Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 6

Abgabe: Mittwoch, 3. Dezember

(1) Es sei $V := \operatorname{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellen Zahlenfolgen. Man zeige:

(a) Die Abbildung $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto \min(|x-y|,1)$ ist eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

(b) Die Abbildung

$$e\colon V\times V\to\mathbb{R},\ \big((a_k)_k,(b_k)_k\big)\mapsto \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d(a_k,b_k)}{2^k}$$

(mit d wie in (a)) ist eine Metrik auf V.

(c) Eine Folge reeller Folgen $(a_k^{(n)})_k \in V$ mit $n\in\mathbb{N}$ konvergiert für $n\to\infty$ bezüglich der Metrik e wie in (b) genau dann gegen $(a_k)_k\in V$, wenn sie „punktweise konvergiert“, also wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_k^{(n)} = a_k$ für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt.

(2) Für $x,y\in\mathbb{R}^2$ sind

$$d_1(x,y) := \begin{cases} \|x\|_2+\|y\|_2 & \text{für } x\neq y,\\ 0 & \text{für } x=y\end{cases} \qquad\text{und}\qquad d_2(x,y) := \min(\|x-y\|_2,1)$$

Metriken auf $\mathbb{R}^2$ (das braucht ihr nicht zu zeigen).

(a) Skizziere die qualitativ verschiedenen Fälle, wie abgeschlossene Kugeln bezüglich dieser beiden Metriken aussehen können.

(b) Man zeige: Eine Menge $A\subset\mathbb{R}^2$ ist bezüglich d_1 genau dann beschränkt, wenn A bezüglich der euklidischen Metrik beschränkt ist. Für d_2 gilt dies jedoch nicht.

(c) Man zeige: Eine Menge $A\subset\mathbb{R}^2$ ist bezüglich d_2 genau dann eine Umgebung eines Punktes $a\in\mathbb{R}^2$, wenn A bezüglich der euklidischen Metrik eine Umgebung von a ist. Für d_1 gilt dies jedoch nicht.

(Insbesondere zeigt d_2 also, dass Beschränktheit kein topologischer Begriff ist: Diese Metrik liefert die gleichen Umgebungen wie die euklidische Metrik, aber nicht die gleichen beschränkten Mengen.)

(3) (a) Zeige mit Hilfe der Singulärwertzerlegung, dass es zu jeder Matrix $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ eine eindeutig bestimmte Matrix $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$ gibt, so dass

$$ABA = A \quad\text{und}\quad BAB = B$$

gilt und AB sowie BA symmetrisch sind.

(Ist A quadratisch und invertierbar, so ist dann offensichtlich $B=A^{-1}$. Für eine allgemeine Matrix A, die nicht notwendig quadratisch ist bzw. vollen Rang hat, nennt man B daher die *pseudoinverse Matrix* zu A.)

(b) Berechne zu $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ eine Singulärwertzerlegung und die pseudoinverse Matrix aus (a).

(4) Zu einer Matrix $A=(a_{i,j})_{i,j}\in\mathbb{K}^{m\times n}$ mit $A\neq 0$ bezeichne $\sigma_A\in\mathbb{R}_{>0}$ ihren größten Singulärwert. Man zeige bezüglich der Normen zu den Standardskalarprodukten auf $\mathbb{K}^m$, $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^{m\times n}$:

(a) $\sigma_A = \max\left\{\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} : x\in\mathbb{K}^n\backslash\{0\}\right\}$;

(b) $\sigma_A \le \|A\|$.