Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 5

Abgabe: Mittwoch, 26. November

(1) (a) Die reelle symmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte 0 und 9.

Bestimme eine orthogonale Matrix $T \in \mathrm{O}(3)$, so dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

(b) Man zeige: Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal, so ist A genau dann hermitesch, wenn alle Eigenwerte von A reell sind.

(2) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Man zeige:

(a) Ist A positiv semidefinit, so gibt es eine eindeutig bestimmte symmetrische positiv semidefinite Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $B^2 = A$. Man nennt sie die *Wurzel* aus A.

(b) Ist A nicht positiv semidefinit, so kann es zwar eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $B^2 = A$ geben, aber keine symmetrische.

(3) Man zeige:

(a) Ist $A \in \mathrm{O}(3)$, so gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und $T \in \mathrm{O}(3)$ mit

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

(Hinweis: Zeige zuerst, dass A einen reellen Eigenwert besitzen muss.)

(b) Ist $A \in \mathrm{O}(4)$, so gibt es im Allgemeinen *kein* $\alpha \in \mathbb{R}$ und $T \in \mathrm{O}(4)$ mit

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

(4) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Wir nennen eine Bilinearform b auf V *antisymmetrisch*, wenn $b(x,y) = -b(y,x)$ für alle $x,y \in V$ gilt, und eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ *antisymmetrisch*, wenn $A^\mathsf{T} = -A$ ist. Analog zu Lemma 21.11 sieht man sofort, dass b genau dann antisymmetrisch ist, wenn A_b^B für eine beliebige Basis B von V antisymmetrisch ist. Man zeige:

(a) Zu jeder antisymmetrischen Bilinearform b auf V gibt es eine Basis B von V, so dass

$$A_b^B = \begin{pmatrix} \boxed{I} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \boxed{I} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad I := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$$

gilt, also so dass A_b^B eine Blockdiagonalmatrix mit einer gewissen Anzahl k von Blöcken I (mit $0 \le 2k \le n$) und $n-2k$ anschließenden Nullzeilen und -spalten ist.

(Hinweis: Ist $b \neq 0$, so zeige man die Existenz eines zweidimensionalen Unterraums $U \le V$, so dass die Einschränkung von b auf U bezüglich einer geeigneten Basis die Gramsche Matrix I hat, und verwende dann Induktion über $\dim V$ wie im Beweis des Spektralsatzes.)

(b) Die Determinante jeder ganzzahligen antisymmetrischen Matrix ist eine Quadratzahl.