# Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 3

*Abgabe: Mittwoch, 12. November*

(1) Überprüfe, für welche $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die folgenden Abbildungen $b$ Skalarprodukte auf dem reellen Vektorraum $V$ sind:

(a) $V = \mathbb{R}^n$, $b(x,y) = x^\mathsf{T} A y$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

(b) $V = \mathbb{R}^{n \times n}$, $b(A,B) = \operatorname{Spur}(AB)$.

(2) (a) Es sei $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ eine Matrix vom Rang 3 mit Minimalpolynom $p_A(t) = t^4 - t^2$. Bestimme die Jordansche Normalform von $A^2 + A$.

(b) Es sei $B \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ mit $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Im} B$. Bestimme das Minimalpolynom und die Jordansche Normalform von $B$.

(3) (a) Zeige die folgende Verallgemeinerung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung: Ist $b$ eine positiv semidefinite symmetrische Bilinearform bzw. hermitesche Sesquilinearform auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$, so gilt für alle $x, y \in V$

$$|b(x,y)|^2 \le b(x,x)\, b(y,y).$$

(Hinweis: Setze $\lambda = \frac{b(y,x)}{b(y,y)+\varepsilon}$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, und untersuche $b(x-\lambda y, x-\lambda y)$ wie im Beweis der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.)

(b) Zeige anhand eines Beispiels, dass in (a) auch dann die Gleichheit gelten kann, wenn $b(x,x)$ und $b(y,y)$ beide ungleich 0 sind sowie $x$ und $y$ linear unabhängig sind.

(4) Zu einer symmetrischen Bilinearform $b$ auf einem reellen Vektorraum $V$ sei $U_b = \{x \in V : b(x,x) = 0\}$. Man zeige:

(a) $U_b$ ist im Allgemeinen kein Unterraum von $V$.

(b) Ist $b$ jedoch positiv semidefinit, so ist $U_b$ ein Unterraum, und $\overline{b}(\overline{x}, \overline{y}) := b(x,y)$ ist ein wohldefiniertes Skalarprodukt auf $V/U_b$.

Falls ihr noch weiter über diese Aufgabe nachdenken möchtet (ohne Abgabe): Was ergibt sich aus dieser Konstruktion, wenn $V$ der Vektorraum aller stückweise stetigen Funktionen auf einem Intervall $[a,b]$ und $b(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ ist? Wie kann man sich in diesem Fall die Elemente von $U_b$ und $V/U_b$ anschaulich vorstellen?