Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 2

Abgabe: Mittwoch, 5. November

(1) (a) Für die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ gilt $\chi_A(t) = (t-1)^5$.

Bestimme die Jordansche Normalform und eine Jordanbasis von A.

(b) Für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ sei V der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad höchstens n. Berechne die Jordansche Normalform der linearen Abbildung $f\colon V \to V$ mit $f(\varphi)(x) = \varphi(x+1)$.

(2) (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine reelle quadratische Matrix mit $\chi_A(t) = t^3 - 4t^2 + 3t$. Berechne χ_{A^2}.

(b) Zeige mit Hilfe der Jordanschen Normalform: Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\operatorname{rk} A = 1$ gilt

$$\det(E + A) = 1 + \operatorname{Spur} A.$$

(3) In dieser Aufgabe wollen wir ein Beispiel für die Anwendung der Jordanform betrachten, und zwar auf sogenannte Systeme von Differentialgleichungen (die in der Praxis an vielen Stellen vorkommen). Die Aufgabe ist es, alle Möglichkeiten für differenzierbare Funktionen $f_1, f_2, f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu bestimmen, so dass

$$\begin{aligned} f_1' &= f_2 + 2f_3, \\ f_2' &= f_1 + f_2 + 3f_3, \\ f_3' &= -f_1 - f_3 \end{aligned}$$

gilt, wobei f_i' wie üblich die Ableitung von f_i bezeichnet.

(Hinweis: Man schreibe die gegebenen Gleichungen in Matrixform $f' = A \cdot f$ mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und bringe A in Jordanform, d. h. bestimme eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$, so dass $T^{-1}AT = J$ eine Jordanmatrix ist. Wenn ihr die Gleichungen dann umschreibt in Gleichungen für $g = T^{-1}f$, sollte sich dieses neue Differentialgleichungssystem leicht lösen lassen.)

(4) Es seien $f, g\colon V \to V$ zwei diagonalisierbare Endomorphismen eines endlich erzeugten K-Vektorraums V, so dass $f \circ g = g \circ f$. Wir bezeichnen die (verschiedenen) Eigenwerte von f und g mit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ bzw. $\mu_1, \dots, \mu_l$. Man zeige:

(a) $g(\operatorname{Eig}(f,\lambda_i)) \subset \operatorname{Eig}(f,\lambda_i)$ für alle $i = 1, \dots, k$.

(b) $\operatorname{Eig}(g,\mu_j) = (\operatorname{Eig}(f,\lambda_1) \cap \operatorname{Eig}(g,\mu_j)) \oplus \cdots \oplus (\operatorname{Eig}(f,\lambda_k) \cap \operatorname{Eig}(g,\mu_j))$ für alle $j = 1, \dots, l$.

(c) Es gibt eine Basis B von V, so dass sowohl A_f^B als auch A_g^B eine Diagonalmatrix ist (d. h. f und g sind mit der gleichen Basis diagonalisierbar).