Andreas Gathmann und Marco Albert

Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 13

(keine Abgabe)

(1) (a) Berechne das Integral $\int_D (2x-y)\,d(x,y)$, wobei D das Parallelogramm mit den Eckpunkten $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ ist.

(Hinweis: Betrachte dazu den Diffeomorphismus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix}$.)

(b) Berechne das Integral $\int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,d(x,y)$, wobei D das Gebiet ist, das von den vier Kurven $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=8x$, $y=x$ und $y=2x$ im Bereich $x \ge 0$ begrenzt wird.

(2) Führe Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^4$ ein und zeige damit, dass eine vierdimensionale euklidische Kugel $K_R(0)$ mit $R \in \mathbb{R}_{>0}$ das Volumen $\operatorname{vol} K_R(0) = \frac{\pi^2 R^4}{2}$ hat.

(3) Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion auf einer beschränkten Menge $D \subset \mathbb{R}^n$. Man zeige:

(a) Ist $A \subset D$ eine messbare Teilmenge, so ist f auch auf A integrierbar.

(b) Ist $f(x) \ge 0$ für alle $x \in D$, so gibt es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine kompakte messbare Teilmenge $K \subset D$ mit
$$\int_K f(x)\,dx > \int_D f(x)\,dx - \varepsilon.$$
(Hinweis: Man kann K als eine geeignete Vereinigung von Quadern wählen.)

(4) Es seien $A \subset \mathbb{R}$ eine kompakte messbare Menge und
$$M_A := \{((1-t^2)x,\, t) : x \in A \text{ und } t \in [0,1]\} \quad \subset \mathbb{R}^2.$$

(a) Skizziere M_A für den Fall $A = [1,2]$.

(b) Zeige, dass M_A messbar ist.

(c) Berechne $\operatorname{vol}(M_A)$ in Abhängigkeit von $\operatorname{vol}(A)$.