Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 9

Abgabe: Mittwoch, 7. Januar

(1) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Zeige, dass die partiellen Ableitungen $\partial_1 \partial_2 f$ und $\partial_2 \partial_1 f$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ existieren, im Nullpunkt aber nicht übereinstimmen.

(Hinweis: Es ist für die Lösung dieser Aufgabe nicht nötig, $\partial_1 \partial_2 f$ und $\partial_2 \partial_1 f$ in jedem Punkt zu berechnen.)

(2) (a) Es sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Zeige, dass $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1 g(x)$ dann im Nullpunkt differenzierbar ist.

(b) Zeige, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $X \mapsto X^2$ mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ differenzierbar ist, und dass die Ableitung f' gegeben ist durch $f'\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $f'(A)(B) = AB + BA$.

(3) Es seien $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $v \in \mathbb{K}^n$. Man zeige:

(a) Der Grenzwert $\mathrm{e}^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ existiert in $\mathbb{K}^{n\times n}$.

(b) Die Funktion $f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}^n$, $t \mapsto \mathrm{e}^{At} v$ ist differenzierbar mit Ableitung $f'(t) = A\,\mathrm{e}^{At} v$. Insbesondere ist f damit also eine Lösung der Differentialgleichung $f' = Af$ mit der Anfangsbedingung $f(0) = v$.

(Hinweis: Ihr dürft ohne Beweis benutzen, dass diese Exponentialfunktion für kommutierende Matrizen die übliche Funktionalgleichung erfüllt, also insbesondere dass $\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{A(t-t_0)} \mathrm{e}^{At_0}$ gilt. Dies zeigt man genauso wie im eindimensionalen Fall, indem man das Cauchy-Produkt von Reihen in $\mathbb{K}$ auf Reihen von Matrizen verallgemeinert.)

(4) Es seien $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung auf einer offenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ sowie $[a,b] \times [c,d]$ ein in D enthaltenes Rechteck. Man zeige:

(a) Die Integralfunktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $x_1 \mapsto \int_c^d f(x_1, x_2)\, dx_2$ ist stetig.

(b) Ist f stetig partiell nach x_1 differenzierbar, so ist F auf (a,b) differenzierbar mit Ableitung $F'(x_1) = \int_c^d \partial_1 f(x_1, x_2)\, dx_2$ (d. h. Differentiation und Integration nach verschiedenen Variablen können vertauscht werden).

(c) $\int_a^b \int_c^d f(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1 = \int_c^d \int_a^b f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$.

Das Team der Grundlagen der Mathematik 2
wünscht euch frohe Weihnachten
und einen guten Rutsch
ins neue Jahr!