Andreas Gathmann und Marco Albert Wintersemester 2025/26

# *Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 7*

*Abgabe: Mittwoch, 10. Dezember*

*Die in der Vorlesung nur angegebene, aber nicht bewiesene Äquivalenz zwischen Folgenkompaktheit und Überdeckungskompaktheit in metrischen Räumen soll bei der Lösung der Aufgaben natürlich nicht verwendet werden.*

(1) (a) Untersuche, ob die folgenden Funktionen stetig in den Nullpunkt fortgesetzt werden können:

$$f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{(x_1+x_2)^3}{x_1^2+x_2^2}, \qquad\qquad g\colon \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto {x_1}^{x_2}.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ sei $M_n \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ die Menge aller diagonalisierbaren Matrizen. Zeige, dass $M_n$ weder offen noch abgeschlossen ist.

(2) Es seien $A$ und $K$ zwei Teilmengen eines metrischen Raumes $M$. Man zeige:

(a) Ist $A$ abgeschlossen und $K$ folgenkompakt, so ist auch $K \cap A$ folgenkompakt.

(b) Ist $A$ abgeschlossen und $K$ überdeckungskompakt, so ist auch $K \cap A$ überdeckungskompakt.

(3) Es sei $M$ ein metrischer Raum. Wir schreiben im Folgenden $AX$ für den Abschluss und $IX$ für das Innere einer Teilmenge $X \subset M$.

(a) Man zeige für alle $X \subset Y \subset M$:

(i) $AX \subset AY$ und $IX \subset IY$.

(ii) $AIAX \subset AX$ und $IAIX \supset IX$.

(iii) $AIAIX = AIX$ und $IAIAX = IAX$.

(b) Wir spielen folgendes topologische Spiel: Ausgehend von einer festen Teilmenge $X$ eines gegebenen metrischen Raumes $M$ dürfen wir fortlaufend neue Teilmengen von $M$ konstruieren, indem wir von $X$ oder einer bereits vorher konstruierten Teilmenge den Abschluss oder das Innere bilden.

Wie viele verschiedene Teilmengen von $M$ können wir auf diese Art maximal erzeugen? Gib für den Raum $M = \mathbb{R}$ mit der Standardmetrik ein konkretes Beispiel einer Teilmenge $X$ an, für die dieses Maximum erreicht wird.

(4) (a) Es seien $K$ eine überdeckungskompakte Teilmenge eines metrischen Raumes $M$ und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $K$ in $M$. Man zeige:

$$\text{Es gibt ein } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \text{ so dass zu jedem } a \in K \text{ ein } i \in I \text{ existiert mit } U_\varepsilon(a) \subset U_i. \qquad (*)$$

(b) Finde ein Beispiel einer *endlichen* offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von $K = M = \mathbb{R}^n$ für eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so dass die Aussage $(*)$ falsch ist.