K}$ 73
  für $\mathbb{K}^n$ 328
  für $\mathbb{R}$ 62

$\mathbb{C}$ 66
$C^n(D)$ 133, 369
Cantor 12
Cantorsches Diagonalverfahren 64
Cauchy-Hadamard 86
Cauchy-Kriterium
  für Folgen 74
  für Reihen 80
Cauchy-Produkt 88
Cauchy-Schwarz-Ungleichung 275
Cauchyfolge
  in einem metrischen Raum 322
  in $\mathbb{K}$ 74
Cayley-Hamilton 264
charakteristisches Polynom 238
$\cos x$ 111
Cramersche Regel 231

$\partial_i f$ 355
$\partial_v f$ 355
Definitheit
  einer Bilinearform 270
  einer Matrix 270, 275, 302
  einer Sesquilinearform 275
Definitionsmenge 16
$\deg f$ 34
Deltafunktion 286
Determinante
  Eindeutigkeit 225
  einer Matrix 222
  eines Endomorphismus 236
  Existenz 226
Determinantenproduktsatz 225
Diagonale
  einer Matrix 177
Diagonaleintrag 177
diagonalisierbare Abbildung 242
diagonalisierbare Matrix 242
Diagonalmatrix 242, 307
Diagonalverfahren
  von Cantor 64
dichte Teilmenge 46, 325
Differentialgleichung 260, 343, 360
Differentialquotient 119
Differentialschreibweise 123
Differenzenquotient 119
differenzierbare Funktion 119, 353
Differenzmenge 14
$\dim V$ 171
Dimension
  eines Vektorraums 171
Dimensionsformel
  für direkte Summen 213
  für Durchschnitte 173
  für Komplemente 214
  für Matrizen 190
  für Morphismen 207
  für Produkte 203
  für Quotientenräume 217
  für Summen 173
direkte Summe 212
disjunkte Mengen 14
disjunkte Vereinigung 14
diskrete Metrik 317
Distributivität 27
  der Matrixmultiplikation 179
  der Skalarmultiplikation 157
divergente Folge
  in $\mathbb{C}$ 73
  in metrischen Räumen 318
  in $\mathbb{R}$ 48
Divergenz
  von Folgen 48, 73, 318
  von Funktionen 92, 334
  von uneigentlichen Integralen 150
Drehmatrix 237
Dreiecke
  kongruente 22
Dreiecksmatrix
  echte 230
  obere 230
  untere 230
Dreiecksungleichung
  einer Metrik 316
  einer Norm 276, 312

für Integrale 144
in $\mathbb{C}$ 69
in $\mathbb{R}$ 41
nach unten 42
duale Abbildung 287
duale Basis 284
Dualraum 284

e 107
E 182
$e_i$ 165
$E_n$ 182
echte Dreiecksmatrix 230
Eig$(A,\lambda)$ 236
Eig$(f,\lambda)$ 236
Eigenraum
einer Matrix 236
eines Endomorphismus 236
verallgemeinerter 250
Eigenvektor
einer Matrix 236
eines Endomorphismus 236
verallgemeinerter 250
Eigenwert
einer Matrix 236
eines Endomorphismus 236
Eigenwertkriterium
für Definitheit von Matrizen 302
Einheitsmatrix 182
Einheitsvektor 165
Einheitswurzeln 117
Einschachtelungssatz 55
Einschränkung 17
Element
einer Familie 161
einer Menge 12
inverses 25
linksinverses 25
linksneutrales 25
neutrales 25
elementare Spaltenumformung 185, 192
elementare Zeilenumformung 185
Elementarmatrix 185
End$(V)$ 234
endlich erzeugter Vektorraum 165
endlich-dimensionaler Vektorraum 171
endliche Menge 13
Endomorphismus 234
adjungierter 296
diagonalisierbarer 242
normaler 297
orthogonal diagonalisierbarer 299
orthogonaler 292
selbstadjungierter 297
unitär diagonalisierbarer 299
unitärer 292
Entwicklungspunkt 134, 370
Entwicklungssatz von Laplace 229
erweiterte Koeffizientenmatrix 189
Erzeugendensystem 165, 175
erzeugter Unterraum 162
euklidische Metrik 317
euklidische Norm 313
euklidischer Raum 271
Eulersche Zahl 107
exp$x$ 85
Exponentialfunktion 85, 87, 107
für Matrizen 360
Funktionalgleichung der 89
Extremum
globales 124, 366
isoliertes 124, 366
lokales 124, 366
Extremwertkriterium 137, 374

$f_A$ 197
$f_A^{B,C}$ 205
$F_k(\lambda)$ 185
$F_{k,l}(\lambda)$ 185
Faktorraum 217
Fakultät 36
Familie
linear abhängige 166, 193
linear unabhängige 166, 175
orthogonale 277
orthonormale 277
von Vektoren 161
fast alle 49
Feinheit
einer Zerlegung 147
Fibonacci-Folge 176
Fixpunktsatz
von Banach 342
Folge 48
beschränkte 51, 56, 320
bestimmt divergente 59
divergente 48, 73, 318
geometrische 49, 75
konvergente 48, 73, 318
monoton fallende 56
monoton steigende 56
monoton wachsende 56
nach oben beschränkte 56
nach unten beschränkte 56
reelle 48
rekursive 57
streng monotone 56
Umordnung 54
unbestimmt divergente 59
von Fibonacci 176
folgenkompakte Menge 329
Folgenkriterium
für Abgeschlossenheit 327
für Funktionsgrenzwerte 95, 335
für Stetigkeit 95, 335
Fraenkel 13
Frobenius-Norm 315
Fundamentalsatz der Algebra 70
Funktion 16
alternierende 223
beschränkte 98
bestimmt divergente 97
differenzierbare 119, 353
gleichmäßig stetige 104, 341
integrierbare 142
konvexe 138
lineare 196
Lipschitz-stetige 105, 341

mehrfach differenzierbare 133, 369
mehrfach partiell differenzierbare 369
monotone 98
multilineare 223
partiell differenzierbare 355
rationale 96
stetig differenzierbare 133, 359, 369
stetig fortsetzbare 92, 334
stetig partiell differenzierbare 358, 369
stetige 92, 334
streng monotone 98
stückweise stetige 146
total differenzierbare 353
Funktionalgleichung
der Exponentialfunktion 89
der Logarithmusfunktion 109
Funktionenfolge 101
gleichmäßig konvergente 102, 341
punktweise konvergente 101, 341
Funktionswert 16

ganze Zahl 14
Gauß
Algorithmus von 186
Summenformel von 31
Gaußklammer 45
geometrische Folge 49, 75
geometrische Reihe
endliche 36
unendliche 76
geometrische Vielfachheit 239
geordneter Körper 39
geordnetes Paar 14
Geradenpaar 306
$\mathrm{GL}(n,K)$ 182
gleichmächtige Mengen 63
gleichmäßige Konvergenz 102, 341
gleichmäßige Stetigkeit 104, 341
Gleichungssystem
lineares 177, 190
globales Extremum 124, 366
globales Maximum 124, 366
globales Minimum 124, 366
Grad
einer Polynomfunktion 32, 34
$\operatorname{grad} f$ 362
Gradient 362
Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren 279
Gramsche Matrix 268, 269, 274
Graph 17
Grenzwert
einer Folge 318
einer Funktion 92, 334
einer komplexen Folge 73
einer reellen Folge 48
uneigentlicher 59, 97
Grenzwertsätze
für Folgen 52
für Funktionen 95, 337
in normierten Räumen 321
Gruppe 25
abelsche 25
kommutative 25
orthogonale 294
unitäre 294
Gruppenaxiome 25

$H(A,\lambda)$ 250
$H_r(A,\lambda)$ 250
Häufungspunkt
einer Folge 54, 327
einer Menge 325
halboffenes Intervall 41
harmonische Reihe 77
alternierende 79
Hauptachse 305
Hauptachsentransformation 304
Hauptminor 284
Hauptminorenkriterium 284
Hauptraum 250
Hauptraumzerlegung 252
Hauptsatz
der Differential- und Integralrechnung 147
Hauptvektor 250
Hausdorff-Metrik 348
Heine-Borel 331
Hermitizität
einer Matrix 275
einer Sesquilinearform 274
Heron-Verfahren 57
Hesse-Matrix 370
Höhenlinie 362
$\mathrm{Hom}(V,W)$ 196
Homomorphiesatz 219
Homomorphismus 196
de l'Hôpital 130
Hurwitz-Kriterium 283, 302
Hyperbel 306

i 66
identische Abbildung 17
$\operatorname{Im} f$ 199
$\operatorname{Im} z$ 67
Imaginärteil 67
Indefinitheit
einer Bilinearform 271
einer Matrix 271
Indexverschiebung 30
Induktion 31
Induktionsanfang 31
Induktionsannahme 31
Induktionsschluss 31
Induktionsschritt 31
Induktionsvoraussetzung 31
Infimum 44
$\inf M$ 44
injektive Abbildung 18
innerer Punkt 325
Inneres
einer Menge 325
Integrabilitätskriterium
von Riemann 143
Integral
Additivität 145
nach Lebesgue 142
nach Riemann 142
unbestimmtes 149
uneigentliches 150

Integralkriterium
  für Reihenkonvergenz 156
integrierbare Funktion 142
Intervall
  abgeschlossenes 41
  halboffenes 41
  kompaktes 41, 323
  offenes 41
  uneigentliches 41
Intervallschachtelung 59
invarianter Unterraum 252
inverse Matrix 182, 191, 231
inverses Element 25
invertierbare Matrix 182
isolierter Punkt 118, 325
isoliertes Extremum 124, 366
isoliertes Maximum 124, 366
isoliertes Minimum 124, 366
isomorph 200
Isomorphismus 200
  natürlicher 285

$Jf(a)$ 356
$J_m(\lambda)$ 255
Jacobi-Matrix 356
Jordanbasis 256
Jordanblock 255
Jordandiagramm 254
  Spaltenbedingung 254
  Zeilenbedingung 254
Jordanform 256
Jordankästchen 255
Jordansche Normalform 256

$\mathbb{K}$ 73
$K^{m\times n}$ 177
$K_r(a)$ 317
$\operatorname{Ker} f$ 199
Kern
  einer Matrix 180
  eines Morphismus 199
Kettenregel 122, 363
Klasse 23
Koeffizient
  einer Polynomfunktion 32
Koeffizientenmatrix
  erweiterte 189
Koeffizientenvergleich
  für Polynomfunktionen 34
  für Potenzreihen 104
Körper 27
  angeordneter 39
  geordneter 39
Körperaxiome 27
Körpererweiterung 66
kommutative Gruppe 25
Kommutativität 25
kompakte Menge 329
kompaktes Intervall 41, 323
Komplement
  einer Menge 323
  eines Unterraums 214
  orthogonales 282
komplementärer Unterraum 214
komplexe Konjugation 67
komplexe Zahl 66
komplexe Zahlenebene 67
Kongruenz 22
Kongruenzklasse 22
Konjugation 67
Kontraktion 342
Kontraposition 10
konvergente Folge
  in $\mathbb{C}$ 73
  in metrischen Räumen 318
  in $\mathbb{R}$ 48
Konvergenz
  absolute 80
  gleichmäßige 102, 341
  punktweise 101, 341
  von Folgen 48, 73, 318
  von Funktionen 92, 334
  von uneigentlichen Integralen 150
Konvergenzgebiet 86
Konvergenzkriterien
  Cauchy-Kriterium 74, 80
  Integralkriterium 156
  Leibniz-Kriterium 79
  Majorantenkriterium 82
  Minorantenkriterium 82
  Monotoniekriterium 56
  Quotientenkriterium 83
  Trivialkriterium 78
  Wurzelkriterium 84
Konvergenzradius 86
konvexe Funktion 138
konvexe Menge 340
Koordinaten
  eines Vektors 168
Koordinatenabbildung 202
Koordinatenvektor 202
Kosinus 111
kritischer Punkt 125, 366
Kugel
  abgeschlossene 317
  offene 317

Länge
  eines Vektors 271
Laplacescher Entwicklungssatz 229
Lebesgue-Integral 142
leere Summe 30
leeres Produkt 30
Leibniz-Kriterium 79
Leitkoeffizient
  einer Polynomfunktion 32
Lemma 20
$\lim a_n$ 48
Limes inferior 61
Limes superior 61
$\liminf a_n$ 61
$\limsup a_n$ 61
$\operatorname{Lin} B$ 161, 175
linear abhängig 166, 193
linear unabhängig 166
lineare Abbildung 196
lineare Substitution 153
lineares Gleichungssystem 177, 190

lineares Polynom 34
Linearform 284
Linearkombination 161, 175
  nicht-triviale 166
linksinverses Element 25
linksneutrales Element 25
Lipschitz-Konstante 105, 341
Lipschitz-Stetigkeit 105, 341
$\ln x$ 108
$\log x$ 108
Logarithmus
  natürlicher 108
lokales Extremum 124, 366
lokales Maximum 124, 366
lokales Minimum 124, 366

$\mu_a(A,\lambda)$ 239
$\mu_a(f,\lambda)$ 240
$\mu_g(A,\lambda)$ 239
$\mu_g(f,\lambda)$ 240
Mächtigkeit 63
Majorante 82
Majorantenkriterium 82
Matrix 177
  adjungierte 296
  ähnliche 234
  äquivalente 210
  antisymmetrische 306
  diagonalisierbare 242
  einer Bilinearform 268, 269
  einer linearen Abbildung 204, 206
  einer Sesquilinearform 274
  eines Basiswechsels 209
  eines Tensors 289
  hermitesche 275
  indefinite 271
  inverse 182, 191, 231
  invertierbare 182
  negativ definite 271
  negativ semidefinite 271
  nilpotente 260
  normale 298
  orthogonal diagonalisierbare 300
  orthogonale 292
  positiv definite 270, 275
  positiv semidefinite 271
  pseudoinverse 311
  quadratische 177
  selbstadjungierte 297
  spezielle orthogonale 295
  spezielle unitäre 295
  symmetrische 270
  transponierte 178
  unitär diagonalisierbare 300
  unitäre 292
Matrixmultiplikation 178
Matrixnorm
  induzierte 346
Maximum
  einer Menge 43
  globales 124, 366
  isoliertes 124, 366
  lokales 124, 366
  Satz vom 98, 345
  zweier Zahlen 43
Maximumsnorm 313
$\max M$ 44
mehrfach differenzierbare Funktion 133, 369
mehrfach partiell differenzierbare Funktion 369
Menge 12
  abgeschlossene 323
  abzählbar unendliche 63
  abzählbare 63
  beschränkte 43, 320
  dichte 46, 325
  endliche 13
  folgenkompakte 329
  gleichmächtige 63
  kompakte 329
  konvexe 340
  leere 12
  nach oben beschränkte 43
  nach unten beschränkte 43
  offene 323
  relativ offene 339
  überabzählbare 63
  überdeckungskompakte 330
Metrik 316
  diskrete 317
  euklidische 317
  von Hausdorff 348
metrischer Raum 316
  vollständiger 322
Minimalpolynom
  einer Matrix 263
  eines Endomorphismus 265
Minimum
  einer Menge 44
  globales 124, 366
  isoliertes 124, 366
  lokales 124, 366
  Satz vom 98, 345
  zweier Zahlen 43
$\min M$ 44
Minor 284
Minorante 82
Minorantenkriterium 82
Mischfolge 55
Mittelwertsatz
  der Differentialrechnung 125, 372
  der Integralrechnung 147
modulo 217
monoton fallend
  für Folgen 56
  für Funktionen 98
monoton steigend
  für Folgen 56
  für Funktionen 98
monoton wachsend
  für Folgen 56
  für Funktionen 98
monotone Funktion 98
Monotoniekriterium 56
Morphismus 196
  adjungierter 296
  diagonalisierbarer 242
  normaler 297
  orthogonal diagonalisierbarer 299

orthogonaler 292
selbstadjungierter 297
unitär diagonalisierbarer 299
unitärer 292
Multi-Index 370
multilineare Abbildung 223
Multiplikation
von Matrizen 178
Multiplizität
algebraische 239
arithmetische 239
einer Nullstelle 35
geometrische 239

$\mathbb{N}$ 13
natürliche Zahl 13
natürlicher Isomorphismus 285
Negation 10
negative Definitheit
einer Bilinearform 271
einer Matrix 271
negative Semidefinitheit
einer Bilinearform 271
einer Matrix 271
negative Zahl 40
neutrales Element 25
nicht-triviale Linearkombination 166
nilpotent 260
Norm 312
äquivalente 315
eines Vektors 271
euklidische 313
von Frobenius 315
normale Abbildung 297
normale Matrix 298
Normalform
bezüglich Äquivalenz 221
einer Abbildungsmatrix 220
einer Gramschen Matrix 303
normierte Polynomfunktion 32
normierter Raum 312
normierter Vektor 271
Nullfolge 52
Nullmatrix 178
Nullstelle 32
Nullvektor 158
Nullvektorraum 158

$\mathrm{O}(n)$ 292
obere Dreiecksmatrix 230
obere Schranke 43
Oberintegral 141
Obermenge 12
Obersumme 140
offene Bedingung 339
offene Kugel 317
offene Menge 323
offene Überdeckung 330
offenes Intervall 41
$\mathrm{OI}(f)$ 141
Ordnung
archimedische 45
auf einem Körper 39
auf einer Menge 40
einer Nullstelle 35
partielle 40
totale 40
orthogonal diagonalisierbare Abbildung 299
Orthogonalbasis 277
orthogonale Abbildung 292
orthogonale Familie 277
orthogonale Gruppe 294
orthogonale Matrix 292
orthogonale Projektion 278
orthogonale Vektoren 277
orthogonales Komplement 282
Orthogonalisierungsverfahren
von Gram-Schmidt 279
Orthonormalbasis 277
orthonormale Familie 277
$\mathrm{OS}(f,Z)$ 140

$\pi$ 113
$p$-Norm 314
$p_A$ 263
$\Phi_B$ 202
Paar
geordnetes 14
Paradoxon
von Russell 13
Parallelogrammgleichung 315
Parameterintegral 360
Partialsummen 76
partiell differenzierbare Funktion 355
partielle Integration 151
partielle Ordnung 40
Partition
einer Menge 24
Pascalsches Dreieck 37
Peano-Kurve 349
$\mathrm{Pol}(D,\mathbb{R})$ 163
$\mathrm{Pol}_n(D,\mathbb{R})$ 163
Polarkoordinaten 116, 378
Polynom 34
charakteristisches 238
lineares 34
quadratisches 34
Polynomdivision 33
Polynomfunktion 32
normierte 32
positive Definitheit
einer Bilinearform 270
einer Matrix 270, 275
einer Sesquilinearform 275
positive Semidefinitheit
einer Bilinearform 271
einer Matrix 271
positive Zahl 40
Potenz 29, 109
Potenzmenge 14
Potenzreihe 85
Produkt
leeres 30
Produktintegration 151
Produktmenge 14
Produktregel 120, 363
Produktsatz
für Determinanten 225

Produktzeichen 30
Projektion
  orthogonale 278
pseudoinverse Matrix 311
Punkt
  innerer 325
  isolierter 118, 325
  kritischer 125, 366
punktweise Konvergenz 101, 341

$\mathbb{Q}$ 14
*QR*-Zerlegung 295
quadratische Matrix 177
quadratisches Polynom 34
Quadratwurzel 57
Quantor 9
Quotientenkriterium 83
Quotientenraum 217
Quotientenregel 121, 363

$\mathbb{R}$ 13
$R^n_{f,a}$ 135
Rand 325
Randextremum 125
Randpunkt 325
Rang
  einer Matrix 180, 188
  eines Morphismus 199
rationale Funktion 96
rationale Zahl 14
Raum
  euklidischer 271
  metrischer 316
  normierter 312
  unitärer 275
  vollständiger 322
  wegzusammenhängender 340
Re $z$ 67
Realteil 67
reduzierte Zeilenstufenform 186
reelle Folge 48
reelle Zahl 13
Reflexivität
  einer Relation 23, 40
Regel
  von Cramer 231
  von Sarrus 227
Reihe 76
  absolut konvergente 80
  alternierende 79
  geometrische 36, 76
  harmonische 77
  Umordnung 81
rekursive Folge 57
Relation 16
relativ offene Menge 339
Repräsentant
  einer Äquivalenzklasse 23
Restglied 135, 372
Restklasse 217
Richtungsableitung 355
Riemann-Integral 142
Riemannsches Integrabilitätskriterium 143
rk $f$ 199
Rolle 125
Russell 13
Russellsches Paradoxon 13

$s^B_A$ 274
Sarrus
  Regel von 227
Sattelpunkt 375
Satz
  vom Maximum und Minimum 98, 345
  von Bolzano-Weierstraß 62, 73, 328
  von Cayley-Hamilton 264
  von Heine-Borel 331
  von Laplace 229
  von Rolle 125
  von Schwarz 368
  von Steinitz 170
Schnittmenge 14
Schranke
  obere 43
  untere 43
Schwarz
  Satz von 368
selbstadjungierte Abbildung 297
selbstadjungierte Matrix 297
Semidefinitheit
  einer Bilinearform 271
  einer Matrix 271
senkrecht 277
Sesquilinearform 274
  hermitesche 274
  positiv definite 275
sin $x$ 111
Singulärwert 307
Singulärwertzerlegung 307
Sinus 111
Skalar 158
Skalarmultiplikation 157
Skalarprodukt 271, 275
SLF($V$) 274
Spaltenbedingung
  im Jordandiagramm 254
Spaltenstufenform 192
Spaltenumformung 185, 192
Spektralnorm 347
Spektralsatz
  für Endomorphismen 299
  für Matrizen 300
spezielle orthogonale Matrix 295
spezielle unitäre Matrix 295
Sprungstelle 146
Spur
  einer Matrix 235
  eines Endomorphismus 236
Stammfunktion 148
Standardbasis 167
Standardskalarprodukt
  auf $\mathbb{C}^n$ 275
  auf $\mathbb{R}^n$ 272
  auf Funktionenräumen 273
  auf Matrizenräumen 272
Startmenge 16
Startraum 16
Steinitzscher Austauschsatz 170

stetig differenzierbare Funktion 133, 359, 369
stetig partiell differenzierbare Funktion 358, 369
stetige Fortsetzung 92, 334
stetige Funktion 92, 334
Stetigkeit 92, 334
  gleichmäßige 104, 341
Streichungsmatrix 226
streng monoton 98
streng monoton steigend
  für Folgen 56
streng monoton wachsend
  für Folgen 56
stückweise stetige Funktion 146
Stufe
  eines Hauptvektors 250
  eines verallgemeinerten Eigenraums 250
Stufenspalte 186
Submultiplikativität
  einer Matrixnorm 347
Substitutionsregel 152
  lineare 153
Summe
  direkte 212
  leere 30
  von Unterräumen 163
Summenformel
  von Gauß 31
Summennorm 313
Summenzeichen 29
$\sup M$ 44
Supremum 43
  uneigentliches 47
Supremumsaxiom 44
Supremumsnorm 104, 314
surjektive Abbildung 18
Sylvester
  Trägheitssatz 303
Symmetrie
  einer Bilinearform 270
  einer Matrix 270
  einer Metrik 316
  einer Relation 23

$T_{f,a}$ 134
$T^n_{f,a}$ 134, 370
$\tan x$ 115
Tangens 115
Tangente 118, 361
Tangentialraum
  an einen Graphen 361
Tangentialvektor 361
Taylor-Formel 135, 372
  für Potenzreihen 133
Taylor-Polynom 134, 370
Taylor-Reihe 134
Teilfolge 54
Teilmenge 12
  echte 13
Teleskopreihe 77
Tensor 288
Tensorprodukt 288
Topologie 319
topologische Eigenschaft 319
total differenzierbare Funktion 353
totale Ableitung 353
totale Ordnung 40
Totalität
  einer Relation 40
Trägheitssatz von Sylvester 303
Transitivität
  einer Relation 23, 40
transponierte Matrix 178
trivialer Unterraum 163
Trivialkriterium 78

$U^\perp$ 282
$\mathrm{U}(n)$ 292
$U_r(a)$ 317
überabzählbare Menge 63
Überdeckung
  offene 330
überdeckungskompakte Menge 330
$\mathrm{UI}(f)$ 141
Umgebung 318
  komplexe 73
  reelle 48
Umkehrabbildung 20, 99
Umkehrfunktion 20, 99
Umordnung
  einer Folge 54
  einer Reihe 81
Umordnungssatz 81
unbestimmt divergente Folge 59
unbestimmtes Integral 149
uneigentlicher Grenzwert
  von Folgen 59
  von Funktionen 97
uneigentliches Integral 150
uneigentliches Intervall 41
uneigentliches Supremum 47
Ungleichung
  von Bernoulli 42
  von Cauchy-Schwarz 275
unitär diagonalisierbare Abbildung 299
unitäre Abbildung 292
unitäre Gruppe 294
unitäre Matrix 292
unitärer Raum 275
untere Dreiecksmatrix 230
untere Schranke 43
Unterintegral 141
Unterraum 161
  affiner 215
  aufgespannter 162
  erzeugter 162
  invarianter 252
  komplementärer 214
  trivialer 163
  verschobener 215
Untersumme 140
Untervektorraum 161
  affiner 215
  aufgespannter 162
  erzeugter 162
  komplementärer 214
  trivialer 163
  verschobener 215
Urbild

einer Menge 19
eines Elements 18
US$(f,Z)$ 140

$V^*$ 284
Variable 7
Vektor 158
normierter 271
orthogonaler 277
Vektoraddition 157
Vektorraum 157
endlich erzeugter 165
endlich-dimensionaler 171
isomorpher 200
mit Skalarprodukt 275
normierter 312
Vektorraumhomomorphismus 196
Vektorraumisomorphismus 200
verallgemeinerte Binomialkoeffizienten 156
verallgemeinerter Eigenraum 250
verallgemeinerter Eigenvektor 250
Verbindungsstrecke 340
Vereinigung 14
disjunkte 14
Vereinigungsmenge 14
Verfahren
von Heron 57
Verfeinerung 140
Verkettung 20
differenzierbarer Funktionen 122, 363
Verknüpfung 25
Verneinung 10
verschobener Unterraum 215
Vielfachheit
algebraische 239
arithmetische 239
einer Nullstelle 35
geometrische 239
vollständige Induktion 31
vollständiger Raum 322
Vollständigkeit 74

Wahrheitstafel 8
Weg 340
wegzusammenhängender Raum 340
Wert
einer Funktion 16
Widerspruchsbeweis 10
Winkel 277
Wohldefiniertheit 217
Wohlordnung 45
Wurzel 57
einer Matrix 301
höhere 58, 99
Wurzelfunktion 99
Wurzelkriterium 84

$\chi_A$ 238
$\chi_f$ 240

$\mathbb{Z}$ 14
Zahl
ganze 14
komplex konjugierte 67
komplexe 66
natürliche 13
negative 40
positive 40
rationale 14
reelle 13
Zahlenebene
komplexe 67
Zeilenbedingung
im Jordandiagramm 254
Zeilenstufenform 186
reduzierte 186
Zeilensummennorm 347
Zeilenumformung 185
Zerlegung
eines Intervalls 140
Feinheit einer 147
Zermelo 13
Zielmenge 16
Zielraum 16
Zwischenwertsatz 97, 341