Andreas Gathmann und Marco Albert Wintersemester 2025/26

Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 8

Abgabe: Mittwoch, 17. Dezember

(1) Man zeige:

(a) Sind M ein metrischer Raum und $f,g\colon M \to \mathbb{R}$ zwei stetige Abbildungen, so ist auch die Abbildung $\max(f,g)\colon M \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \max(f(x),g(x))$ stetig.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist die Menge $\mathrm{O}(n)$ aller orthogonalen Matrizen kompakt in $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(2) Es seien M ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum und $f\colon M \to M$ eine Abbildung mit $d(f(x),f(y)) < d(x,y)$ für alle $x,y \in M$ mit $x \neq y$. Man zeige:

(a) Ist M kompakt, so hat f genau einen Fixpunkt.

(b) Ist M nicht notwendig kompakt, so muss f im Allgemeinen keinen Fixpunkt haben.

(3) Es sei $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Gibt es eine stetige, surjektive Abbildung ...

(a) von I nach $I \times I \times I \subset \mathbb{R}^3$;

(b) von I nach $\mathbb{R}^2$;

(c) von $(0,1]$ nach $\mathbb{R}^2$?

(Hinweis: In allen Fällen oben, in denen eine solche Abbildung existiert, lässt sie sich explizit durch die in der Vorlesung konstruierte Peano-Kurve $f\colon I \to I \times I$ ausdrücken, ohne diese aufwändige Konstruktion noch einmal zu wiederholen.)

(4) Zu einem gegebenen metrischen Raum M sei $\mathscr{K}(M)$ die Menge aller nicht-leeren kompakten Teilmengen von M. Wir definieren die folgenden Abstandsfunktionen:

für $a \in M$ und $B \in \mathscr{K}(M)$ sei $\quad d(a,B) := \min\{d(a,b) : b \in B\}$,

für $A,B \in \mathscr{K}(M)$ sei $\quad h(A,B) := \max(\max\{d(a,B) : a \in A\}, \max\{d(b,A) : b \in B\})$.

Man zeige:

(a) Die oben angegebenen Minima und Maxima existieren.

(b) h ist eine Metrik auf $\mathscr{K}(M)$. (Man nennt sie die *Hausdorff-Metrik*; sie misst, wie verschieden zwei Mengen voneinander sind.)

(c) Für $M = \mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik gilt $\lim\limits_{n\to\infty} K_{1+\frac{1}{n}}(0) = K_1(0)$ in $\mathscr{K}(M)$.