Andreas Gathmann und Marco Albert Wintersemester 2025/26

Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 4

Abgabe: Mittwoch, 19. November

(1) Es seien $m,n \in \mathbb{N}$ und V der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad höchstens n. Für $f,g \in V$ setzen wir $\langle f,g\rangle := \sum_{i=0}^{m} f(i)\,g(i)$.

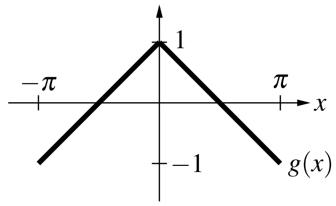
(a) Für welche m und n ist $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ ein Skalarprodukt auf V?

(b) Berechne im Fall $m = n = 2$ eine Orthonormalbasis dieses Skalarprodukts.

(2) Es sei $V = C^0([-\pi,\pi])$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$ mit dem üblichen Skalarprodukt $\langle f,g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$. Wir betrachten darin das Element $g \in V$ definiert durch $g(x) := 1 - \frac{2}{\pi}\,|x|$.

Für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ seien weiterhin $f_n \in V$ mit $f_n(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx$, und $U_n := \operatorname{Lin}(f_1,\dots,f_n) \le V$.

(a) Zeige, dass $(f_1,\dots,f_n)$ für alle n eine Orthonormalbasis von U_n ist.



(b) Berechne für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die orthogonale Projektion g_n von g auf U_n (also die Funktion in U_n, die von g den kleinsten Abstand hat, d. h. sie am besten approximiert).

Wer Lust hat, kann die Funktionen g_n ja für kleine n einmal von einem Computer zeichnen lassen und mit der ursprünglichen Funktion g vergleichen.

(3) Es sei $\operatorname{Pol}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellen Polynomfunktionen in zwei Variablen, d. h. der Raum aller Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die geschrieben werden können als

$$f(x,y) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_{i,j} x^i y^j \quad \text{für alle } x,y \in \mathbb{R},$$

wobei nur endlich viele $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ ungleich 0 sind. Wie im Fall $\operatorname{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ von Polynomfunktionen in einer Variablen kann man auch hier beweisen, dass für jede solche Polynomfunktion ihre Koeffizienten $a_{i,j}$ eindeutig bestimmt sind (das braucht ihr nicht zu tun).

(a) Zeige, dass $\operatorname{Pol}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) = \operatorname{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \otimes \operatorname{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ gilt (also dass $\operatorname{Pol}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ zusammen mit einer geeigneten bilinearen Abbildung $\operatorname{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \operatorname{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \operatorname{Pol}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ die Bedingungen aus Definition 21.54 erfüllt).

(b) Gib ein Beispiel für ein Polynom $f \in \operatorname{Pol}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) = \operatorname{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \otimes \operatorname{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ an, das nicht als $f = p \otimes q$ mit $p,q \in \operatorname{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ geschrieben werden kann.

(4) Zu einer linearen Abbildung $f\colon V \to W$ zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen definieren wir die *duale Abbildung* f^* zwischen den Dualräumen W^* und V^* durch

$$f^*\colon W^* \to V^*,\ \varphi \mapsto \varphi \circ f.$$

Man zeige:

(a) Die Abbildungen $f^*\colon W^* \to V^*$ und $\operatorname{Hom}(V,W) \to \operatorname{Hom}(W^*,V^*)$, $f \mapsto f^*$ sind ebenfalls linear.

(b) Sind B und C Basen von V bzw. W mit dualen Basen B^* bzw. C^*, so hat f^* die Abbildungsmatrix

$$A_{f^*}^{C^*,B^*} = \left(A_f^{B,C}\right)^{\mathsf{T}}.$$

(c) Sind V und W euklidisch, so wissen wir aus Satz 21.48 der Vorlesung, dass ihre Skalarprodukte Isomorphismen $\Gamma_V\colon V \to V^*$ und $\Gamma_W\colon W \to W^*$ induzieren. Konstruieren wir mit diesen Isomorphismen aus f^* die Abbildung $g^* := \Gamma_V^{-1} \circ f^* \circ \Gamma_W\colon W \to V$, so gilt

$$\langle y, f(x)\rangle = \langle g^*(y), x\rangle \quad \text{für alle } x \in V \text{ und } y \in W.$$